

## Centrale PSI 2015 – MCC (moteur à courant continu)

L'objectif EF 50 mm 1:1.8 II, commercialisé fin 1990, possède un micromoteur à courant continu à aimants permanents.

### II.A – Principe d'une machine à courant continu à charge constante

Le rotor est constitué d'un noyau de fer doux, cylindrique, sur lequel sont enroulées  $N$  spires. Chaque spire, représentée sur la **figure 2**, est rectangulaire, de longueur  $b$  suivant l'axe ( $Oz$ ) vertical ascendant et de largeur  $a$ , et est enroulée sur le noyau parallèlement dans un de ses plans de symétrie. Les  $N$  spires sont réparties uniformément sur le périmètre du noyau. L'ensemble {noyau + spires} constitue le rotor. Chaque spire, de résistance  $R_e$ , est reliée à un générateur de tension continue  $U$  par l'intermédiaire de deux électrodes  $A$  et  $C$  et est parcourue par un courant d'intensité  $i$  constante. La position du rotor est repérée par l'angle  $\theta$  de la base ortho normale directe cylindrique ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ ). On notera  $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$  la vitesse angulaire de rotation du rotor et  $J$  son moment d'inertie par rapport à ( $Oz$ ). Le rotor est placé dans le champ magnétique stationnaire produit par les aimants permanents constituant le stator. On admettra que, dans le volume situé entre le stator et le noyau du rotor, ce champ est radial et de la forme  $\vec{B} = B_0 \cos \theta \vec{e}_r$  (avec  $B_0 > 0$ ). Le fer doux sera assimilé à un matériau magnétique linéaire, de perméabilité magnétique  $\mu = \mu_r \mu_0$ . On négligera tout phénomène d'autoinduction. Le couplage électromécanique est parfait.

On suppose que le rotor entraîne une charge dont le couple résistant est  $\vec{\Gamma}_R = -\Gamma_R \vec{e}_z$  où  $\Gamma_R$  est une constante positive. À l'instant  $t = 0$ , on a  $\theta(t = 0) = 0$  et  $\Omega(t = 0) = 0$ .

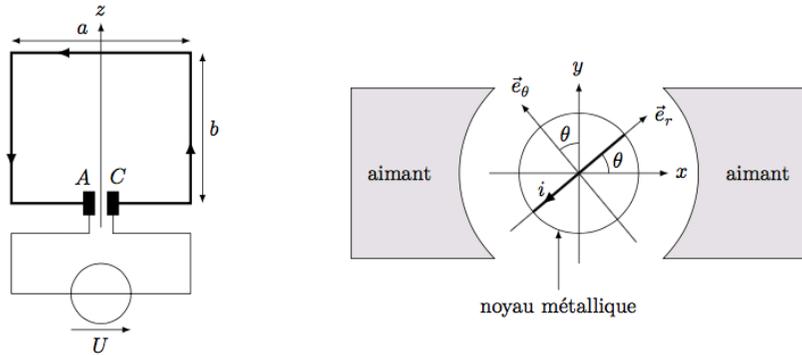


Figure 2

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction  $f$  continue et positive sur un intervalle  $[a, b]$  est  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

**II.A.1)** Dans un premier temps, on néglige les propriétés magnétiques du fer doux qui est alors assimilé à un milieu non magnétique.

Déterminer, en moyenne sur un tour, le moment par rapport à l'axe ( $Oz$ ) du couple électromagnétique subi par le rotor, noté  $\Gamma_{em}$ .

**II.A.2)** En fait, un système permet la commutation de  $A$  et  $C$  à chaque demi-tour du rotor, si bien que le courant  $i$  circule toujours dans le même sens. Quel est ce système ?

Pour quelles valeurs de  $\theta$  y a-t-il inversion du sens du courant parcourant une spire ?

Montrer alors qu'on a  $\Gamma_{em} = K_0 i$  où  $K_0$  est une constante à déterminer en fonction de  $a, b, N$  et  $B_0$ . Quelle est la dimension de  $K_0$  ?

**II.A.3)** Désormais on prend en compte les propriétés magnétiques du fer doux, qui sera assimilé à un milieu magnétique linéaire de perméabilité magnétique  $\mu = \mu_r \mu_0$  (avec  $\mu_r > 1$ ). À l'intérieur du noyau, le champ magnétique  $\vec{B}_s$  créé par le stator est approximativement uniforme et est orienté selon  $\vec{e}_x$ ; on a ainsi  $\vec{B}_s = B_s \vec{e}_x$  où  $B_s > 0$ .

Justifier que les courants rotoriques, parcourant les spires du rotor, induisent dans le noyau un moment magnétique  $\vec{M}_r$  orienté selon l'axe ( $Oy$ ). En préciser le sens. Justifier que ce moment magnétique est proportionnel à l'intensité  $i$  du courant dans une spire du rotor. En déduire le couple électromagnétique subi par le rotor, noté  $\Gamma'_{em}$  et montrer qu'il est proportionnel à  $i$ .

On pose  $\Gamma'_{em} = K i$ . Comparer les ordres de grandeur de  $K$  et de  $K_0$ .

**II.A.4)** Déterminer la force contre-électromotrice moyenne  $e$  induite dans le rotor en fonction de  $K$  et  $\Omega$ .

**II.A.5)** Déterminer, en fonction de  $K, R_e$  et  $U$ , l'expression littérale de la caractéristique  $\Omega = f(\Gamma'_{em})$  en régime permanent de fonctionnement et à tension d'induit  $U$  constante.

**II.A.6)** Déterminer la loi d'évolution  $\Omega(t)$  pour  $t \geq 0$ . Faire de même pour la loi  $\theta(t)$ . On posera  $\tau = \frac{R_e J}{K^2}$  et  $\Omega_{lim} = \frac{U}{K} - \frac{R_e \Gamma_R}{K^2}$ .

**II.A.7)** À la date  $t = t_0$ , un système d'asservissement vient annuler le courant :  $i(t = t_0) = 0$ , de façon à ce que le moteur puisse s'arrêter. Déterminer les lois d'évolution  $\Omega(t)$  et  $\theta(t)$  pour  $t \geq t_0$ .

**II.A.8)** Pour faire la mise au point, le rotor initialement immobile doit tourner d'un angle  $\theta_{mp}$ . À la date  $t_{mp}$ ,  $\theta(t = t_{mp}) = \theta_{mp}$  et le rotor est à l'arrêt. Exprimer  $\theta_{mp}$  et la durée de mise au point  $t_{mp}$  en fonction de  $\Gamma_R, J, t_0, \tau$  et  $\Omega_{lim}$ .

### II.B – Application au moteur à courant continu DN12M de la marque Canon®

**II.B.1)** En vous aidant de la **figure 3**, déterminer  $K$  et  $R_e$  pour le moteur mentionné ci-dessus.

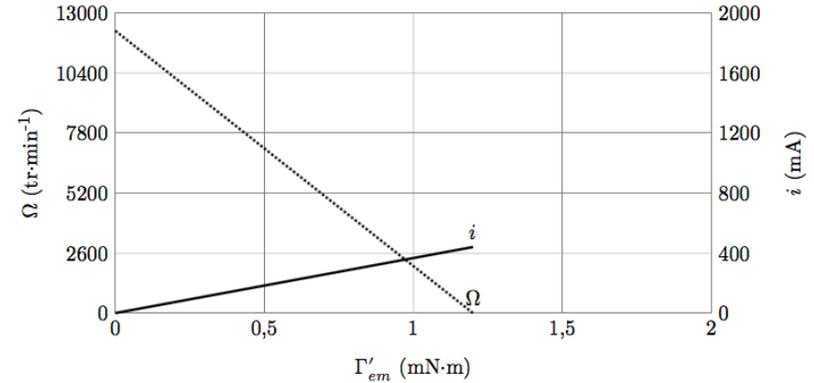


Figure 3 Caractéristiques ( $\Omega, \Gamma'_{em}$ ) et ( $i, \Gamma'_{em}$ ) en régime permanent à tension d'induit  $U$  constante

**II.B.2)** Toujours en vous aidant de la **figure 3**, déterminer le couple de démarrage  $\Gamma_D$  du moteur.

**II.B.3)** On donne  $J = 0,24 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ . Calculer  $U$  et  $\tau$ .

**II.B.4)** Dans les conditions où  $\frac{\Gamma_R}{\Gamma_D} = 0,5$  et  $U = 3,1 \text{ V}$ , déterminer  $\Omega_{lim}$  puis la puissance du moteur en régime permanent.

**II.B.5)** Pour une durée de mise au point  $t_{mp}$  de l'ordre de 100 ms (ordre de grandeur du temps de réponse d'un micromoteur à courant continu associé à un réducteur de vitesse installé dans un objectif Canon®), quel angle  $\theta_{mp}$  peut-on espérer ?

## E3A 2023 PSI - MCC

### Préliminaires - Étude d'une machine à courant continu en travaux pratiques

L'objectif de cette partie préliminaire est d'exploiter les résultats obtenus au cours de deux manipulations classiques réalisées en travaux pratiques afin de déterminer certaines caractéristiques d'une machine à courant continu (MCC) pédagogique.

Un moteur à excitation séparée est alimenté par deux générateurs dont l'intensité du courant inducteur est notée  $I_e$ . L'induit est soumis à la tension  $U$ ; il est parcouru par un courant d'intensité  $I$  représenté sur la **figure 1**.

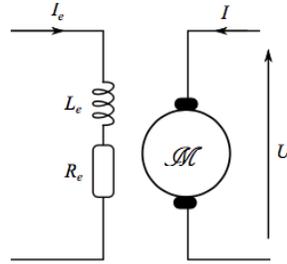


FIGURE 1 – Moteur d'entraînement

Le bobinage induit du moteur présente une résistance  $R$  et un coefficient d'auto-induction  $L$ .

- Q1.** Schémas à l'appui, décrire en dix lignes maximum les différentes parties d'une machine à courant continu (rotor et stator, induit et inducteur, type de courant circulant dans chacun, rôle du système {collecteur + balais}).
- Q2.** Donner le schéma électrique équivalent de l'induit en régime stationnaire de fonctionnement moteur (on notera  $E'$  la force contre-électromotrice) et en régime de fonctionnement générateur (on notera  $E$  la force électromotrice). Tous les dipôles devront être correctement orientés.
- Q3.** En appelant  $\phi$  la constante électromécanique de la machine, rappeler les deux équations liant  $E$  (ou  $E'$ ), la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$ , le couple électromagnétique  $\Gamma_{em}$  et l'intensité du courant d'induit  $I$ .

Le dispositif étudié en travaux pratiques est le suivant. Deux machines à courant continu réversibles sont couplées par le même arbre. L'une peut fonctionner en moteur et l'autre en génératrice (cf. **figure 2**).

Les plaques signalétiques des deux machines présentent les indications suivantes :

	MCC1	MCC2
$n$ (en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ ) : .....	$1,5 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^3$
$\mathcal{P}$ (en kW) : .....	3,0	3,0
<b>Inducteur</b> : .....	220 V - 0,5 A	220 V - 0,62 A
<b>Induit</b> : .....	220 V - 15 A	220 V - 13,6 A

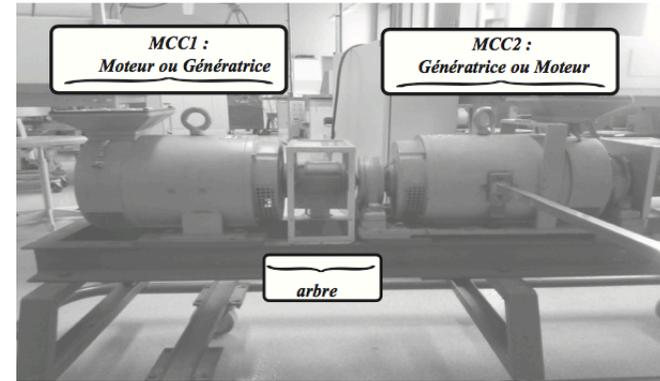


FIGURE 2 – Banc moteur

Deux expériences sont réalisées.

- **Expérience 1 :** MCC2 non alimentée. Seul l'inducteur de la MCC1 est alimenté par une alimentation stabilisée.  $U_e$  est la tension aux bornes de l'inducteur. On relève :  $U_e = (2,3 \cdot 10^2 \pm 0,1 \cdot 10^2)$  V et  $I_e = (0,5 \pm 0,1)$  A.
- **Expérience 2 :**
  - \* MCC2 fonctionne en moteur et impose une vitesse de rotation à l'arbre  $\Omega$  (ou  $n$ ) dont on fait varier la valeur.
  - \* Les circuits inducteurs de MCC1 et MCC2 sont alimentés dans les conditions nominales de fonctionnement par deux alimentations stabilisées.
  - \* MCC1 fonctionne en génératrice. L'induit de cette dernière est connecté aux bornes d'un voltmètre que l'on considérera idéal.
  - \* La vitesse de rotation est pilotée par la tension d'induit appliquée au circuit d'induit de la MCC2.
  - \* La vitesse de rotation de l'arbre est mesurée à l'aide d'un tachymètre affichant la vitesse angulaire  $n$  en  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$  (tours par minute).

$U$  désigne la tension affichée par le voltmètre. Les relevés obtenus sont :

$n$ (en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ )	257	334	550	706	849	1004	1111	1240	1476	1601
$U$ (en V)	41	63	88	112	135	160	177	197	235	255

- Q4.** À quelle grandeur caractéristique de la MCC1 la première expérience permet-elle d'avoir accès? Préciser sa valeur.

On propose une partie des lignes de code permettant le traitement numérique des résultats de l'expérience 2.

```

1 from math import pi
2 from scipy import stats
3 import numpy as np
4
5 n = np.array([334., 550., 706., 849., 1004., 1111., 1240., 1476.])
6 omega = 2 * pi / 60 * n
7 U = np.array([63., 88., 112., 135., 160., 177., 197., 235.])
8
9 pente, ordonnee, r, p, d = stats.linregress(omega, U)

```

La fonction `linregress(omega, U)` retourne un 5-uplet contenant en particulier la valeur du coefficient directeur de la régression linéaire  $U = f(\Omega)$  ainsi que le coefficient de détermination  $r^2$ . Il a été obtenu :

coefficient directeur :  $p = 1,49$  et  $r^2 = 0,998$ .

**Q5.** À quelle grandeur caractéristique de la MCC1 la deuxième expérience permet-elle d'avoir accès? Vous exposerez clairement le raisonnement suivi. Donner la valeur de cette grandeur physique et son unité.

## Partie I - Le minerai d'uranium

### I.1 - Extraction

La mine d'uranium d'Imouraren est un gisement d'uranium à faible teneur que la compagnie Orano (ex-Areva) a eu le projet d'exploiter avec une mine à ciel ouvert se situant entre le Sahel africain et le désert du Sahara, à l'ouest du massif de l'Air. En 2009, le site d'Imouraren est considéré par Areva, comme l'un des gisements uranifères les plus importants au monde. L'entreprise estime que le site contient 275 000 tonnes de minerai en terre et vise une production de 5 000 tonnes d'uranium pendant 35 ans.



FIGURE 3 – Le site d'Imouraren

### Acheminement du minerai

Le dispositif d'acheminement du minerai d'uranium est schématisé sur la **figure 4**. Des roches sont contenues dans un réservoir suspendu au-dessus du tapis et déversées par un conduit vertical sur le tapis. On considérera que lorsque les roches entrent en contact avec le tapis, la composante de leur vitesse colinéaire à  $\vec{u}_x$  dans le référentiel lié au sol, supposé galiléen, est négligeable.

**Q6.** Le dispositif est conçu pour acheminer  $\dot{m}_j = 25$  tonnes de roches par jour; il fonctionne en continu. Évaluer le débit massique moyen  $D_m$  d'arrivée des roches sur le tapis exprimé en  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Lorsqu'elles arrivent sur le tapis, les roches acquièrent la même vitesse que le tapis qui les achemine ainsi, jusqu'à l'extrémité droite du tapis où elles quittent le tapis animées de la vitesse  $\vec{v} = v \vec{u}_x$ . On suppose toujours le régime d'écoulement des roches permanent.

On note  $\vec{F} = F \vec{u}_x$  la composante selon l'axe  $(O, \vec{u}_x)$  de l'action des roches sur le tapis.

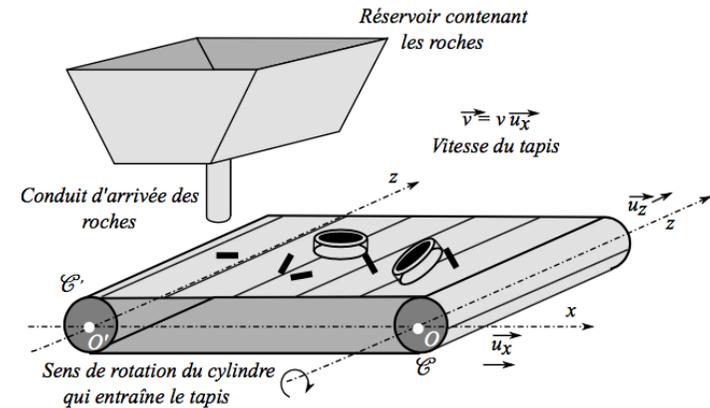


FIGURE 4 – Dispositif d'acheminement des roches

**Q7.** Déterminer  $F$  en fonction de  $D_m$  et  $v$ . On effectuera un bilan de quantité de mouvement en projection sur  $\vec{u}_x$  sur le système compris dans le volume de contrôle formé par le lieu d'occupation des roches en contact avec le tapis. Ce volume de contrôle est fixe dans le référentiel lié au sol. Il reçoit de la matière à l'extrémité du tapis située sous le réservoir et en éjecte à l'autre extrémité située à l'entrée d'un concasseur.

### I.2 - Vitesse de rotation du rotor du moteur

Le convoyeur de minerai est constitué d'un tapis (dont on négligera l'inertie) entraîné par un cylindre  $\mathcal{C}$  d'axe  $(O, \vec{u}_z)$  lié au rotor d'une machine à courant continu. Le moment d'inertie de l'ensemble  $\Sigma = \{\mathcal{C} + \text{rotor}\}$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  est noté  $J$ .

Un second cylindre  $\mathcal{C}'$  est en rotation libre, sans frottement, autour de l'axe  $(O', \vec{u}_z')$ . Les deux cylindres  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  ont le même rayon  $a$  et le moment d'inertie de  $\mathcal{C}'$  par rapport à  $(O', \vec{u}_z')$  est noté  $J'$ . Les vitesses de glissement du tapis par rapport à chaque cylindre sont nulles. On désigne par  $\Omega$  la vitesse angulaire de rotation des cylindres dans le sens indiqué sur la **figure 4**.

Le rotor du moteur et le cylindre  $\mathcal{C}$  tournent donc à la même vitesse angulaire  $\Omega$ . L'ensemble du dispositif mécanique produit, sur la partie tournante du moteur, un couple de frottement de moment  $-\lambda \Omega \vec{u}_z$ . La constante  $\lambda$  est positive.

L'objectif des trois questions suivantes est d'exprimer la vitesse angulaire de rotation  $\Omega_p$ , valeur de  $\Omega$  en régime permanent de fonctionnement, en fonction notamment de la tension d'alimentation de l'induit  $U$  et du débit  $D_m$  des roches.

**Q8.** À partir du schéma électrique du circuit d'induit, établir l'équation électrique ( $E_1$ ) du moteur qui relie  $U$ ,  $I$ ,  $\Omega_p$  et les paramètres utiles du problème en régime stationnaire.

**Q9.** En appliquant le théorème scalaire du moment cinétique en régime permanent de fonctionnement au système  $(\Sigma)$ , établir l'équation mécanique ( $E_2$ ) qui relie  $I$ ,  $\Omega_p$ ,  $D_m$ ,  $a$  et  $v$ .

**Q10.** Établir l'expression de  $\Omega_p$  en fonction de  $U$ ,  $D_m$ ,  $\phi$ ,  $R$ ,  $\lambda$  et  $a$ . Quelle est, dans ce modèle, l'influence du débit des roches sur la vitesse du tapis?

## Mesure de l'intensité du courant de l'induit du moteur à courant continu

On s'intéresse ici à une solution permettant la mesure de l'intensité du courant d'induit  $I$  à l'aide d'une résistance "shunt".

La **figure 5** donne le synoptique de la chaîne d'alimentation d'un moteur à courant continu (MCC). On s'intéresse à la mesure de la valeur moyenne  $I$  de l'intensité  $i(t)$  du courant électrique.

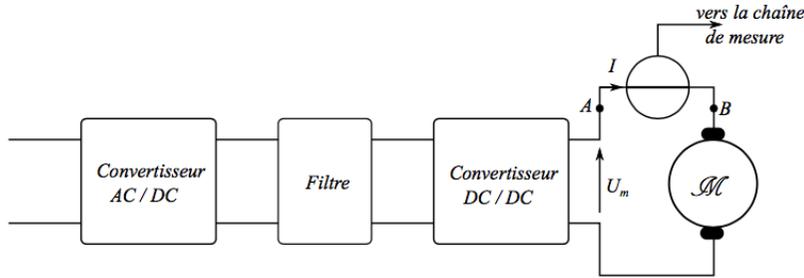


FIGURE 5 – Synoptique de la chaîne d'alimentation d'un moteur à courant continu

**Q11.** Donner un exemple de convertisseur AC/DC puis DC/DC. Quel est l'intérêt du convertisseur AC/DC dans la chaîne d'alimentation ? Comment justifier la présence du convertisseur DC/DC dans cette même chaîne d'alimentation ?

La mesure du courant  $I$  se fait à l'aide de la mesure de la différence de potentiel aux bornes d'une résistance  $R_{shunt}$ . La **figure 6** donne le schéma électrique relatif au filtrage et à l'amplification pour la mesure du courant.

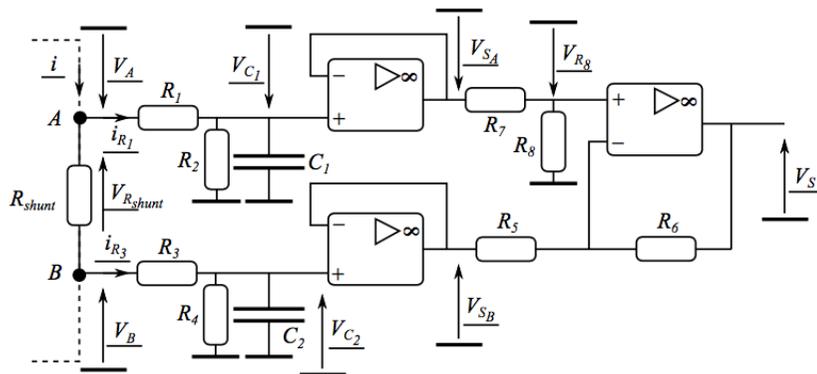


FIGURE 6 – Schéma de la mesure de courant par résistance shunt

On se place en régime sinusoïdal forcé. La représentation complexe est adoptée. Les différents ALI sont idéaux en régime linéaire.

**Q12.** Rappeler le modèle d'un ALI idéal en régime linéaire. Quel indice laisse à penser que le régime de fonctionnement des ALI est linéaire ?

**Q13.** Donner les expressions des amplitudes complexes  $\underline{V}_{C_1}$  et  $\underline{V}_{C_2}$  en fonction des amplitudes complexes  $\underline{V}_A$  et  $\underline{V}_B$  et des éléments passifs  $R_1, R_2, R_3, R_4, C_1$  et  $C_2$ .

**Q14.** Donner les expressions des amplitudes complexes  $\underline{V}_{S_A}$  et  $\underline{V}_{S_B}$  en fonction de  $\underline{V}_{C_1}$  et  $\underline{V}_{C_2}$ .

**Q15.** Donner l'expression de  $V_{R_8}$  en fonction de  $V_{S_A}, R_7$  et  $R_8$ .

**Q16.** Donner l'expression de  $\underline{V}_S$  en fonction de  $\underline{V}_{R_8}, \underline{V}_{S_B}, R_5$  et  $R_6$ .

**Q17.** On pose  $R_1 = R_3$  et  $R_2 = R_4$ . Poser une condition ou des conditions sur  $R_1, R_3, C_1, C_2, R_5, R_6, R_7$  et  $R_8$  pour que l'expression de  $\underline{V}_S$  se mette sous la forme :

$$\underline{V}_S(j\omega) = \frac{g_i}{1 + j\tau_i\omega} \underline{i}(j\omega) \quad \text{où } i(t) = \Re_e[\underline{i}(j\omega)]. \quad (1)$$

**Q18.** Donner les expressions de  $g_i$  et  $\tau_i$  en fonction des éléments passifs. Expliquer comment répondre à l'objectif posé.

Document 2 - Notations et valeurs numériques	
Conversion .....	$1,0 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Période radioactive associée au processus de fission (4) .....	$T_{1/2, \text{moy}} \sim 1 \cdot 10^4 \text{ s}$
Constante des gaz parfaits .....	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro .....	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Masse molaire de l'uranium .....	$M_{235\text{U}} = 235,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse volumique de l'eau liquide .....	$\rho_e = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide .....	$c_e = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
Conductivité thermique de l'argile .....	$\lambda_a = 1,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Masse volumique de l'argile .....	$\rho_a = 1,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Capacité thermique massique de l'argile .....	$c_a = 7 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

## CCINP 2022 PSI – MS (moteur synchrone)

### Partie VI - Machine synchrone

La machine synchrone est constituée d'un rotor en fer massif et d'un stator en fer feuilleté. Le rotor et le stator sont séparés d'un entrefer de très faible largeur. Ce circuit magnétique amplifie et canalise le champ magnétique.

Dans la machine diphasée, le stator se compose de deux enroulements décalés spatialement d'un angle de  $\frac{\pi}{2}$ .

On s'intéresse ici à un seul des deux enroulements du stator.

On a représenté, sur la **figure 7**, les lignes de champ magnétique  $\vec{B}$  créé par une spire du stator, de vecteur normal  $\vec{n}_1$ , parcourue par un courant  $i_1(t)$ . La spire est représentée en coupe par son conducteur " aller " et son conducteur " retour ".

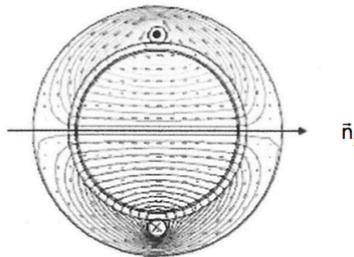


Figure 7 - Champ magnétique créé par une spire d'un enroulement du stator

**Q32.** La norme du champ magnétique est-elle uniforme dans le circuit magnétique ? Sinon, préciser les zones où le champ magnétique est le plus intense et est le moins intense.

L'air est assimilé magnétiquement à du vide de perméabilité magnétique  $\mu_0$ . Le fer est assimilé à un matériau magnétique linéaire homogène de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$ . On désigne par  $e$  la largeur de l'entrefer et  $L_{fer}$  la longueur moyenne d'une ligne de champ dans le fer. Par construction de la machine, on a  $\mu_r e \gg L_{fer}$ . La ligne de champ, de longueur  $L_{fer}$  dans le fer, est qualifiée de ligne de champ moyenne.

**Q33.** Pour la ligne de champ moyenne, on note  $H_{air}$  et  $H_{fer}$  les normes du champ d'excitation magnétique dans l'air (entrefer) et dans le fer. Ces normes sont supposées uniformes le long de cette ligne de champ. Par application du théorème d'Ampère, relier  $H_{air}$ ,  $H_{fer}$ ,  $e$ ,  $L_{fer}$  et  $i_1(t)$ .

Pour la ligne de champ moyenne, on note  $B_{air}$  et  $B_{fer}$  les normes du champ magnétique dans l'air (entrefer) et dans le fer. Par conservation du flux, on montre que  $B_{air}$  et  $B_{fer}$  sont très voisins. On assimile ces deux normes à une valeur commune notée  $B$ .

**Q34.** Déterminer l'expression de  $B$  en fonction de  $i_1(t)$ , de  $e$  et de  $\mu_0$ .

Par la suite, on considère que la norme du champ magnétique  $B$  est uniforme dans l'entrefer. On désigne par  $\vec{B}_{spire}(\theta, t) = B_{spire}(\theta, t)\vec{e}_r$ , le champ magnétique créé par cette spire en un point  $M$  de l'entrefer repéré (**figure 8**) par sa position  $\theta$ .

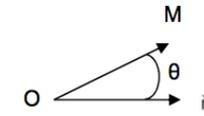


Figure 8 - Repérage de l'entrefer

**Q35.** Représenter graphiquement en fonction de  $\theta$ , l'allure de  $B_{spire}(\theta, t)$  pour  $i_1(t) > 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

L'enroulement considéré du stator, parcouru par le courant  $i_1(t)$ , n'est pas constitué d'une seule spire mais de trois spires décalées les unes des autres d'un angle  $\alpha$ , comme le montre la **figure 9**. Ces trois spires sont représentées en coupe par trois conducteurs " aller " et trois conducteurs " retour ".

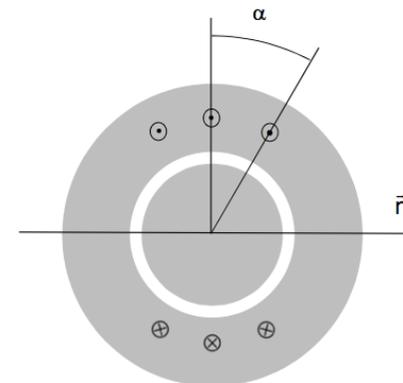


Figure 9 - Enroulement à trois spires décalées

On désigne par  $\vec{B}_1(\theta, t) = B_1(\theta, t)\vec{e}_r$ , le champ magnétique créé par l'enroulement du stator à trois spires décalées.

**Q36.** Représenter graphiquement, en fonction de  $\theta$ , l'allure de la fonction  $B_1(\theta, t)$  pour  $i_1(t) > 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . On prendra  $\alpha \approx \frac{\pi}{6}$ .

Dans la suite, on admettra que cet enroulement du stator crée dans l'entrefer un champ magnétique  $\vec{B}_1(\theta, t) = K i_1(t) \cos(\theta)\vec{e}_r$  et que le second enroulement, parcouru par un courant  $i_2(t)$ , crée dans l'entrefer un champ magnétique  $\vec{B}_2(\theta, t) = K i_2(t) \sin(\theta)\vec{e}_r$ .

Une alimentation électrique de pulsation  $\omega_s$  impose des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  de la forme :

$$\begin{cases} i_1(t) = I_{max} \cos(\omega_s t) \\ i_2(t) = I_{max} \sin(\omega_s t) \end{cases}$$

- Q37.** Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_s$  créé par le stator dans l'entrefer. On posera :  $B_{s0} = K I_{max}$ .  
Justifier que ce champ magnétique  $\vec{B}_s$  est un champ tournant à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  qu'on précisera.

Le rotor tourne à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ . Il possède une bobine comportant plusieurs spires bien réparties. Elle est alimentée par l'intermédiaire d'un contacteur tournant, relié à une source de courant continu  $I_R$ . Il crée un champ en un point M repéré par l'angle  $\theta$  dans l'entrefer :

$$\vec{B}_R(\theta, t) = K_R I_R \cos(\theta_R(t) - \theta) \vec{e}_r = B_{r0} \cos(\theta_R(t) - \theta) \vec{e}_r$$

où  $\theta_R(t)$  désigne la position du rotor. On a :  $\theta_R(t) = \Omega t + \theta_0$ .

- Q38.** Exprimer l'énergie magnétique  $W_m$  stockée dans l'entrefer à l'aide d'une intégrale qu'on ne demande pas d'intégrer et faisant intervenir  $\vec{B}_s$  et  $\vec{B}_R$ .

On admettra, en ne conservant que les termes qui varient le plus lentement avec le temps, que :

$$W_m = \frac{R_e L_e e}{2\mu_0} (\pi B_{s0}^2 + \pi B_{r0}^2 + 2\pi B_{r0} B_{s0} \cos(\omega_s t - \theta_R(t))).$$

- Q39.** Préciser l'unité du produit  $R_e L_e e$  et indiquer à quels paramètres du système correspondent chacun des deux termes :  $R_e$  et  $L_e$ .

On note  $\vec{\Gamma} = \Gamma_z(t) \vec{e}_z$ , le couple électromagnétique exercé sur le rotor. On rappelle que  $\Gamma_z(t) = \frac{\partial W_m}{\partial \theta_R}$ .

- Q40.** Préciser l'expression de  $\Gamma_z(t)$  en fonction de  $R_e$ ,  $L_e$ ,  $e$ ,  $\mu_0$ ,  $B_{r0}$ ,  $B_{s0}$ ,  $\Omega$ ,  $\omega_s$  et de  $\theta_0$ .

La machine synchrone peut fonctionner en moteur ou en alternateur.

- Q41.** On considère que  $\omega_s$  est fixé par le réseau électrique extérieur. À quelle condition sur  $\Omega$ , le couple moyen est-il non nul ? Comment appelle-t-on cette condition ? Préciser, en fonction de  $R_e$ ,  $L_e$ ,  $e$ ,  $\mu_0$ ,  $B_{r0}$ ,  $B_{s0}$ , et de  $\theta_0$ , l'expression de ce couple moyen.
- Q42.** On suppose que cette condition est respectée. À quelle condition sur  $\theta_0$  a-t-on un fonctionnement alternatif ? Un fonctionnement moteur stable ?

Unité de surface : 1 hectare =  $10^4$  m<sup>2</sup>

Formules trigonométriques :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

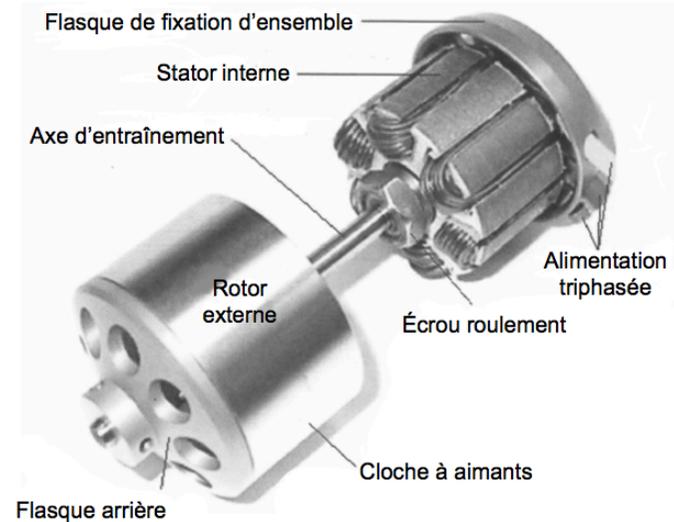
Perméabilité magnétique de l'air assimilé au vide :  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  H·m<sup>-1</sup>

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

### CCINP 2023 PSI – MS – Assistance électrique d'un vélo électrique

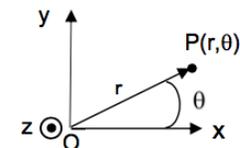
Nous nous proposons d'étudier ici un moteur pour Vélo à Assistance Électrique (VAE). Cette assistance ne doit pas trop alourdir le vélo et la vitesse de rotation doit être compatible avec des cadences de pédalage ordinaires. Les moteurs classiques tournent trop vite et ne développent pas assez de couple. Ils doivent alors être associés à un réducteur.

Un moteur synchrone inversé à plusieurs paires de pôles  $p$  permet de s'affranchir d'un réducteur. Il s'agit d'un moteur à rotor externe (figure 14). Le rotor a la forme d'une cloche à l'intérieur de laquelle soit est logée une bobine parcourue par un courant continu, soit sont logés des aimants permanents. Le stator interne, logé à l'intérieur de la cloche est bobiné. Il peut être diphasé ou triphasé. La répartition des conducteurs d'une machine triphasée est un peu différente de celle d'une machine diphasée.



**Figure 14** - moteur synchrone à rotor externe et alimentation triphasée pour VAE

L'espace est muni (figure 15) des bases cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . L'axe Oz coïncide avec l'axe de rotation du moteur.



**Figure 15** - Repérage d'un point P

Par la suite, on qualifiera " de conducteur aller d'une bobine ", un conducteur parcouru par un courant d'intensité  $I$  orienté suivant  $\vec{e}_z$ , et " de conducteur retour d'une bobine ", un conducteur parcouru par un courant d'intensité  $I$  orienté suivant  $-\vec{e}_z$ .

### Intérêt d'une machine inversée

Dans un moteur électrique, la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique peut s'expliquer par l'interaction du courant  $I$  circulant dans un conducteur du rotor, orienté suivant le vecteur  $\vec{e}_z$ , et du champ magnétique  $\vec{B}_s = B_s \vec{e}_r$  créé par le stator.

**Q25.** Exprimer, en fonction de  $I$ ,  $L$  et de  $B_s$ , l'expression de la force de Laplace  $\vec{F}_L$  qui s'exerce sur un conducteur aller de longueur  $L$  du rotor.

En notant  $R$  la distance entre les conducteurs du rotor et l'axe de rotation de la machine, déterminer, en fonction de  $R$ ,  $I$ ,  $L$  et de  $B_s$ , le moment  $\vec{M}$  de la force de Laplace qui s'exerce sur un conducteur aller du rotor.

**Q26.** Expliquer l'intérêt d'une machine inversée dans le cadre du VAE.

### Étude d'une machine dipolaire

On considère (figure 16) un circuit magnétique composé d'une spire d'axe horizontal  $Ox$ , d'un cylindre central et d'une couronne de refermeture des lignes de champ magnétique, tous deux élaborés à l'aide d'un matériau ferromagnétique et séparés par un entrefer d'épaisseur  $e$ .

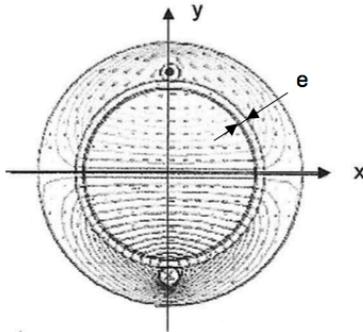


Figure 16 - Circuit magnétique

Un point  $P$  de l'entrefer est repéré par sa position angulaire  $\theta$  (figure 15).

On admettra que dans l'entrefer, le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par cette spire, parcourue par un courant positif, est de la forme  $\vec{B}_1 = B_1(\theta) \vec{e}_r$ , avec  $B_1(\theta) = B_0 > 0$  pour  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $B_1(\theta) = -B_0$  pour  $\theta \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ .

**Q27.** Dessiner en fonction de  $\theta$  la fonction  $B_1(\theta)$  pour  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  et proposer, à l'aide d'une figure, une répartition des conducteurs qui permette de créer un champ magnétique  $\vec{B}_3 = B_3(\theta) \vec{e}_r$ , décrit sur la figure 17.

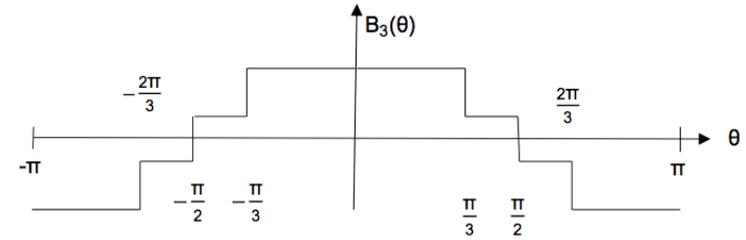


Figure 17 - Fonction  $B_3(\theta)$

En soignant la distribution des conducteurs, on admettra qu'on peut générer à l'aide d'une bobine (a) d'axe  $Ox$ , parcourue par un courant  $i_a(t)$ , un champ magnétique  $\vec{B}_{a,p=1} = K i_a(t) \cos(\theta) \vec{e}_r$  dans l'entrefer.

La machine synchrone inversée dipolaire est constituée :

- d'un stator interne qui comporte deux bobines similaires : la bobine (a) d'axe  $Ox$  parcourue par un courant  $i_a(t)$  et la bobine (b) décalée de  $\frac{\pi}{2}$  parcourue par un courant  $i_b(t)$ . Cette deuxième bobine génère un champ magnétique  $\vec{B}_{b,p=1} = K i_b(t) \sin(\theta) \vec{e}_r$  dans l'entrefer ;
- d'un rotor externe, repéré (figure 18) par sa position  $\theta_R$ , qui comporte une bobine parcourue par un courant continu  $I_R$ .

Par souci de lisibilité, seuls deux conducteurs par bobine ont été représentés sur la figure 18. Le circuit magnétique n'est pas représenté.

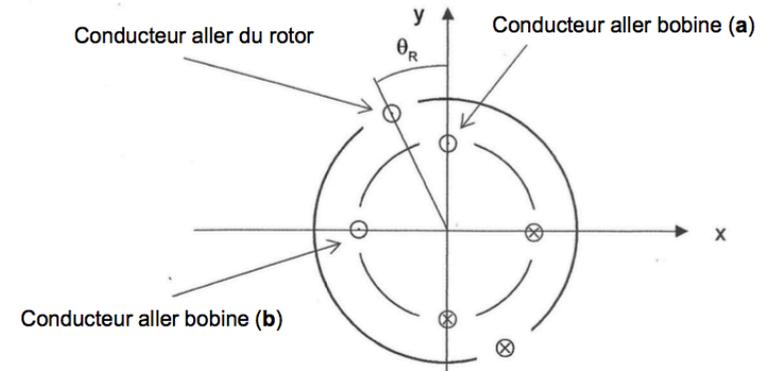


Figure 18 – Schéma en coupe des bobines de la machine

On note  $L_s$  les deux inductances propres des deux bobines du stator,  $M_{aR}$  la mutuelle-inductance entre la bobine (a) du stator et la bobine du rotor. On admettra que  $M_{aR} = M_0 \cos(\theta_R)$ .

De même, on note  $L_R$  l'inductance propre du rotor et  $M_{bR}$  la mutuelle-inductance entre la bobine (b) du stator et la bobine du rotor.

La mutuelle-inductance entre les deux bobines du stator est notée  $M_{ab}$ .

On alimente les deux bobines du stator de la machine par deux alimentations qui délivrent respectivement les courants :  $i_a(t) = I_{\text{Seff}}\sqrt{2} \cos(\omega_s t)$  et  $i_b(t) = I_{\text{Seff}}\sqrt{2} \sin(\omega_s t)$ .

**Q28.** Déterminer, en fonction de  $K$ ,  $I_{\text{Seff}}$ ,  $\omega_s$ ,  $\theta$  et de  $t$ , l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_{p=1}$  créé dans l'entrefer par les deux bobines du stator. Justifier qu'il s'agit d'un champ tournant et préciser sa vitesse et son sens de rotation.

**Q29.** Proposer en fonction de  $M_0$  et de  $\theta_R$  l'expression de la mutuelle-inductance  $M_{bR}$ . Que vaut la mutuelle-inductance  $M_{ab}$  ?

**Q30. a)** Exprimer, en fonction de  $L_S$ ,  $L_R$ ,  $M_0$ ,  $\theta_R$ ,  $I_R$  et des courants  $i_a(t)$  et  $i_b(t)$ , l'énergie magnétique notée  $W_{\text{magn}}$  stockée dans la machine.

**b)** Exprimer le couple électromagnétique  $\Gamma_{\text{em}}$  en fonction de  $M_0$ ,  $I_{\text{Seff}}$ ,  $\omega_s$ ,  $\theta_R$ ,  $I_R$  et de  $t$ . On rappelle que le couple électromagnétique exercé par la machine est donné par l'expression :

$$\vec{\Gamma}_{\text{em}} = \Gamma_{\text{em}} \vec{e}_z = \left( \frac{\partial W_{\text{magn}}}{\partial \theta_R} \right) \vec{e}_z .$$

**Q31.** On considère ici que le rotor tourne à la vitesse angulaire constante  $\Omega$ , de sorte que  $\theta_R(t) = \Omega t + \theta_0$ . Écrire la condition de synchronisme, qui définit la valeur particulière de  $\Omega$ , notée  $\Omega_1$ , pour laquelle le couple électromagnétique moyen délivré par la machine est non nul. Exprimer ce couple moyen en fonction de  $M_0$ ,  $I_R$ ,  $I_{\text{Seff}}$  et de  $\theta_0$ .

**Q32.** Pour quelle valeur de  $\theta_0$  ce couple est-il maximum ? Préciser l'expression de ce couple maximum en fonction de  $M_0$ ,  $I_R$  et de  $I_{\text{Seff}}$ .

### Étude d'une machine à plusieurs paires de pôles

En resserrant et en périodisant le bobinage le long de l'entrefer, on admettra qu'on peut générer, à l'aide d'une bobine parcourue par un courant  $i_a(t)$ , un champ magnétique  $\vec{B}_{a,p} = K i_a(t) \cos(p\theta) \vec{e}_r$ .

L'association de deux bobines **(a)** et **(b)**, similaires et décalées dans l'espace d'un angle  $\frac{\pi}{2p}$  et parcourues par les courants  $i_a(t) = I_{\text{Seff}}\sqrt{2} \cos(\omega_s t)$  et  $i_b(t) = I_{\text{Seff}}\sqrt{2} \sin(\omega_s t)$ , permet de générer dans l'entrefer de la machine un champ magnétique  $\vec{B}_p = K I_{\text{Seff}}\sqrt{2} \cos(\omega_s t - p\theta) \vec{e}_r$ , où  $p$  est un entier qui désigne le nombre de paires de pôles de la machine.

On considère toujours que le rotor tourne à la vitesse angulaire constante  $\Omega$ , de sorte que  $\theta_R(t) = \Omega t + \theta_0$ .

La mutuelle-inductance entre la bobine a du stator et la bobine du rotor a maintenant pour expression :  $M_{aR} = M_0 \cos(p\theta_R)$  et le couple électromagnétique  $\Gamma_{\text{em},p}(t)$  a pour expression :

$$\Gamma_{\text{em},p} = p M_0 I_R I_{\text{Seff}} \sqrt{2} \sin(\omega_s t - p(\Omega t - \theta_0)).$$

**Q33.** Quelle est alors la nouvelle condition de synchronisme qui définit la valeur particulière de  $\Omega$ , notée  $\Omega_p$ , pour laquelle le couple moyen délivré par la machine est non nul. Exprimer le couple électromagnétique moyen développé par la machine en fonction de  $p$ ,  $M_0$ ,  $I_R$ ,  $I_{\text{Seff}}$  et de  $\theta_0$ .

**Q34.** Expliquer en quoi la conception d'une machine à plusieurs paires de pôles permet de s'affranchir ou d'alléger le réducteur placé entre le moteur synchrone et le pédalier avant d'un VAE.

La fréquence de pédalage d'un cycliste est de l'ordre de  $90 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$ . Proposer une valeur numérique de la fréquence d'alimentation d'une machine synchrone à  $p = 10$  paires de pôles, directement raccordée sur le pédalier avant d'un VAE.

Formules trigonométriques :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

## CCINP 2024 PSI – Moteur asynchrone

### Partie IV - L'épreuve de la caserne

L'épreuve de la caserne (figure 7) utilise un tapis roulant motorisé par une machine asynchrone. Nous nous proposons ici d'en décrire le fonctionnement en régime permanent. Aucune connaissance préalable sur la machine asynchrone n'est requise.



Figure 7 - Épreuve de la caserne

#### IV.1 - Présentation de la machine asynchrone

La machine asynchrone est constituée d'un rotor et d'un stator tous deux en fer feuilleté. Le rotor et le stator sont séparés par un entrefer de très faible largeur.

Dans la machine asynchrone diphasée, le stator est analogue au stator de la machine synchrone diphasée. Il se compose de deux enroulements décalés spatialement d'un angle de  $\pi/2$  et alimenté par des courants sinusoïdaux en quadrature de phase. Ces enroulements seront identifiés, dans toute la suite du problème, par les dénominations  $S_1$  et  $S_2$ .

Le rotor se compose également de deux enroulements, décalés spatialement d'un angle de  $\pi/2$ . Ils ne sont reliés à aucune alimentation mais refermés sur eux-mêmes et donc en court-circuit. Ces enroulements seront identifiés dans toute la suite du problème par les dénominations  $R_1$  et  $R_2$ .

On définit la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  liée au référentiel fixe, donc au stator. Le vecteur  $\vec{e}_x$  est normal à l'enroulement  $S_1$ . Le vecteur  $\vec{e}_z$  coïncide avec l'axe longitudinal de la machine.

#### IV.2 - Étude du stator

On s'intéresse d'abord au seul enroulement  $S_1$  du stator.

On a représenté (figure 8) les lignes de champ magnétique créées par la spire centrale de l'enroulement  $S_1$  du stator, de vecteur normal  $\vec{e}_x$ , parcourue par un courant  $i_{S_1}(t)$ . Cette spire centrale est représentée en coupe par son conducteur " aller ", orienté suivant le vecteur  $\vec{e}_z$ , et son conducteur " retour ", orienté suivant  $-\vec{e}_z$ .

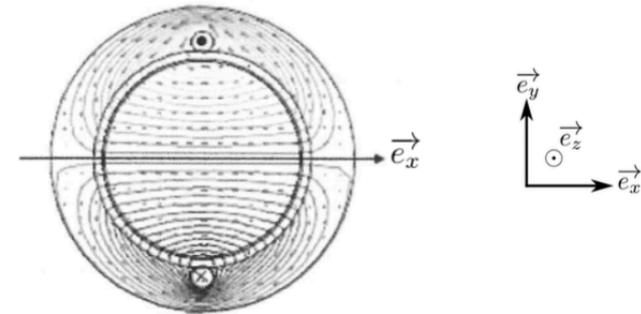


Figure 8 - Champ magnétique créé par la spire centrale de l'enroulement  $S_1$  du stator.

On définit la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  des coordonnées cylindriques (figure 9), où  $\vec{e}_z$  coïncide avec l'axe longitudinal de la machine. Un point  $M$  de l'entrefer est repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ . On a ainsi  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ .



Figure 9 - Repérage d'un point de l'entrefer

Dans un modèle simple, on considère que la norme du champ magnétique est uniforme dans l'entrefer.

On désigne par  $\vec{B}_{\text{spire}}(\theta, t) = B_{\text{spire}}(\theta, t) \vec{e}_r$  le champ magnétique créé par cette spire centrale de l'enroulement  $S_1$  en un point  $M(r, \theta)$  de l'entrefer.

On donne figure 10 la représentation graphique de la fonction  $B_{\text{spire}}(\theta, t)$  pour  $i_{S_1} > 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

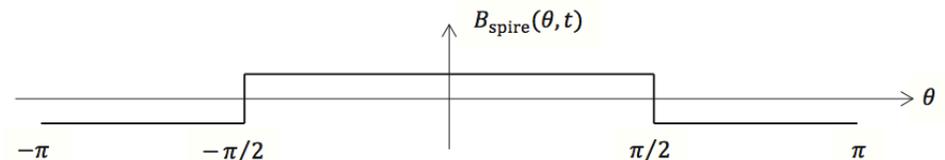
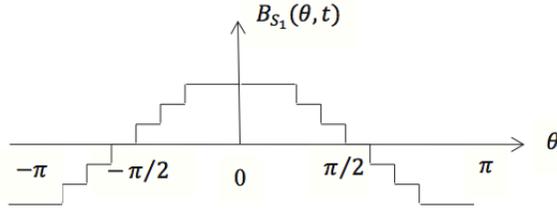


Figure 10 - Modélisation simplifiée du champ créé par une seule spire de  $S_1$  dans l'entrefer

L'enroulement  $S_1$  du stator, parcouru par le courant  $i_{S_1}(t)$ , n'est pas constitué d'une seule spire mais de  $n$  spires décalées les unes par rapport aux autres. Le champ magnétique créé par l'ensemble des spires de l'enroulement  $S_1$  du stator est noté  $\vec{B}_{S_1}(\theta, t) = B_{S_1}(\theta, t) \vec{e}_r$ .

On donne **figure 11** la représentation de la fonction  $B_{S_1}(\theta, t)$  pour  $i_{S_1} > 0$  et pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .



**Figure 11** - Modélisation simplifiée du champ créé par l'ensemble des spires de l'enroulement  $S_1$  dans l'entrefer

**Q27.** Préciser le nombre  $n$  de spires de l'enroulement  $S_1$ , décalées les unes par rapport aux autres, qui permettent de créer le champ magnétique  $\vec{B}_{S_1}(\theta, t)$  de la **figure 11**.

Dans la suite du problème, on admettra que les enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator créent dans l'entrefer les champs magnétiques :

$$\begin{cases} \vec{B}_{S_1}(\theta, t) = K_S i_{S_1}(t) \cos(\theta) \vec{e}_r \\ \vec{B}_{S_2}(\theta, t) = K_S i_{S_2}(t) \sin(\theta) \vec{e}_r \end{cases}$$

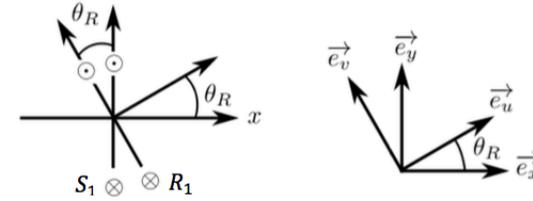
Par ailleurs, une alimentation électrique impose les courants :

$$\begin{cases} i_{S_1}(t) = I_{S_{\max}} \cos(\omega_s t) \\ i_{S_2}(t) = I_{S_{\max}} \sin(\omega_s t) \end{cases}$$

**Q28.** Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_S$  créé par l'ensemble des deux enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator dans l'entrefer. On posera  $B_{S_0} = K_S I_{S_{\max}}$ . Justifier que ce champ magnétique est un champ tournant dans le référentiel du stator à une vitesse angulaire  $\omega$  que l'on précisera.

Le rotor est repéré par sa position angulaire  $\theta_R$ . La position  $\theta_R = 0$  correspond à l'alignement des enroulements  $S_1$  du stator et  $R_1$  du rotor.

On définit la base  $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_z)$  liée au référentiel tournant du rotor (**figure 12**). Le vecteur  $\vec{e}_z$  coïncide avec l'axe longitudinal de la machine. L'enroulement  $R_1$  est orienté par le vecteur normal  $\vec{e}_u$ , l'enroulement  $R_2$  est orienté par le vecteur normal  $\vec{e}_v$ . Par souci de clarté, seules les spires centrales des enroulements  $S_1$  et  $R_1$  sont représentées sur la **figure 12**.



**Figure 12** - Repérage de la position  $\theta_R$  du rotor

On note :

- $R_S$  et  $L_S$  la résistance et l'inductance propre de chaque enroulement du stator ;
- $R_R$  et  $L_R$  la résistance et l'inductance propre de chaque enroulement du rotor ;
- $M_{S_1 R_1} = M_{SR} \cos(\theta_R)$  (avec  $M_{SR}$  une constante) l'inductance mutuelle entre les enroulements  $S_1$  du stator et  $R_1$  du rotor ;
- $M_{S_2 R_1} = M_{SR} \sin(\theta_R)$  l'inductance mutuelle entre les enroulements  $S_2$  du stator et  $R_1$  du rotor.

**Q29.** Que vaut l'inductance mutuelle  $M_{S_1 S_2}$  entre les enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator ? Que vaut la mutuelle  $M_{R_1 R_2}$  entre les enroulements  $R_1$  et  $R_2$  du rotor ?

**Q30.** Exprimer l'inductance mutuelle  $M_{S_1 R_2}$  entre les enroulements  $S_1$  du stator et  $R_2$  du rotor en fonction de  $M_{SR}$  et de  $\theta_R$ , ainsi que la mutuelle  $M_{S_2 R_2}$  entre les enroulements  $S_2$  du stator et  $R_2$  du rotor.

On se propose d'écrire l'équation électrique qui définit le courant  $i_{R_1}(t)$  associé à l'enroulement  $R_1$  du rotor.

**Q31.** Comment peut-on expliquer qu'un courant  $i_{R_1}(t)$  circule dans l'enroulement  $R_1$  alors qu'il n'est relié à aucune alimentation ?

**Q32.** On note respectivement  $\phi_{S_1 R_1}$  et  $\phi_{S_2 R_1}$  les flux créés dans l'enroulement  $R_1$  du rotor par les enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator. Exprimer le flux  $\phi_{S_1 R_1}$  en fonction de  $M_{SR}$ ,  $\theta_R$  et du courant  $i_{S_1}(t)$ . De même, exprimer le flux  $\phi_{S_2 R_1}$  en fonction de  $M_{SR}$ ,  $\theta_R$  et du courant  $i_{S_2}(t)$ .

On suppose que le rotor tourne à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  avec  $0 \leq \Omega \leq \omega_s$ . On suppose également qu'à  $t = 0$ ,  $\theta_R(0) = 0$  de sorte que  $\theta_R(t) = \Omega t$ .

**Q33.** En remarquant que  $\theta_R$  et  $i_{S_1}$  dépendent du temps, exprimer en fonction de  $M_{SR}$ ,  $i_{S_1}$ ,  $\Omega$  et de  $t$  la force électromotrice (fem)  $e_{S_1 R_1}$  induite par  $S_1$  dans  $R_1$ . Faire de même pour la fem  $e_{S_2 R_1}$  induite par  $S_2$  dans  $R_1$ . On ne développera pas les expressions de  $i_{S_1}(t)$ ,  $i_{S_2}(t)$  et de leur dérivée dans cette réponse.

**Q34.** En déduire l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i_{R_1}(t)$  en fonction de  $R_R$ ,  $L_R$ ,  $M_{SR}$ ,  $\Omega$ ,  $t$  et de  $i_{S_1}(t)$ ,  $i_{S_2}(t)$  et de leur dérivée. Cette équation différentielle peut être écrite sous la forme :

$$L_R \frac{di_{R_1}}{dt} + R_R i_{R_1} = A \sin(\omega t)$$

Préciser les expressions de  $A$  et de  $\omega$  en fonction de  $M_{SR}$ ,  $I_{S_{\max}}$ ,  $\omega_s$  et de  $\Omega$ .

En régime permanent, le courant  $i_{R_1}(t)$  est sinusoïdal ; on note  $\omega_R$  sa pulsation et  $I_{R\max}$  son amplitude maximale.

**Q35.** On rappelle que  $\omega_S > \Omega$ . Exprimer  $\omega_R$  en fonction de  $\omega_S$  et de  $\Omega$ .

**Q36.** Exprimer  $I_{R\max}$  en fonction de  $R_R, L_R, M_{SR}, I_{S\max}, \omega_S$  et de  $\Omega$ .

Que peut-on dire de  $I_{R\max}$  pour  $\omega_S = \Omega$  ?

Justifier alors le qualificatif de machine asynchrone.

On suppose que les courants  $i_{R_1}(t)$  et  $i_{R_2}(t)$  sont de la forme :

$$\begin{cases} i_{R_1}(t) = I_{R\max} \sin(\omega_R t - \varphi) \\ i_{R_2}(t) = -I_{R\max} \cos(\omega_R t - \varphi) \end{cases} \text{ avec } \varphi = \arctan\left(\frac{L_R \omega_R}{R_R}\right).$$

Les enroulements  $R_1$  et  $R_2$  du rotor créent respectivement, dans l'entrefer, des champs exprimés dans le référentiel fixe (celui du stator) de la forme :

$$\begin{cases} \vec{B}_{R_1}(\theta, t) = K_R i_{R_1}(t) \cos(\theta - \theta_R) \vec{e}_r \\ \vec{B}_{R_2}(\theta, t) = K_R i_{R_2}(t) \sin(\theta - \theta_R) \vec{e}_r \end{cases}$$

**Q37.** Dans le référentiel fixe (lié au stator), à quelle vitesse angulaire tourne le champ créé par le rotor ? Commenter.

**Q38.** Dans une machine à courant continu, le champ statorique est stationnaire. Les champs statorique et rotorique sont-ils synchrones quelle que soit la vitesse de rotation du rotor ? Si oui, expliquer brièvement comment est assurée cette synchronisation.

Le couple délivré par la machine est de la forme  $\vec{\Gamma} = \Gamma_z \vec{e}_z$ , avec :

$$\Gamma_z = \frac{\partial M_{S_1 R_1}}{\partial \theta_R} i_{S_1} i_{R_1} + \frac{\partial M_{S_1 R_2}}{\partial \theta_R} i_{S_1} i_{R_2} + \frac{\partial M_{S_2 R_1}}{\partial \theta_R} i_{S_2} i_{R_1} + \frac{\partial M_{S_2 R_2}}{\partial \theta_R} i_{S_2} i_{R_2}$$

Le calcul étant fastidieux, on admettra pour la suite que :

$$\Gamma_z = \frac{M_{RS}^2 I_{S\max}^2 R_R (\omega_S - \Omega)}{R_R^2 + L_R^2 (\omega_S - \Omega)^2}$$

On définit le glissement de la machine par :

$$g = \frac{\omega_S - \Omega}{\omega_S} \text{ avec } 0 \leq g \leq 1$$

La puissance électromagnétique moyenne transmise par le stator au rotor est donnée par :

$$P_S = \Gamma_z \omega_S$$

Enfin, on note  $P_{JR}$  la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le rotor.

**Q39.** Relier  $P_S, P_{JR}$  et  $g$ .

**Q40.** Que vaut  $g$  au démarrage de la machine ? Le rendement de la machine est-il meilleur lorsque  $g$  est proche de 0 ou de 1 ? Justifier.

## Formules trigonométriques

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$