

CP089. Notion de réluctance et désaturation d'un matériau magnétique ()**

1. L'application du théorème d'Ampère pour l'excitation magnétique au sein du matériau conduit à :

$$H = \frac{NI}{\ell}$$

Pour ce matériau l.h.i., on en déduit le champ magnétique : $B = \frac{\mu NI}{\ell}$, ce qui donne pour le flux du champ magnétique à travers une section droite du matériau :

$$\Phi = B \times S \Rightarrow \Phi = \frac{\mu NIS}{\ell} = \frac{\mu S}{\ell} \times NI \Rightarrow \boxed{NI = \mathcal{R} \times \Phi}$$

2. En électricité, en imposant une tension U aux bornes d'un conducteur, le conducteur est traversé par un courant d'intensité I tel que $U = RI$.

Ici, en imposant un courant libre au niveau du matériau magnétique, le matériau est traversé par un flux magnétique Φ tel que $NI = \mathcal{R}\Phi$.

La réluctance d'un matériau magnétique correspond à l'aptitude du circuit à s'opposer à sa pénétration par un champ magnétique.

En particulier, les matériaux ferromagnétiques de grande perméabilité magnétique possède des réluctances faibles par rapport à celle de l'air et se laissent facilement traverser par le champ magnétique, preuve en est que ces matériaux constituent des tubes de champ magnétique.

3. On applique à nouveau le théorème d'Ampère pour l'excitation magnétique en tenant compte de l'entrefer, on note avec un indice e les grandeurs dans l'entrefer et avec un indice m les grandeurs dans le matériau :

$$H_e \times e + H_m \times \ell = NI \Rightarrow \frac{B_e}{\mu_0} \times e + \frac{B_m}{\mu} \times \ell = NI$$

La canalisation du flux magnétique et la section uniforme imposent la conservation du champ magnétique $B_e = B_m = B$ et donc :

$$\frac{B}{\mu_0} \times e + \frac{B}{\mu} \times \ell = NI$$

Avec $\Phi = B \times S$ pour le flux à travers une section droite, on en déduit :

$$\boxed{\Phi \times \left(\frac{e}{\mu_0 S} + \frac{\ell}{\mu S} \right) = NI}$$

On constate que « **les réluctances en série s'ajoutent** ».

4. La relation d'Hopkinson donne $\Phi = NI/\mathcal{R}$. Hors saturation, la relation entre le flux magnétique et NI est une relation linéaire de pente $1/\mathcal{R}$.
En pratique, comme $\mu \gg \mu_0$ pour un matériau magnétique, la présence

de l'entrefer augmente la réluctance du circuit ce qui, à intensité donnée, diminue le flux magnétique.

La saturation magnétique du matériau apparaît donc pour une intensité du courant plus élevée.

5. L'inductance du circuit est liée au flux du champ magnétique à travers les N spires selon :

$$LI = \Phi_{tot} = NBS = N\Phi = N \times \frac{NI}{\mathcal{R}} \Rightarrow \boxed{L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}}$$

La présence de l'entrefer augmente la réluctance et diminue l'inductance du système.

6. Pour le circuit sans entrefer $\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$, c'est à dire $L = \frac{\mu N^2 S}{\ell}$, ce qui impose pour la longueur du circuit :

$$\ell = \frac{\mu N^2 S}{L} = \frac{1000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 100^2 \times 18,8 \times 10^{-4}}{20 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\ell = 1,2 \text{ m}}$$

Ce qui donne pour le champ magnétique (attention à considérer l'amplitude de l'intensité du courant et non la grandeur efficace) :

$$B = \frac{\mu Ni}{\ell} = \frac{1000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 100 \times 10\sqrt{2}}{1,18} \Rightarrow \boxed{B = B_{sat} = 1,5 \text{ T}}$$

7. On peut bien sûr faire passer 20 A dans le bobinage (en supposant qu'il le supporte), cependant la saturation magnétique étant déjà atteinte, il n'y aura aucune augmentation du champ magnétique.
8. L'entrefer augmente la réluctance du circuit et contribue à « désaturer » le circuit magnétique.

D'après la question 3 :

$$B = \frac{NI}{\frac{e}{\mu_0} + \frac{\ell}{\mu}} = \frac{100 \times 20 \times \sqrt{2}}{3,0 \times 10^{-3} + \frac{1,18}{1000 \times 4\pi \times 10^{-7}}} \Rightarrow \boxed{B = 0,85 \text{ T}}$$

Et pour l'inductance :

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{\mu_0 N^2 S}{e + \frac{\ell}{\mu_r}} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 100^2 \times 18,8 \times 10^{-4}}{3,0 \times 10^{-3} + \frac{1,18}{1000}} \Rightarrow \boxed{L = 5,7 \text{ mH}}$$

CP002. Adaptation à l'aide d'un transformateur (**).

1. Pour le transformateur parfait $U_2 = mU_1 = mE$. En appliquant la formule du pont diviseur de tension, on en déduit :

$$\underline{u} = \frac{R_{ch}}{R_{ch} + r_p + jl_f\omega} \underline{u}_2 \Rightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{mR_{ch}E}{R_{ch} + r_p + jl_f\omega}}$$

2. Rappelons que le calcul de la puissance nécessite de revenir aux grandeurs réelles. La puissance instantanée dissipée par la résistance R_{ch} vaut :

$$p_2(t) = R_{ch}i_2^2(t) = \frac{u^2(t)}{R_{ch}} \Rightarrow P_2 = \left\langle \frac{u^2(t)}{R_{ch}} \right\rangle$$

La tension réelle u a pour expression :

$$u(t) = |\underline{U}| \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \langle u^2(t) \rangle = |\underline{U}|^2 / 2$$

C'est à dire pour la puissance moyenne reçue par la résistance de charge :

$$P_2 = \left\langle \frac{u^2(t)}{R_{ch}} \right\rangle = \frac{1}{2R_{ch}} \times \frac{m^2 R_{ch}^2 E^2}{(R_{ch} + r_p)^2 + l_f^2 \omega^2}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{m^2 R_{ch} E^2}{2} \times \frac{1}{(R_{ch} + r_p)^2 + l_f^2 \omega^2}}$$

La puissance instantanée fournie par le générateur vaut $p_1(t) = e(t)i_1(t)$ ou compte tenu de la relation entre les courants pour le transformateur idéal de perméabilité infinie : $p_1(t) = e(t) \times mi_2(t)$.

La tension du générateur peut s'écrire sous la forme $e(t) = E \cos(\omega t)$; $i_2(t)$ l'intensité complexe du courant au secondaire prend la forme :

$$i_2(t) = \frac{\underline{u}}{R_{ch}} = \frac{mEe^{j\omega t}}{R_{ch} + r_p + jl_f\omega}$$

C'est à dire pour la grandeur réelle :

$$i_2(t) = \frac{mE}{\sqrt{(R_{ch} + r_p)^2 + l_f^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \cos(\varphi) = \frac{R_{ch} + r_p}{\sqrt{(R_{ch} + r_p)^2 + l_f^2 \omega^2}}$$

Ce qui donne pour la puissance moyenne fournie :

$$P_1 = \langle e(t)mi_2(t) \rangle = \frac{m}{2} EI_2 \cos(\varphi) = \frac{m^2 E^2}{2} \times \frac{(R_{ch} + r_p)}{(R_{ch} + r_p)^2 + l_f^2 \omega^2}$$

Et finalement pour le rendement :

$$\rho = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{R_{ch}}{R_{ch} + r_p}}$$

Le rendement est le rapport de la puissance dissipée par la résistance de

charge sur l'ensemble des puissances dissipées par les résistances. Les deux résistances étant parcourues par la même intensité, le résultat est en fait immédiat :

$$\rho = \frac{\langle R_{ch} i_2^2(t) \rangle}{\langle R_{ch} i_2^2(t) \rangle + \langle r_p i_2^2(t) \rangle} = \frac{R_{ch}}{R_{ch} + r_p}$$

Le calcul initialement a pour intérêt de s'entraîner à la manipulation des grandeurs complexes.

3. La tension aux bornes de la charge est maximale si l'intensité du courant l'est aussi. En présence du condensateur, l'impédance au secondaire prend la forme :

$$\underline{Z}_{eq} = (r_p + R_{ch}) + j \left(l_f \omega - \frac{1}{C \omega} \right)$$

À tension u_2 fixée, l'amplitude de l'intensité du courant est maximale au secondaire lorsque le module de l'impédance est minimale c'est à dire :

$$C = \frac{1}{l_f \omega^2}$$

CP064. Validité du modèle linéaire d'un transformateur

1. L'absence de pertes magnétiques et l'équation de Maxwell-Thomson assure que le flux se conserve le long du circuit. Pour une section supposé uniforme, on en déduit un champ magnétique uniforme le long du contour. Pour un matériau linéaire, l'excitation magnétique et le champ magnétique sont proportionnels, l'excitation magnétique est aussi uniforme le long du cadre.

On applique alors le théorème d'Ampère pour l'excitation magnétique le long du cadre. Pour le contour représenté sur l'énoncé, les courants sont orientés conformes, en conséquence :

$$H \times (2a + 2b) = N_1 i_1 + N_2 i_2 \Rightarrow H = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{2(a + b)}$$

Pour ce matériau linéaire :

$$B = \mu_0 \mu_r H \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \mu_r (N_1 i_1 + N_2 i_2)}{2(a + b)}$$

2. On exprime le flux à travers l'ensemble des spires du primaire, le vecteur surface étant orienté conforme au champ :

$$\Phi_1 = N_1 B S \Rightarrow \Phi_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 S}{2(a + b)} i_1 + \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S}{2(a + b)} i_2$$

Par définition des inductances : $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$, les relations étant vraies $\forall \{i_1, i_2\}$, on obtient par identification :

$$L_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 S}{2(a + b)} \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S}{2(a + b)}$$

De même, en considérant Φ_2 , on obtient : $L_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 S}{2(a + b)}$.

En l'absence de résistances, au primaire $u_1 = -e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 S \frac{dB}{dt}$; de même au secondaire : $u_2 = N_2 S \frac{dB}{dt}$. On en déduit : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$.

3. En considérant la pente dans la partie quasi-linéaire :

$$\mu_0 \mu_r = \frac{B_{sat}}{H_{sat}} = \frac{1,0}{2,0} \Rightarrow \mu_r = \frac{1,0}{2,0 \times 4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow \mu_r = 4,0 \times 10^5$$

Par lecture graphique :

$$B_{sat} = 1,0 \text{ T} ; \quad B_r = 0,1 \text{ T} ; \quad H_c = 0,2 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

« à vide » signifie que le circuit est ouvert au secondaire, le courant i_2 est nul au secondaire. On cherche le courant limite au primaire associé à la saturation magnétique du circuit :

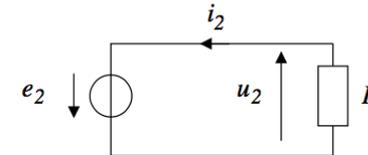
$$B_{sat} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 i_{max}}{2(a + b)} \Rightarrow i_{max} = \frac{2(a + b) B_{sat}}{\mu_0 \mu_r N_1} = \frac{2 \times 0,10 \times 1,0}{1/2 \times 500}$$

C'est à dire $i_{max} = 0,8 \text{ mA}$.

L'absence de courant au secondaire ne permet pas de vérifier $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$, le circuit magnétique sature pour un courant au primaire très faible.

4. Notons tout d'abord que la perméabilité relative n'étant pas infinie, on ne peut appliquer $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$.

Au secondaire, en tenant compte des orientations, le circuit électrique est le suivant :



$$u_2 = -R i_2 = -e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2(a + b)} j\omega [N_1 i_1 + N_2 i_2] N_2 S$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2(a+b)R}{\mu_0\mu_r j\omega N_2 S} \underline{i}_2 = N_1 \underline{i}_1 + N_2 \underline{i}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{i}_2 = \frac{-N_1 \underline{i}_1}{N_2 + \frac{2(a+b)R}{\mu_0\mu_r j\omega N_2 S}}$$

Comparons les deux termes du dénominateur :

$$\frac{2(a+b)R}{\mu_0\mu_r \omega N_2 S} = \frac{2 \times 0,10 \times 50}{1/2 \times 2\pi \times 50 \times 5 \times 10^{-4} \times 1000} = 0,127 \ll N_2 = 1000$$

En conséquence $\underline{i}_2 \approx \frac{-N_1}{N_2} \underline{i}_1$. Comme $\mu_r = 4,0 \times 10^5 \gg 1$, on retrouve la relation de transformation des courants basée sur une perméabilité relative infinie.

5. On reprend le schéma électrique du secondaire :

$$\underline{u}_2 = -R \underline{i}_2 = -e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{dB}{dt} S = j\omega N_2 \underline{B} S$$

Avec la loi approximative de transformation des courants, on en déduit pour les amplitudes à saturation :

$$R \times \frac{N_1}{N_2} I_{1,max} = \omega N_2 B_{sat} S \quad \Rightarrow \quad I_{1,max} = \frac{\omega N_2^2 B_{sat} S}{N_1 R}$$

Application numérique :

$$I_{1,max} = \frac{2\pi \times 50 \times 1000^2 \times 1,0 \times 5,0 \times 10^{-4}}{500 \times 50} \quad \Rightarrow \quad I_{1,max} = 6,3 \text{ A}$$

En fonctionnement normal, $N_1 \underline{i}_1 + N_2 \underline{i}_2 \approx 0$, on peut donc imposer des intensités importantes sans risquer de saturer le matériau.

CP070. Transformateur réel (***)

1. En négligeant la chute de tension due à la résistance des enroulements (modèle du transformateur parfait), pour le primaire :

$$\underline{v} = -\underline{e} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (N_1 \underline{B} \times 2s) = N_1 \times 2s \times \frac{dB}{dt} = N_1 \times 2s \times j\omega \underline{B}$$

Et donc pour les amplitudes :

$$V_{eff} \sqrt{2} = 2\pi f \times N_1 \times 2s \times B_0 \quad \Leftrightarrow \quad N_1 = \frac{V_{eff} \sqrt{2}}{2\pi f \times 2s \times B_0}$$

Application numérique :

$$N_1 = \frac{220 \sqrt{2}}{2\pi \times 50 \times 2 \times 8 \times 10^{-4} \times 1} \quad \Rightarrow \quad N_1 \simeq 620 \text{ spires}$$

Compte tenu du rapport de tensions 220 V/110 V, $N_2 = 310$.

Avec une fréquence de 400 Hz, $N_1 = 78$ spires.

2. Modèle du transformateur réel :

(a) Dans le cas d'un régime forcé :

$$\underline{v}_1 = -\underline{e}_1 = \frac{d\Phi_{T,1}}{dt} = j\omega N_1 \underline{\Phi} \quad \text{et} \quad \underline{v}_2 = j\omega N_2 \underline{\Phi}$$

On applique ensuite le théorème d'Ampère pour l'excitation magnétique :

$$N_1 \underline{i}_1 + N_2 \underline{i}_2 = \underline{H} \times l = \frac{\underline{B}}{\mu_0 \mu_r} \times l = \frac{\underline{\Phi}}{\mu_0 \mu_r S} \quad \Leftrightarrow \quad N_1 \underline{i}_1 + N_2 \underline{i}_2 = \underline{\Phi} \times \mathcal{R}$$

(b) L'enroulement du primaire en présence du noyau ferromagnétique de longueur l possède une inductance propre : $L_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 S}{l}$.

En utilisant la relation entre la tension au primaire et le flux, la relation sur les courants peut se réécrire :

$$N_1 \underline{i}_1 + N_2 \underline{i}_2 = \frac{\underline{v}_1}{j\omega N_1} \times \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{i}_1 - \frac{\underline{v}_1}{j\omega \mu_0 \mu_r N_1^2 S / l} = -\frac{N_2}{N_1} \underline{i}_2$$

On peut donc poser $\underline{I}_m = \frac{\underline{v}_1}{j\omega L_1}$.

(c) Pour $\mu_r \rightarrow +\infty$, $\underline{I}_m \rightarrow 0$ et on retrouve la loi de transformation des courants du transformateur idéal.

(d) D'après $\underline{i}_1 - \underline{I}_m = -\frac{N_2}{N_1} \underline{i}_2$, on constate que la relation de transformation des courants s'applique en remplaçant \underline{i}_1 par $\underline{i}_1 - \underline{I}_m$, un courant \underline{I}_m est prélevé; de la relation entre \underline{I}_m et \underline{v}_1 , on en déduit la présence en parallèle d'une inductance L_1 parcourue par le courant \underline{I}_m .

(e) Application numérique :

$$I_m = \frac{V_1}{2\pi f L_1} = \frac{220}{2\pi \times 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3100 \times 620^2 \times (2 \times 8 \times 10^{-4}) / 0,25} \quad I_m = 73 \text{ mA}$$

CP035. Disjoncteur différentiel (CCP, PSI, 2009, **)

1. Pour tout point M , le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants libres, le vecteur excitation magnétique est donc dirigé selon \vec{e}_θ .

La distribution des courants est invariante par toute rotation d'angle θ , en conséquence :

$$\vec{H} = H(r, z) \vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$$

Le matériau étant supposé linéaire, le champ magnétique possède les mêmes symétries que l'excitation magnétique.

2. On applique le théorème d'Ampère pour l'excitation magnétique. Le contour étant un cercle de rayon r centré sur le fil. On en déduit :

$$\vec{H} = \frac{i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$$

3. On considère le vecteur surface de la section droite orientée selon \vec{e}_θ , donc :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2\pi} \int_{z=0}^H \int_{r=a}^b \frac{1}{r} dr dz \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2\pi} H \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

4. Les courants sont initialement équilibrés de somme nulle; le déséquilibre entraîne l'apparition d'un courant résultant oscillant à 50 Hz, qui crée une variation de flux et donc une force électromotrice au sein du bobinage.

5. En notant I_{lim} l'intensité limite, le flux prend la forme :

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu_r N I_{lim} \cos(\omega t)}{2\pi} H \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ceci génère une force électromotrice :

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 \mu_r N I_{lim} \omega \sin(\omega t)}{2\pi} H \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On souhaite que la force électromotrice atteigne la tension de seuil, ce qui impose pour le nombre de spires :

$$V_{seuil} = \frac{\mu_0 \mu_r N I_{lim} \omega}{2\pi} H \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow N = \frac{2\pi V_{seuil}}{\mu_0 \mu_r I_{lim} \omega H \ln(b/a)}$$

Application numérique :

$$N = \frac{2\pi \times 5}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^6 \times 0,030 \times 2\pi \times 50 \times 0,01 \ln 2} = 382,6$$

On peut donc retenir $\boxed{N \approx 4,0 \times 10^2}$.

6. En fonctionnement normal, le système est équilibré, le courant résultant est nul, l'excitation magnétique est donc nulle, mathématiquement $H = 0$.

En cas de déséquilibre, on souhaite, partant d'une situation telle que $H = 0$, obtenir le plus grand champ magnétique possible ce qui va générer une force électromotrice maximale.

Il s'agit donc bien de vérifier $B'(H = 0)$ maximale pour optimiser la **sensibilité** du dispositif.