Contacteur électromécanique

Exercice 1 : Electroaimant de portage

$$F_{em} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial x}\right)_{I=cste}$$

avec x la distance entre la plaque et l'électroaimant compté de l'électroaimant vers la plaque.

Pour obtenir l'énergie magnétique, on va déterminer l'inductance propre du système et ceci en utilisant successivement l'excitation magnétique et le champ magnétique :

→ Théorème d'Ampère pour l'excitation magnétique : sur un contour incluant la plaque, l'électroaimant et les deux passages dans le vide :

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_{ext} \times 2x = NI$$

→ Conservation du flux magnétique :

$$B_1 S = B_{ext} S = B_2 \times 2S$$

→ Relations constitutives :

$$B_1 = \mu_0 \mu_{r,1} H_1 \quad ; \quad B_2 = \mu_0 \mu_{r,2} H_2 \quad ; \quad B_{ext} = \mu_0 H_{ext}$$

En conservant le champ magnétique B_1, on en déduit :

$$B_1 = \frac{\mu_0 N I}{l_1/\mu_{r,1} + l_2/(2\mu_{r,2}) + 2x}$$

→ L'inductance propre se définit comme le rapport du flux propre divisé par l'intensité :

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{B_1 N S}{I} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l_1/\mu_{r,1} + l_2/(2\mu_{r,2}) + 2x}$$

Ce qui donne pour l'énergie magnétique du système :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 N^2 S}{l_1/\mu_{r,1} + l_2/(2\mu_{r,2}) + 2x} \times I^2$$

Et donc pour la force électromagnétique :

$$F_{em} = -\frac{\mu_0 N^2 S}{[l_1/\mu_{r,1} + l_2/(2\mu_{r,2}) + 2x]^2} I^2$$

Cette force est maximale en norme pour $x = 0$ et, à la limite, elle doit compenser le poids de la pièce :

$$\frac{\mu_0 N^2 S}{[l_1/\mu_{r,1} + l_2/(2\mu_{r,2})]^2} I^2 = Mg \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{M = \frac{\mu_0 N^2 S I^2}{g\,[l_1/\mu_{r,1} + l_2/(2\mu_{r,2})]^2}}$$

Application numérique :

$$M = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 100^2 \times 4 \times 10^{-4} \times 1^2}{9,81 \times [0,2/2000 + 0,1/1000]^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M \approx 13 \text{ kg}}$$

Exercice 2 : Moteur à réluctance variable

1. Le système est π périodique, d'où l'angle 2θ. De plus, le calcul montre que L est maximum pour $\theta = 0$ et minimum pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, d'où le cos.

Pour le calcul de L_1 et L_2, les grandeurs relatives au stator sont indicées par s, celles au rotor par r.

On envisage le cas $\theta = 0$. Le théorème d'Ampère mène à $H_s\ell_s + H_r\ell_r + H_{air}2e = Ni$. Attendu que le ferromagnétique est doux et non saturé, de perméabilité relative $\mu_r = 10^5$:

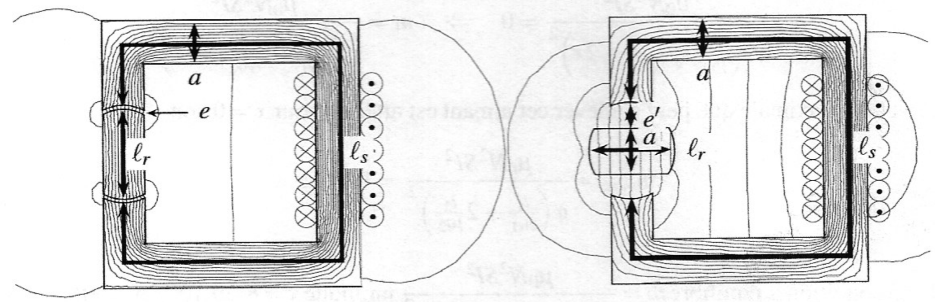
$$\frac{B_s}{\mu_0\mu_r}\ell_s + \frac{B_r}{\mu_0\mu_r}\ell_r + \frac{B_{air}}{\mu_0}2e = Ni.$$

Le champ magnétique est à flux conservatif donc $B_s a^2 = B_r a^2 = B_{air} a^2$:

$$\frac{B_s}{\mu_0\mu_r}\ell_s + \frac{B_s}{\mu_0\mu_r}\ell_r + \frac{B_s}{\mu_0}2e = Ni \quad \Rightarrow \quad B_s = \frac{\mu_0 Ni}{\frac{\ell_s+\ell_r}{\mu_r} + 2e} = \frac{\mu_0 Ni}{2e},$$

car $\mu_r = 10^5$. D'où, à travers les $N = 100$ spires de la bobine ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1}) :

$$\varphi = NB_s a^2 = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2e} i = (L_1 + L_2)\, i \quad \Rightarrow \quad L_1 + L_2 = 9{,}0.10^{-4} \text{ H}.$$



Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, les distances changent pour le rotor et l'entrefer :

$$H_s\ell_s + H_r a + H_{air}2e' = Ni \quad \Rightarrow \quad \frac{B_s}{\mu_0\mu_r}\ell_s + \frac{B_r}{\mu_0\mu_r}a + \frac{B_{air}}{\mu_0}2e' = Ni.$$

Les surfaces offertes au champ magnétique varient aussi (la surface offerte à B_{air} est grossièrement évaluée) :

$$B_s a^2 = B_r a \ell_r = B_{air} a \ell_r.$$

Ainsi (même simplification numérique que précédemment) :

$$\frac{B_s}{\mu_0\mu_r}\ell_s+\frac{B_s}{\mu_0\mu_r}\frac{a^2}{\ell_r}+\frac{B_s}{\mu_0}\frac{2e'a}{\ell_r}=Ni \quad\Rightarrow\quad B_s=\frac{\mu_0 Ni\ell_r}{2e'a}.$$

D'où, à travers les N spires de la bobine, avec $e'=\frac{1}{2}(\ell_r+2e-a)$:

$$\varphi=NB_sa^2=\frac{\mu_0N^2a\ell_r}{2e'}i=(L_1-L_2)i \quad\Rightarrow\quad L_1-L_2=2,7.10^{-4}\text{ H}.$$

Finalement $L_1=5,8.10^{-4}$ H et $L_2=3,1.10^{-4}$ H.

2. $\mathscr{E}_{em}=\frac{1}{2}L(\theta)i^2$ donc $\Gamma=\frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial\theta}=-i^2L_2\sin(2\theta)$.

3. Si le courant i reste constant, égal à I, alors $<\Gamma>=-I^2L_2<\sin(2\theta)>=0$ et le moteur ne tourne pas.

Exercice 3 : Couple exercée sur une barre mobile

4. Le moteur tourne, donc θ est une fonction du temps : $\Omega=\frac{d\theta}{dt}$ donc $\theta(t)=\Omega t+\alpha$. Ainsi :

$$\Gamma=-2L_2I^2\cos^2(\omega t)\sin(2\Omega t+2\alpha)$$

$$\Gamma=-2L_2I^2\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\sin(2\Omega t+2\alpha)$$

$$\Gamma=-L_2I^2\sin(2\Omega t+2\alpha)$$
$$-\frac{L_2I^2}{2}\sin(2(\Omega+\omega)t+2\alpha)+\frac{L_2I^2}{2}\sin(2(\omega-\Omega)t-2\alpha).$$

Ainsi $<\Gamma>$ est nul, sauf si $\omega=\Omega$. Dans ce cas : $<\Gamma>=-\frac{L_2I^2}{2}\sin(2\alpha)$ et le couple maximum est $<\Gamma>_{max}=\frac{L_2I^2}{2}$.

5. À travers les N spires de la bobine, $\varphi=L(\theta(t))i(t)$.

6. Attendu que $\theta(t)=\Omega t+\alpha=\omega t+\alpha$:

$$\varphi=(L_1+L_2\cos(2\omega t+2\alpha))I\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

$$\varphi=L_1I\sqrt{2}\cos(\omega t)+\frac{L_2I\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t+2\alpha)+\frac{L_2I\sqrt{2}}{2}\cos(3\omega t+2\alpha).$$

La f.é.m. est orientée dans le même sans que le courant ; ainsi :

$$u(t)=+\frac{d\varphi}{dt}=-\omega L_1I\sqrt{2}\sin(\omega t)-\omega\frac{L_2I\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t+2\alpha)-3\omega\frac{L_2I\sqrt{2}}{2}\sin(3\omega t+2\alpha).$$

1. On appelle H_{int} l'excitation magnétique moyenne au sein du matériau et H_{ext} l'excitation magnétique dans l'entrefer.
   Le contour en pointillé a une longueur l dans le matériau ferromagnétique et $a\theta$ dans l'entrefer. L'application du théorème d'Ampère sur le contour en pointillé qui enlace les N spires conduit à :
   $$\oint\vec{H}.\mathrm{d}\vec{l}=H_{int}\times l+H_{ext}\times a\theta=Ni$$
   Le champ magnétique étant à flux conservatif, la canalisation des lignes de champ impose l'égalité du flux magnétique à travers toute section droite du matériau de section constante :
   $$B_{int}S=B_{ext}S \quad\Rightarrow\quad B_{int}=B_{ext}$$
   Avec $B_{ext}=\mu_0H_{ext}$ et $B_{int}=\mu_0\mu_rH_{int}$, la relation déduite du théorème d'Ampère prend la forme :
   $$\frac{B_{ext}}{\mu_0\mu_r}l+\frac{B_{ext}}{\mu_0}a\theta=Ni \quad\Rightarrow\quad \boxed{B_{ext}=\frac{\mu_0Ni}{l/\mu_r+a\theta}}$$
   Comme $B_{int}=B_{ext}$, on détermine le flux du champ magnétique à travers le bobinage :
   $$\Phi=B_{int}NS \quad\Rightarrow\quad \Phi=\frac{\mu_0N^2S}{l/\mu_r+a\theta}\times i$$
   et donc pour l'inductance propre : $\boxed{L=\frac{\mu_0N^2S}{l/\mu_r+a\theta}}$
2. L'énergie magnétique stockée dans le système vaut :
   $$\mathcal{E}_m=\frac{1}{2}Li^2$$
   Le couple qui s'exerce sur la partie mobile s'obtient en dérivant l'énergie magnétique par rapport à θ à intensité constante.
   $$\Gamma=\left(\frac{\partial\mathcal{E}_m}{\partial\theta}\right)_{i=cste} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Gamma=-\frac{a\mu_0N^2Si^2}{2(l/\mu_r+a\theta)^2}}$$

Machine synchrone MS

Exercice 1 : la machine synchrone

1. L'axe de l'enroulement du rotor fait un angle θ avec l'axe de la phase B_1 du stator et un angle $\pi/2-\theta$ avec l'axe de la phase B_2 du stator ; l'inductance mutuelle étant maximale lorsque les axes sont alignées, on peut donc proposer pour les inductances mutuelles :
$$\boxed{M_{1r}(t)=\hat{M}\cos(\theta(t))} \quad \text{et} \quad \boxed{M_{2r}(t)=\hat{M}\cos(\pi/2-\theta(t))=\hat{M}\sin(\theta(t))}$$

2. Pour exprimer l'énergie magnétique, il faut tenir compte des termes d'inductance propre et des termes d'inductance mutuelle. Il n'y a pas à tenir compte de mutuelle entre les deux phases du stator car leurs axes sont perpendiculaires :
$$\boxed{\mathcal{E}_{mag}=\frac{1}{2}L_rI_r^2+\frac{1}{2}L_si_{s1}^2+\frac{1}{2}L_si_{s2}^2+\hat{M}\cos(\theta)I_ri_{s1}+\hat{M}\sin(\theta)I_ri_{s2}}$$

3. On obtient le couple en dérivant l'énergie magnétique par rapport à l'angle repérant le rotor et ceci à courants fixés :
$$C(t)=\frac{\partial \mathrm{E}_{mag}}{\partial\theta}=\hat{M}\times[-\sin(\theta(t))]\times I_ri_{s1}(t)+\hat{M}I_ri_{s2}(t)\times[\cos(\theta(t))]$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{C(t)=\hat{M}I_r\left[\cos(\theta(t))i_{s2}(t)-\sin(\theta(t))i_{s1}(t)\right]}$$

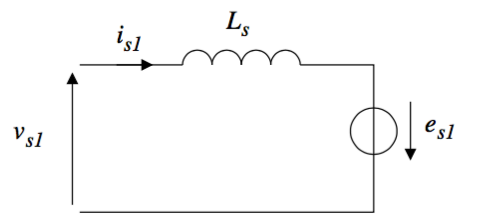
4. Étude électrique :

   (a) Avec $\theta(t)=\Omega t$ et les expressions proposées pour les courants statoriques, le couple magnétique prend la forme :
$$C(t)=\hat{M}I_r\hat{I}_s\left[\cos(\Omega t)\sin(\Omega t-\varphi)-\sin(\Omega t)\cos(\Omega t-\varphi)\right]=\hat{M}I_r\hat{I}_s\sin(-\varphi)$$

   C'est à dire : $C(t)=-\hat{M}I_r\hat{I}_s\sin(\varphi) \quad\Rightarrow\quad \boxed{C=-\hat{C}\sin(\varphi)}$.

   Le flux du champ rotorique à travers la phase B_1 du stator s'exprime à l'aide de l'inductance mutuelle selon $\Phi_{mut,1}=M_{1r}(t)I_r=\hat{M}\cos(\Omega t)I_r$, ce qui donne pour la fem de mutuelle inductance :
$$e_{s1}(t)=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{mut,1}}{\mathrm{d}t}=\Omega\hat{M}I_r\sin(\Omega t) \quad\Rightarrow\quad \boxed{e_{s1}(t)=\hat{E}_s\sin(\Omega t)}$$
   Avec la même méthode :
$$e_{s2}(t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\hat{M}I_r\sin(\Omega t)\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{e_{s2}(t)=-\hat{M}\Omega I_r\cos(\Omega t)}$$

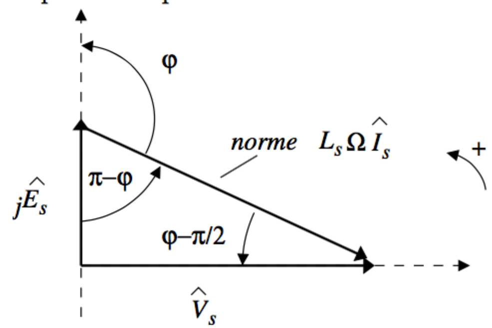
   (b) La phase (B_1) se compose d'une inductance propre et de la force électromotrice de mutuelle, cette phase étant alimentée par la tension v_{s1} :



   La loi des mailles s'écrit alors pour les grandeurs complexes :
$$\underline{V}_{s1}=jL_s\Omega\underline{I}_{s1}-\underline{E}_{s1},$$
   Les amplitudes complexes s'obtiennent à partir des grandeurs réelles :
   — $v_{s1}(t)=\hat{V}_s\cos(\Omega t) \quad\Rightarrow\quad \underline{V}_{s1}=\hat{V}_s$;
   — $i_{s1}(t)=\hat{I}_s\cos(\Omega t-\varphi) \quad\Rightarrow\quad \underline{I}_{s1}=\hat{I}_se^{-j\varphi}$;
   — $e_{s1}(t)=\hat{E}_s\cos(\Omega t-\pi/2) \quad\Rightarrow\quad \underline{E}_{s1}=\hat{E}_se^{-j\pi/2}=-j\hat{E}_s$.

   La loi des mailles peut donc se réécrire :
$$\hat{V}_s=jL_s\Omega\hat{I}_se^{-j\varphi}+j\hat{E}_s=L_s\Omega\hat{I}_se^{j(\pi/2-\varphi)}+\hat{E}_se^{j\pi/2}$$

   Ce qui donne pour la représentation de Fresnel :



   Refermer le triangle (loi des mailles et relation de Chasles) impose de choisir un angle $\pi/2<\varphi<\pi$.

   (c) Dans le triangle rectangle, le théorème de Pythagore impose :
$$\boxed{L_s\Omega\hat{I}_s=\sqrt{\hat{E}_s^2+\hat{V}_s^2}}$$
   D'autre part, $\tan(\varphi-\pi/2)=\dfrac{\hat{E}_s}{\hat{V}_s} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\varphi=\dfrac{\pi}{2}+\arctan\left(\dfrac{\hat{E}_s}{\hat{V}_s}\right)}$.

5. L'équipage mobile en rotation à la vitesse angulaire Ω et soumis à un couple C reçoit une puissance mécanique :
$$P_m=C\Omega=-\hat{C}\Omega\sin(\varphi) \quad\Rightarrow\quad \boxed{P_m=-\hat{M}I_r\hat{I}_s\Omega\sin(\varphi)}$$
   D'après les expressions de la fem et de l'intensité dans la phase B_1 du sta-

tor, le déphasage absolu entre ces deux grandeurs est $\varphi - \pi/2$; en régime sinusoïdal, la force électromotrice fournit donc une puissance moyenne :

$$P_{fem1} = \frac{\hat{E}_s \hat{I}_s}{2} \cos(\pi/2 - \varphi) = \frac{\hat{M} I_r \Omega \hat{I}_s}{2} \sin\varphi$$

Il ne faut pas oublier de tenir compte de la seconde phase du stator, pour une puissance totale fournie :

$$P_{fem} = 2P_{fem1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{fem} = \hat{M} I_r \Omega \hat{I}_s \sin(\varphi)}$$

On constate que les deux puissances sont opposées, ce qui caractérise un couplage électromagnétique parfait en accord avec le fait qu'on a négligé les différents types de perte.

6. Application numérique :

$$\hat{I}_s = \frac{\sqrt{\hat{E}_s + \hat{V}_s}}{L_s \Omega} = \frac{\sqrt{(150\sqrt{2})^2 + (230\sqrt{2})^2}}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{I}_s = 38,8 \text{ A}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{150\sqrt{2}}{230\sqrt{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 123°}$$

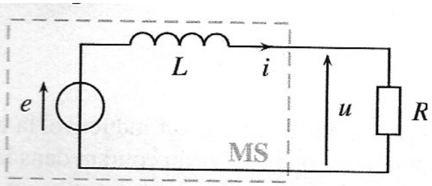
En l'absence de résistance, la puissance moyenne P fournie par le réseau diphasé est égale à la puissance moyenne reçue par les forces électromotrices et donc à l'opposé de la puissance fournie par les forces électromotrices :

$$P = -P_{fem} = -\hat{M} \Omega I_r \times \hat{I}_s \sin(\varphi) = -150\sqrt{2} \times 38,8 \times \sin(123)$$

$$\boxed{P = -6,9 \text{ kW}}$$

7. La machine fonctionne en **alternateur**. Un opérateur fournit un couple mécanique moteur qui entraîne le rotor, ce couple s'oppose au couple électromagnétique. La puissance du couple électromagnétique est négative, ce qui implique une puissance positive pour la puissance fournie par les fem des phases du stator, l'énergie électrique produite est fournie au réseau, comme l'indique le signe « - » de la puissance fournie par le réseau à la machine.

Exercice 2 : Couple d'entraînement d'un alternateur sur charge résistive

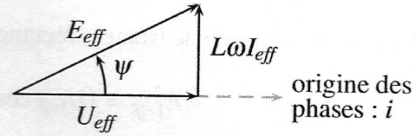


1. Le ferromagnétique doit être **doux** (pas de perte par hystérésis), **feuilleté** (pas de perte par courant de Foucault) et **non saturé**.

2. *Cf* ci-contre.

3. Le rotor tourne au synchronisme à 50 Hz :

$$n = 50 \text{ tour.s}^{-1} = 50 \frac{\text{tour}}{\frac{1}{60}\text{ min}} = 3{,}0.10^3 \text{ tour.min}^{-1}.$$



4. $e(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + u(t)$ donc, d'après le diagramme de Fresnel ci-contre :

$$E_{eff} = \sqrt{U_{eff}^2 + (L\omega I_{eff})^2} = 120 \text{ V}.$$

5. $M_0 = \dfrac{E_{eff}}{I_r \omega} = \dfrac{E_{eff}}{I_r 2\pi f} = 0{,}38$ H.

6. Loi d'Ohm aux bornes de la charge : $u(t) = Ri(t)$, donc $R = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff}} = 3{,}7\ \Omega$.

$P = \mathrm{Re}(\underline{Z}) I_{eff}^2 = R I_{eff}^2 = 3{,}3$ kW.

7. La puissance mécanique est convertie en puissance électromagnétique à travers l'entrefer :

$$\Gamma\omega = 2E_{eff} I_{eff} \cos\psi,$$

avec un 2 car la MS a deux phases statoriques et : $\tan\psi = \dfrac{L\omega I_{eff}}{U_{eff}}$. Alors $\psi = 0{,}41$ rad et :

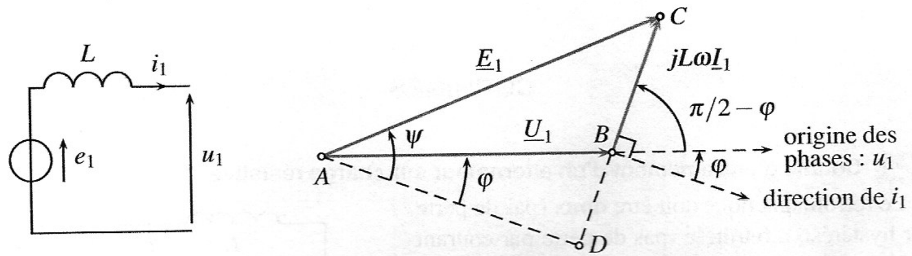
$$\Gamma = \frac{2E_{eff} I_{eff} \cos\psi}{\omega} = 21 \text{ N.m}.$$

On peut aussi écrire $\Gamma\omega = 2P = 2RI_{eff}^2$ (2 car deux phases identiques au stator), c'est-à-dire :

$$\Gamma = \frac{2P}{\omega} = 21 \text{ N.m}.$$

On passe de la première à la seconde formule avec $\cos\psi = \dfrac{U_{eff}}{E_{eff}} = \dfrac{RI_{eff}}{E_{eff}}$.

Exercice 3 : Couple d'entraînement d'un alternateur sur charge inductive



Attendu que la charge est inductive, la tension u_1 aux bornes de la charge est en avance par rapport à l'intensité i_1 du courant dans la charge.

2. On réalise l'addition vectorielle : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, et on en déduit que $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$:

$$E_{1eff}^2 = U_{1eff}^2 + (L\omega I_{1eff})^2 + 2U_{1eff} L\omega I_{1eff} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Autre méthode, dans le triangle rectangle ADC :

$$E_{1eff}^2 = (U_{1eff}\cos\varphi)^2 + (U_{1eff}\sin\varphi + L\omega I_{1eff})^2.$$

La puissance consommée dans la charge est $P_c = U_{1eff} I_{1eff} \cos\varphi$ dont on déduit l'intensité efficace $I_{1eff} = P_c / (U_{1eff}\cos\varphi) = 27{,}8$ A. Avec $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = 0{,}80$: $E_{eff} = 98{,}5$ V. Pour ψ, on projette e_1 et u_1 sur la direction de i_1 (distance AD) : $U_{1eff}\cos\varphi = E_{1eff}\cos\psi$ donc $\psi = 68{,}5°$.

Aussi, attendu que l'inductance ne consomme aucune puissance en moyenne, toute la puissance $E_{1eff} I_{1eff} \cos\psi$ délivrée par la f.é.m. vaut celle consommée par la charge $U_{1eff} I_{1eff} \cos\psi$; même résultat.

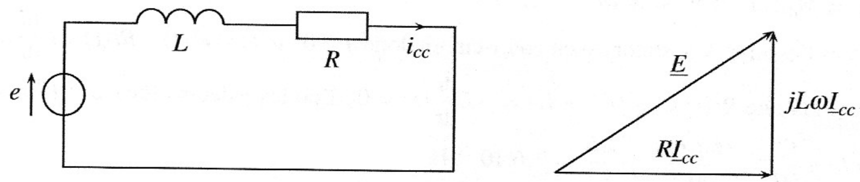
3. Les 2 phases de l'alternateur délivrent une puissance $2P_c$. Sans perte, le moment à appliquer au rotor est alors $\Gamma = \frac{2P_c}{\omega} = 6{,}4$ N.m.

Exercice 4 : Rendement d'un alternateur sur charge inductive

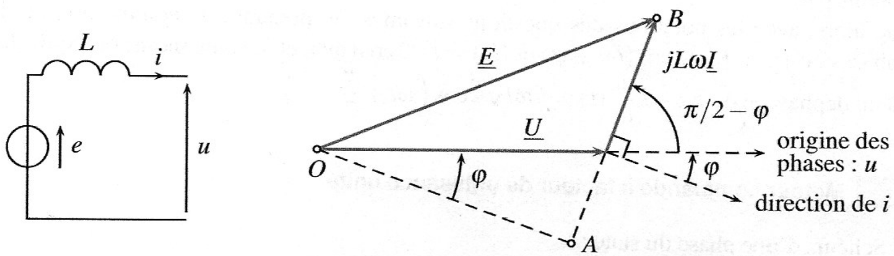
1. La valeur efficace E reste proportionnelle à I_e tant que le matériau ferromagnétique de la machine ne sature pas.

2. La puissance apparente a pour définition $S = UI$ donc $I = 6{,}5.10^3$ A.

3. En court-circuit, $e(t) = Ri_{cc}(t) + L\dfrac{di_{cc}}{dt}(t)$. Le diagramme de Fresnel qui représente la loi des mailles est ci-dessous, dont on déduit $E = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\, I_{cc}$ soit $kI_e = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\, 300 I_e$, $X = L\omega = 0{,}97\ \Omega$.



4. Sans résistance statorique :



5. Dans le triangle OAB, $E^2 = (U\cos\varphi)^2 + (U\sin\varphi + L\omega I)^2$; avec $E = kI_e = 12{,}76.10^3$ V et $U = 10.10^3$ V : $I = 4{,}83.10^3$ A.

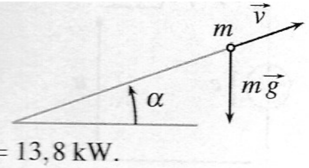
6. Attendu qu'il y a 2 phases, la puissance utile fournie au réseau vaut $P_{ut} = 2UI\cos(\varphi) = 86{,}9$ MW. Le rendement vaut :

$$r = \frac{P_{ut}}{P_{ut} + P_p + 2RI^2} \simeq 0{,}968.$$

En effet, P_p comprend les pertes fer, les pertes Joule rotoriques et les pertes mécaniques, il faut donc ajouter les pertes Joule statoriques égales à $2RI^2 = 0{,}467.10^6$ W.

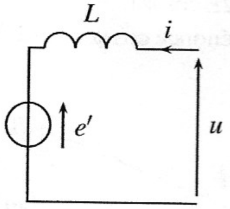
Pour aller plus loin sur la MS

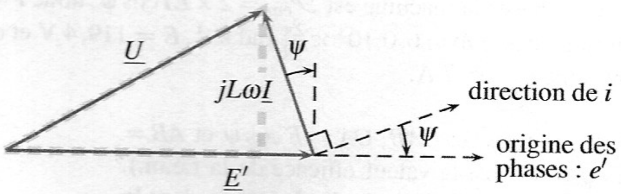
Exercice 5 : Traction d'un véhicule électrique par MS



1. La puissance du poids est $\mathscr{P}_p = m\vec{g}\cdot\vec{v} = -mgv\sin\alpha$. Pour une pente à 10 %, $\tan\alpha = 0,10$ et donc $\sin\alpha \simeq 0,10$. Avec $v = 50\times\frac{1000}{3600}$ m.s^{-1}, $\mathscr{P}_p = -10,8$ kW, que le moteur doit compenser. En ajoutant les frottements de l'air et les pertes mécaniques, la puissance totale que doit fournir le moteur est de $\mathscr{P}_m = 13,8$ kW.

2. En fonctionnement moteur, le moteur absorbe un courant ; la f.c.é.m. e' et i sont donc en convention récepteur.





3. La machine étant idéale, la puissance électromagnétique est totalement convertie en puissance mécanique, soit $\mathscr{P}_m = \mathscr{P}_{\text{em}} = 13,8$ kW. La puissance électromagnétique totale reçue par les 2 phases la machine est $\mathscr{P}_{\text{em}} = 2\times E'I\cos\psi$ (ψ est le déphasage entre e' et i), donc $I = \mathscr{P}_{\text{em}}/(2E'\cos\psi)$.
Pour une vitesse $\omega = 6{,}0.10^3\times\frac{2\pi}{60}$ rad.s^{-1}, $E' = 119,4$ V et d'après l'énoncé $\cos\psi = 1/2$. Il vient donc $I = 116$ A.

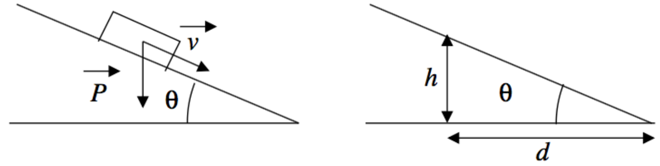
4. Le diagramme de Fresnel associé à la loi des mailles $u(t) = e'(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$, avec $\psi = -\frac{\pi}{3}$, est tracé ci-dessus. Dans le triangle rectangle en pointillés gris :

$$U^2 = \left(E' - L\omega I\sin|\psi|\right)^2 + \left(L\omega I\cos(\psi)\right)^2 \Rightarrow U = 61,1 \text{ V}.$$

5. Une partie de la puissance mécanique $\mathscr{P}_m = 13,8$ kW délivrée par le moteur est fournie à la charge mécanique sous forme de puissance utile égale à $\Gamma_{\text{ut}}\omega$, l'autre partie, $\mathscr{P}_f$, est perdue par frottement dans les transmissions mécaniques. Il vient donc $\mathscr{P}_m = \Gamma_{\text{ut}}\omega + \mathscr{P}_f$ et le rendement est $r = \Gamma_{\text{ut}}\omega/\mathscr{P}_m = 0,95$.

Exercice 6 : Freinage d'un véhicule par récupération

1. On commence par représenter un schéma de la situation :



La pente p vaut par définition : $p = \tan(\theta) = h/d$.
La puissance motrice associée au poids s'écrit :

$$\mathcal{P} = m\vec{g}.\vec{v} = mgv\sin(\theta) = mgv\frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}} = mgv\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$$

Pour un mouvement inertiel, la puissance motrice doit être compensée par la puissance des frottements et la puissance absorbée par l'alternateur de la machine synchrone :

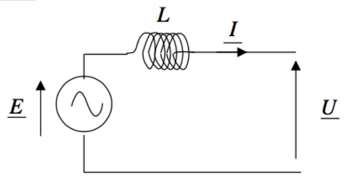
$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_f + \mathcal{P}_{sync.} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{P}_{sync.} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_f$$

Application numérique :

$$\mathcal{P}_{sync} = \frac{800\times 9,81\times 50/3,6\times 1/10}{\sqrt{1+1/10^2}} - 3000 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathcal{P}_{sync} = 7,9 \text{ kW}}$$

2. Étude électrique :

(a) Schéma électrique :



(b) La force électromotrice et l'intensité du courant étant déphasée de ψ, la puissance moyenne fournie s'écrit :

$$\mathcal{P}_{elec}^{1phase} = EI\cos(\psi)$$

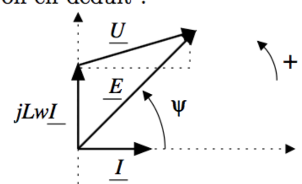
L'inductance propre n'absorbant pas d'énergie en moyenne, la puissance électrique est totalement disponible pour la charge. Comme il y a deux phases, on en déduit :

$$\boxed{\mathcal{P}_{elec} = 2EI\cos(\psi)}$$

Et donc pour l'intensité efficace :

$$I = \frac{\mathcal{P}_{elec}}{2E\cos(\psi)} = \frac{8000}{2\times 1,9\times 0,1\times 6000\times(2\pi/60)\times 1/2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{I = 67 \text{ A}}$$

(c) Prenons la référence de phase sur $\underline{I}$; la loi des mailles s'écrit : $\underline{E} = jL\omega\underline{I} + \underline{U}$, on en déduit :



En décomposant le vecteur associé à la tension $\underline{U}$ sur les deux axes (Pythagore), on obtient :

$$\boxed{U = \sqrt{(E\sin\psi - L\omega I)^2 + (E\cos\psi)^2}}$$

Application numérique :

$$E = 1,9 \times 0,1 \times 6000 \times 2\pi/60 \quad \Rightarrow \quad E = 119,4 \text{ V}$$

$$U = \sqrt{(119,4 \times \sqrt{3}/2 - 1,6 \times 10^{-3} \times 6000 \times 2\pi/60 \times 67)^2 + (119,4 \times 1/2)^2}$$

$$\boxed{U \approx 70 \text{ V}}$$

(d) La batterie doit être chargée sous une tension continue ; il s'agit de réaliser une conversion AC/DC avec un **redresseur**, puis d'effectuer un **filtrage** pour lisser au maximum la tension d'alimentation de la batterie.

Exercice 7 : Moteur asynchrone

1. En considérant le champ magnétique homogène sur la spire :

$$\Phi = \vec{B}.\vec{S} = BS\cos(\theta(t) - \varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi(t) = \Phi_0 \cos(\omega_r t + \theta_0)}$$

2. Pour la spire et en l'absence de générateur, l'équation électrique s'écrit :

$$0 = Ri - e = Ri + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi(t) + Li) \;\Rightarrow\; 0 = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \Phi_0\omega_r \sin(\omega_r t + \theta_0)$$

Comme on cherche la solution du régime forcé, il est intéressant d'utiliser les notations complexes pour cette équation linéaire à coefficients réels (attention à transformer le sinus en cosinus : $\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$) :

$$R\underline{i}(t) + jL\omega_r\underline{i}(t) = \Phi_0\omega_r e^{j\left(\omega_r t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}\right)} \;\Rightarrow\; \underline{i}(t) = \frac{\Phi_0\omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_r^2}} e^{j\left(\omega_r t + \theta_0 - \psi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

C'est à dire pour la grandeur réelle :

$$\boxed{i(t) = \frac{\Phi_0\omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_r^2}} \sin(\omega_r t + \theta_0 - \psi)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tan(\psi) = \frac{L\omega_r}{R}}$$

3. Le moment magnétique de la spire vaut $\vec{M} = i(t)S\vec{n}$, donc :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = i(t)S\vec{n} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma} = i(t)SB\sin(\theta(t) - \varphi(t))\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = i_0\Phi_0 \sin(\omega_r t + \theta_0)\sin(\omega_r t + \theta_0 - \psi)\vec{u}_z}$$

On calcule la valeur moyenne en linéarisant l'expression :

$$\vec{\Gamma} = \frac{i_0\Phi_0}{2}\left[\cos(\psi) - \cos(2\omega_r t + 2\theta_0 - \psi)\right]\vec{u}_z$$

En moyenne sur une période, seul le premier terme est non nul :

$$\vec{\Gamma}_m = \frac{i_0\Phi_0}{2}\cos(\psi)\;\vec{u}_z$$

Sachant que $\cos(\psi) = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_r^2}}$ et en utilisant l'expression de i_0, on en déduit :

$$\vec{\Gamma}_m = \frac{\Phi_0\omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_r^2}}\frac{\Phi_0}{2}\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_r^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Gamma}_m = \frac{\Phi_0^2 R(\omega_0 - \omega)}{2\left[R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2\right]}\vec{u}_z}$$

4. $\forall \omega \in [0, \omega_0]$, $\Gamma_m \geq 0$, le dispositif est **moteur**.

On constate que $\Gamma_m(\omega = \omega_0) = 0$ et $\Gamma_m(\omega = 0) = \Phi_0^2 R\omega_0 / \left[2\left(R^2 + L^2\omega_0^2\right)\right]$.

En divisant les deux membres de la fraction par $R(\omega_0 - \omega)$, le couple peut s'écrire :

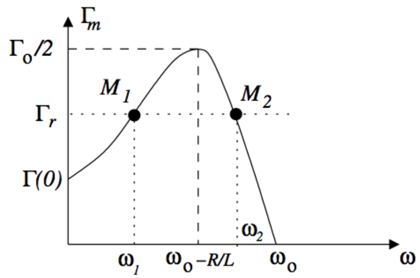
$$\omega \neq \omega_0 \quad \Gamma_m = \frac{\Gamma_0}{\dfrac{R}{L(\omega_0 - \omega)} + \dfrac{L(\omega_0 - \omega)}{R}}$$

Cette fonction est de la forme : $x \rightarrow \dfrac{1}{x + 1/x}$, elle est maximale lorsque le dénominateur est minimal, ce qui revient à chercher :

$$(x + 1/x)' = 1 - 1/x^2 = 0 \quad \text{donc} \quad x^2 = 1 \quad \text{avec} \quad x > 0$$

Le couple est maximal pour $\omega = \omega_0 - R/L$ et vaut alors $\Gamma_m^{max} = \Gamma_0/2$.

Ce qui donne pour l'allure de la courbe :



5. Présence d'un couple résistant :

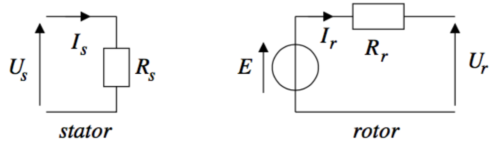
(a) Le couple résistant doit être inférieur au couple maximal : $\boxed{\Gamma_r < \Gamma_0/2}$. En régime permanent, le couple moteur doit compenser le couple résistant. Pour $0 < \Gamma_r < \Gamma_0/2$, on constate qu'il existe en général deux points M_1 et M_2 de fonctionnement.

(b) Le point M_1 est instable. En effet si, pour une cause quelconque, la spire ralentit ($\omega < \omega_1$), le couple moteur diminue, ce qui accentue le ralentissement de la spire jusqu'à l'arrêt complet.
Le point M_2 est stable. Si, pour une cause quelconque, la spire ralentit ($\omega < \omega_2$), le couple moteur augmente, ce qui permet à la spire d'accélérer pour retrouver sa vitesse de rotation ω_2.

Machine à courant continu

CP037. Génératrice à excitation indépendante (**)

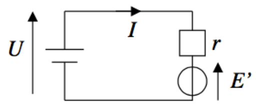
1. On se place en régime permanent de fonctionnement, les inductances propres des enroulements ne jouent aucun rôle.
   Il n'y a pas de phénomènes d'induction au stator (inducteur), le schéma électrique se limite à l'association série d'un générateur et de la résistance des enroulements.
   L'induit (rotor) se caractérise par la présence d'une force électromotrice et d'une résistance.



2. La puissance mécanique fournie est le produit du couple mécanique de l'opérateur par la vitesse angulaire :
$$P_{meca} = \Gamma_{meca} \times \Omega = 11,2 \times \frac{1500 \times 2\pi}{60} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{meca} = 1,76 \text{ kW}}$$
3. Au stator, la puissance est dissipée dans la résistance :
$$P_{cons} = U_s \times I_s = 220 \times 0,26 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{cons} = 57 \text{ W}}$$
4. La puissance utile est le produit de la tension en sortie de l'induit U_r par l'intensité du courant débitée :
$$P_u = U_r I_r = 220 \times 6,8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_u = 1,5 \text{ kW}}$$
5. Le rendement est le rapport de la puissance utile P_u sur la somme des puissances fournies, la puissance mécanique et la puissance électrique de l'inducteur :
$$\eta = \frac{P_u}{P_{cons} + P_{meca}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = 82\%}$$

CP038. Moteur de rétroviseur (**)

1. On commence par représenter le schéma électrique équivalent de l'induit en régime permanent :



   La loi des mailles s'écrit :
$$U = rI + E' \quad \Leftrightarrow \quad E' = U - rI = 12 - 3,5 \times 0,2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E' = 11,3 \text{ V}}$$
   Compte tenu de la relation de proportionnalité entre la force contre-électromotrice et la vitesse de rotation, on en déduit :
$$\boxed{n = 11,3 \times 10^3 \text{ tr/min}}$$
2. Si on inverse le branchement du moteur, le courant circule en sens opposé dans les enroulements du rotor.
   Pour un même champ inducteur au stator, le couple électromoteur s'inverse et **le moteur tourne en sens opposé**. On accède ainsi aux deux sens de rotation possible du rétroviseur.
3. Puissance absorbée : c'est la puissance délivrée par le générateur :
$$P_{abs} = U \times I = 12 \times 0,83 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{abs} = 9,96 \text{ W}}$$
   Les pertes Joule sont dissipées dans la résistance :
$$P_J = rI^2 = 3,5 \times 0,83^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_J = 2,41 \text{ W}}$$
   La puissance utile est la puissance absorbée par la force contre-électromotrice :
$$P_u = E' \times I = (U - rI) \times I = (12 - 3,5 \times 0,83) \times 0,83 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_u = 7,55 \text{ W}}$$
   La vitesse de rotation s'obtient à partir de la valeur de la force contre électromotrice :
$$E' = U - rI = 12 - 3,5 \times 0,83 = 9,1 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 9,1 \times 10^3 \text{ tr/min}}$$
   La puissance électromagnétique est la puissance absorbée par la force contre-électromotrice :
$$\boxed{P_{em} = P_u = 7,55 \text{ W}}$$
   Le couple électromagnétique est le couple maximal si toute la puissance électromagnétique reçue était disponible (conversion sans perte) :
$$\Gamma_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = \frac{7,55}{9,1 \times 10^3 \times 2\pi/60} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma_{em} = 7,92 \text{ mN} \cdot \text{m}}$$
   Le couple utile est le couple mécanique réellement disponible compte tenu des pertes dans le fer et par frottement :
$$\Gamma_u = \frac{P_{em} - P_{col}}{\Omega} = \frac{7,55 - 1,6}{9,1 \times 10^3 \times 2\pi/60} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma_u = 6,24 \text{ mN} \cdot \text{m}}$$

CP039. Étude de deux machines couplées (**)

1. En régime permanent, l'induit du moteur est équivalent à l'association série d'une résistance et d'une force contre-électromotrice, ce qui donne pour la loi des mailles :
$$\boxed{E = RI + E'_1}$$
   La génératrice est équivalente à l'association série d'une résistance et d'une force électromotrice :
$$\boxed{E_2 = RI' + R_c I'}$$

En régime permanent, le couple électromoteur du moteur doit équilibrer le couple électromoteur résistant de la génératrice et le couple de frottement fluide :

$$\boxed{\Gamma_{em,M} = \Gamma_{em,G} + f\Omega}$$

2. Pour le moteur à courant continu : $\Gamma_{em,M} = \Phi_0 I$ et $E'_1 = \Phi_0\Omega$.
   Pour la génératrice, $\Gamma_{em,G} = \Phi_0 I'$ et $E_2 = \Phi_0\Omega$.

   En couplant ces relations aux équations électriques et en les reportant dans l'équation mécanique, on obtient :
$$\Phi_0 I = \Phi_0 I' + f\Omega \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_0\left(\frac{E - \Phi_0\Omega}{R}\right) = \Phi_0 \times \frac{\Phi_0\Omega}{R + R_c} + f\Omega$$
   On en déduit :
$$\boxed{\Omega = \frac{\Phi_0 E/R}{f + \Phi_0^2\left[1/R + 1/(R + R_c)\right]}}$$

3. <u>Application numérique</u> :
$$\Omega = \frac{100}{0,01 + 1 \times (1/1 + 1/11)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega \approx 91 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$
   Ce qui donne pour les intensités électriques :
$$I = \frac{E - \Phi_0\Omega}{R} = \frac{100 - 90,8}{1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 9,2 \text{ A}}$$
$$I' = \frac{\Phi_0\Omega}{R + R_c} = \frac{1 \times 90,8}{11} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I' = 8,3 \text{ A}}$$
   Et enfin pour la tension électrique :
$$U' = R_c I' = 10 \times 8,25 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U' = 83 \text{ V}}$$

4. On commence par multiplier l'équation électrique pour le premier circuit par I et on remplace successivement selon :
$$P = E \times I = RI^2 + E'_1 I = RI^2 + \Phi_0\Omega \times I = RI^2 + \Phi_0 I \times \Omega$$
   On utilise alors l'égalité des couples :
$$P = RI^2 + (\Phi_0 I' + f\Omega) \times \Omega = RI^2 + (\Phi_0\Omega) \times I' + f\Omega^2$$
   Et finalement la loi des mailles sur le second circuit :
$$P = RI^2 + (RI' + R_c I') \times I' + f\Omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{EI = RI^2 + f\Omega^2 + RI'^2 + R_c I'^2}$$

   Le générateur apporte la puissance EI, une partie est dissipée par effet Joule dans R, le reste est absorbée par le force contre-électromotrice ; cette puissance est alors, *via* l'arbre moteur et la conversion électromécanique, transmise à la génératrice (aux pertes mécaniques $f\Omega^2$ près) ; la puissance de la génératrice se répartit alors sur les deux résistances.