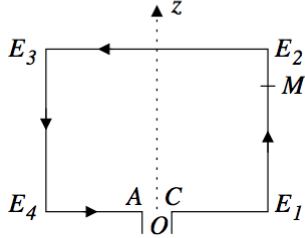


Centrale PSI 2015 - MCC

1 Principe d'une machine à courant continu à charge constante

- On calcule la composante du couple par rapport à l'axe (Oz). On remarque que sur les portions E_2E_3 , E_4A et CE_1 , $d\vec{l}$ et $\vec{B}$ sont parallèles et la contribution de ces termes au couple est nul :



$$\Gamma = \left[\int_C^A \overrightarrow{OM} \wedge (i d\vec{l} \wedge \vec{B}) \right] \cdot \vec{u}_z$$

$$\Gamma = \left[\int_{E_1}^{E_2} \overrightarrow{OM} \wedge (i d\vec{l} \wedge \vec{B}) \right] \cdot \vec{u}_z + \left[\int_{E_3}^{E_4} \overrightarrow{OM} \wedge (i d\vec{l} \wedge \vec{B}) \right] \cdot \vec{u}_z$$

Avec :

$$\left[\int_{E_1}^{E_2} \overrightarrow{OM} \wedge (i d\vec{l} \wedge \vec{B}) \right] \cdot \vec{u}_z = \left[\int_{E_1}^{E_2} \left(\frac{a}{2} \vec{e}_{r1} + z \vec{u}_z \right) \wedge (i dz \vec{u}_z \wedge B_0 \cos \theta \vec{e}_{r1}) \right] \cdot \vec{u}_z$$

$$= \frac{a}{2} i b B_0 \cos(\theta)$$

On obtient un résultat identique pour le second terme, donc pour une spire :

$$\Gamma = ab B_0 \cos(\theta) i$$

Sur un tour $\langle \cos(\theta) \rangle = 0$ et **le couple est donc nul en moyenne**. Ce résultat est bien sûr applicable à chacune des N spires.

- Le système **balai-collecteur** permet l'inversion du courant pour les angles $\theta = \pi/2$ et $\theta = -\pi/2$.

Pour calculer le nouveau couple moyen, on reprend l'expression précédemment obtenue mais on tient maintenant compte du fait que l'intensité est une fonction de θ :

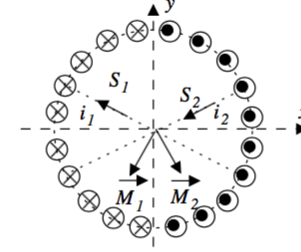
$$\langle \Gamma_{em} \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} ab B_0 i \cos \theta d\theta + \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} ab B_0 (-i) \cos \theta d\theta \right]$$

$$\langle \Gamma_{em} \rangle = \frac{ab B_0 i}{2\pi} \left([\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} - [\sin \theta]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) \Rightarrow \langle \Gamma_{em} \rangle = \frac{2ab B_0 i}{\pi}$$

Chacune des spires subit ce couple, en conséquence dans le cas de N spires :

$$\langle \Gamma_{em} \rangle = \frac{2Nab B_0 i}{\pi} \quad \text{donc} \quad \boxed{K_0 = \frac{2ab B_0 N}{\pi}}$$

- Une spire donnée parcourue par un courant d'intensité i et de section S est équivalente à un moment magnétique $\vec{M} = i \vec{S}$:



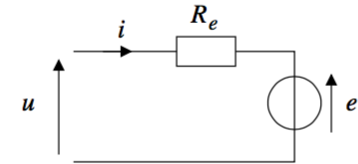
Comme le montre le schéma ci-dessus, les moments magnétiques sont, par symétrie, globalement dirigés selon $-\vec{u}_y$: $\vec{M}_r = -M_r \vec{u}_y$ avec $M_r > 0$ et proportionnel à i car toutes les spires sont parcourues par le même courant i .

En suivant la proposition (discutable?) de l'énoncé, on applique la formule du couple électromagnétique qui s'exerce sur un dipôle magnétique :

$$\vec{\Gamma}_{em} = -M_r \vec{u}_y \wedge B_s \vec{u}_x \Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma}'_{em} = M_r B_s \vec{u}_z}$$

En présence d'un matériau ferromagnétique le champ magnétique est renforcé et le couple est nécessairement plus important dans ce second cas.

- Dans le cas d'un couplage parfait : $\Gamma'_{em} \Omega = e' i$, donc $\boxed{e' = K \Omega}$.
- Commençons par représenter le schéma de l'induit (rotor) :



L'équation électrique s'écrit :

$$U = R_e i + e' = R_e i + K \Omega \Rightarrow \Omega = \frac{U - R_e i}{K}$$

Avec $\Gamma'_{em} = K i$, on en déduit :

$$\boxed{\Omega = \frac{U}{K} - \frac{R_e}{K^2} \Gamma'_{em}}$$

- On applique le théorème du moment cinétique pour le rotor :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma'_{em} - \Gamma_R$$

Avec $\Gamma'_{em} = Ki$ et $U = R_e i + K\Omega$, on obtient $\Gamma'_{em} = K \left(\frac{U - K\Omega}{R_e} \right)$ et

donc :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \frac{KU}{R_e} - \frac{K^2\Omega}{R_e} - \Gamma_R \Rightarrow \boxed{\frac{d\Omega}{dt} + \frac{K^2}{R_e J} \Omega = \frac{1}{J} \left(\frac{KU}{R_e} - \Gamma_R \right)}$$

On en déduit $\tau = \frac{R_e J}{K^2}$ et $\frac{\Omega_{lim}}{\tau} = \frac{1}{J} \left(\frac{KU}{R_e} - \Gamma_R \right)$.

Partant d'une vitesse de rotation nulle, on en déduit :

$$\boxed{\Omega(t) = \Omega_{lim} (1 - e^{-t/\tau})}$$

Et donc pour l'angle :

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega_{lim} (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \theta(t) = \Omega_{lim} t + \Omega_{lim} \tau e^{-t/\tau} + cste$$

Avec la condition initiale, $\theta(0) = 0 = \Omega_{lim} \tau + cste$, on obtient finalement :

$$\boxed{\theta(t) = \Omega_{lim} t + \Omega_{lim} \tau (e^{-t/\tau} - 1)}$$

7. L'annulation du courant dans l'induit supprime le couple électromagnétique, l'équation mécanique prend la forme simplifiée :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -\Gamma_R \Rightarrow \Omega(t) = -\frac{\Gamma_R}{J} t + cste$$

Compte tenu de la condition initiale : $\Omega(t_0) = \Omega_0$, on en déduit :

$$\boxed{\forall t \geq t_0 \quad \Omega(t) = \Omega_0 + \frac{\Gamma_R}{J} (t_0 - t)}$$

On détermine alors l'angle :

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega_0 + \frac{\Gamma_R}{J} (t_0 - t) \Rightarrow \theta(t) = \Omega_0 t - \frac{\Gamma_R}{J} \frac{(t_0 - t)^2}{2} + cste$$

Avec $\theta(t_0) = \theta_0$: $\boxed{\forall t \geq t_0 \quad \theta(t) = \Omega_0 (t - t_0) - \frac{\Gamma_R}{2J} (t_0 - t)^2 + \theta_0}$.

8. Le rotor est à l'arrêt en t_{mp} tel que $0 = \Omega(t_{mp}) = \Omega_0 + \frac{\Gamma_r}{J} (t_0 - t_{mp})$, c'est à dire :

$$\Omega_{lim} (1 - e^{-t_0/\tau}) + \frac{\Gamma_R}{J} (t_0 - t_{mp}) = 0$$

$$\boxed{t_{mp} = t_0 + \frac{J\Omega_{lim}}{\Gamma_R} (1 - e^{-t_0/\tau})}$$

On peut alors déterminer $\theta(t_{mp})$:

$$\theta_{mp} = \theta_0 + \frac{\Omega_0 J \Omega_{lim}}{\Gamma_R} (1 - e^{-t_0/\tau}) - \frac{\Gamma_R}{2J} \times \frac{J^2 \Omega_{lim}^2}{\Gamma_R^2} (1 - e^{-t_0/\tau})^2$$

Avec $\theta_0 = \Omega_{lim} t_0 + \Omega_{lim} \tau (e^{-t_0/\tau} - 1)$ et $\Omega_0 = \Omega_{lim} (1 - e^{-t_0/\tau})$, on en déduit finalement :

$$\boxed{\theta_{mp} = \Omega_{lim} t_0 + \Omega_{lim} \tau (e^{-t_0/\tau} - 1) + \frac{J\Omega_{lim}^2}{2\Gamma_R} (1 - e^{-t_0/\tau})^2}$$

2 Application au moteur DN12M

1. En utilisant la courbe en trait plein et sachant que $\Gamma'_{em} = Ki$, on en déduit :

$$K = \frac{\Gamma'_{em}}{i} = \frac{1,1 \text{ mN.m}}{400 \text{ mA}} \Rightarrow \boxed{K = 2,7 \times 10^{-3} \text{ Wb}}$$

Comme $\Omega = \frac{u}{K} - \frac{R_e \Gamma'_{em}}{K^2}$, la pente vaut $-R_e/K^2$:

$$R_e = \frac{12100 \times 2\pi/60}{1,2 \times 10^{-3}} \times (2,75 \times 10^{-3})^2 \Rightarrow \boxed{R_e = 8,0 \Omega}$$

2. Le couple de démarrage est le couple à vitesse angulaire nulle, c'est à dire :

$$\boxed{\Gamma_D = 1,2 \text{ mN.m}}$$

3. $\tau = \frac{R_e J}{K^2} = \frac{8,0 \times 0,24 \times 10^{-3} \times 10^{-4}}{(2,7 \times 10^{-3})^2} \Rightarrow \boxed{\tau = 26 \text{ ms}}$.

Au démarrage, la relation entre la tension et le couple électromoteur prend la forme simplifiée :

$$\Gamma_D = \frac{KU}{R_e} \Leftrightarrow U = \frac{R_e \Gamma_D}{K} = \frac{8,0 \times 1,2 \times 10^{-3}}{2,7 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{U = 3,6 \text{ V}}$$

4. Comme $\Omega_{lim} = \frac{U}{K} - \frac{R_e \Gamma_R}{K^2}$, on en déduit :

$$\Omega_{lim} = \frac{3,6}{2,7 \times 10^{-3}} - \frac{8 \times 0,6 \times 10^{-3}}{(2,7 \times 10^{-3})^2} \Rightarrow \boxed{\Omega_{lim} = 4,9 \times 10^2 \text{ rad.s}^{-1}}$$

En régime permanent le couple moteur doit équilibrer le couple résistant, ce qui donne pour la puissance du moteur :

$$P = \Gamma_r \times \Omega_{lim} = 0,6 \times 10^{-3} \times 4,9 \times 10^2 \Rightarrow \boxed{P = 0,29 \text{ W}}$$

5. L'énoncé ne fournit pas t_0 ; faisons l'hypothèse que le moteur atteigne sa vitesse limite dans la phase motrice $\Omega(t_0) = \Omega_{lim}$, c'est à dire $e^{-t_0/\tau} \simeq 0$.

Le relation entre t_{mp} et t_0 (question 8.) s'écrit alors :

$$t_0 = t_{mp} - \frac{J\Omega_{lim}}{\Gamma_r} = 0,1 - \frac{0,24 \times 10^{-7} \times 4,9 \times 10^2}{0,5 \times 1,2 \times 10^{-3}} \Rightarrow t_0 \simeq 80 \text{ ms}$$

On peut alors en déduire θ_{mp} (avec $e^{-t_0/\tau} \simeq 0$) :

$$\theta_{mp} = 4,9 \times 10^2 \times 80 \times 10^{-3} - 4,9 \times 10^2 \times 26 \times 10^{-3} + \frac{0,24 \times 10^{-7} \times (4,9 \times 10^2)^2}{1,2 \times 10^{-3}}$$

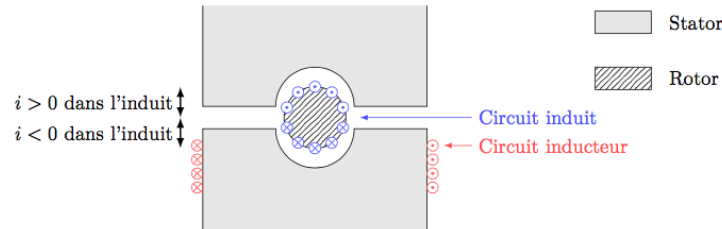
C'est à dire $\boxed{\theta_{mp} \simeq 31 \text{ rad}}$, environ 5 tours.

E3A PSI 2023 – MCC – Moteur et génératrice

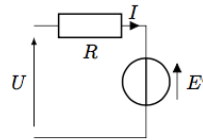
Préliminaires - Étude d'une machine à courant continu en travaux pratiques

Q1. Une machine à courant continu est constituée de deux parties :

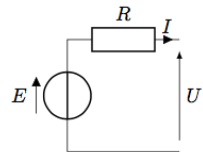
- Un stator (pièce ferromagnétique fixe) sur lequel est bobiné un circuit **inducteur**. Celui-ci est alimenté en courant **continu** et génère un champ magnétique fixe. Le stator canalise ce champ.
- Un rotor (pièce ferromagnétique en rotation) sur lequel est bobiné un circuit **induit**. Il est parcouru par un courant **continu** et génère un champ magnétique fixe également. Les spires de ce circuit sont mises en contact avec le circuit d'alimentation extérieur par des balais conducteurs et un collecteur qui permet d'assurer une direction constante au champ rotorique et ainsi une condition de synchronisme entre champs rotorique et statorique.



Q2. Fonctionnement moteur : l'induit est alimenté par une tension U et parcouru par un courant I :



Fonctionnement génératrice : l'induit délivre une tension U et un courant I :



Q3. Les deux équations recherchées sont les suivantes :

$$E = \phi \Omega \quad \text{et} \quad \Gamma_{em} = \phi I$$

Q4. La première expérience permet de remonter à la valeur de la résistance de l'induit de la MCC1. En effet, la MCC2 n'étant pas alimentée, on en déduit que le rotor est bloqué, ainsi, $\Omega = 0$ donc $E' = 0$ pour la MCC1. D'après le premier schéma proposé ci-dessus :

$$U_e = RI_e \quad \text{soit,} \quad R = \frac{U_e}{I_e} = (\bar{R} \pm u(R))$$

avec :

$$\bar{R} = 460 \, \Omega$$

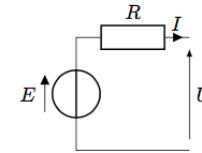
$$u(R) = R \sqrt{\left(\frac{u(U_e)}{U_e}\right)^2 + \left(\frac{u(I_e)}{I_e}\right)^2} = 94 \, \Omega$$

Ainsi :

$$R = (46 \pm 9) \cdot 10^1 \, \Omega$$

Q5. *Étrange utilisation de linregress au lieu de polyfit...*

Cette fois, le rotor peut tourner, la force électromotrice E n'est pas nulle. On en déduit ainsi le circuit équivalent suivant :



La loi des mailles donne :

$$U = E + RI \quad \text{or, le voltmètre étant idéal} \quad I = 0$$

Et, d'après la question Q3., on a $E = \phi \Omega$ et on peut écrire $\Omega = n \frac{2\pi}{60}$ comme dans le script Python. Ainsi :

$$U = \phi \Omega$$

Ainsi, en traçant U en fonction de Ω , on peut obtenir ϕ la constante électromécanique de la machine à l'aide du coefficient directeur. On obtient directement :

$$\phi = 1,49 \, \text{Wb}$$

Ici, on ne peut conclure directement sur la validité de la régression linéaire dans la mesure où le coefficient de corrélation n'est pas un indicateur suffisant pour cela. Toutefois, on pourrait effectuer un tracé et vérifier l'allure à l'œil nu pour confirmer cette validité.

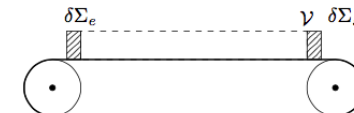
Partie I - Le minerai d'uranium

I.1 - Extraction

Q6. Conversion :

$$D_m = \dot{m}_j \times \frac{1000}{24 \times 3600} = 0,29 \, \text{kg}$$

Q7. Pour effectuer le bilan, on considère que les roches forment un amas continu. On considère donc le volume de contrôle $\mathcal{V}$ proposé dans l'énoncé :



Ce système est ouvert. On considère ainsi le système fermé Σ^* constitué :

- À t : du système contenu dans $\mathcal{V}$ ainsi que de la masse entrant dans $\mathcal{V}$ durant dt ;

— À $t + dt$: du système contenu dans $\mathcal{V}$ ainsi que de la masse sortant de $\mathcal{V}$ durant dt .

La variation de quantité de mouvement de ce système Σ^* vaut ainsi, en régime stationnaire :

$$d\vec{p}^* = \delta\vec{p}_{\text{entrant}} - \delta\vec{p}_{\text{sortant}}$$

Ainsi, en projetant sur $\vec{u}_x$:

$$d\vec{p}^* \cdot \vec{u}_x = 0 - D_m dt v$$

Le système Σ^* n'étant soumis qu'à l'action du tapis sur les roches ($-\vec{F}$ par principe des actions réciproques), le théorème de la quantité de mouvement en projection sur $\vec{u}_x$ donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u}_x = -F$$

Ainsi :

$$F = D_m v$$

I.2 - Vitesse de rotation du rotor du moteur

Q8. Une loi des mailles donne, en fonctionnement moteur :

$$U = E - RI$$

avec $E = \phi\Omega_p$ soit :

$$U = \phi\Omega_p - RI \quad (\text{E}_1)$$

Q9. Le système Σ est soumis à $\Gamma_{em} = \phi I$, au couple de frottements dont la composante selon $\vec{u}_z$ est $-\lambda\Omega$ ainsi qu'à l'action des roches sur le tapis dont le moment projeté sur $\vec{u}_z$ est $Fa = D_m va$. Le théorème du moment cinétique scalaire autour de l'axe $(O, \vec{u}_z)$ donne ainsi :

$$\frac{d\mathcal{L}_{(Oz)}}{dt} = \phi I - \lambda\Omega + D_m va$$

où $\mathcal{L}_{(Oz)} = J\Omega$ est le moment cinétique de Σ autour de l'axe $(O, \vec{u}_z)$. En régime permanent, on obtient ainsi :

$$\phi I + D_m va = \lambda\Omega_p \quad (\text{E}_2)$$

Q10. En injectant l'expression de I obtenue dans (E_1) , on obtient :

$$U = \phi\Omega_p - R \frac{\lambda\Omega_p - D_m va}{\phi} \quad \text{soit,} \quad \Omega_p = \frac{U\phi - RD_m av}{\phi^2 - R\lambda}$$

Dans ce modèle, une augmentation du débit des roches a pour conséquence de ralentir la rotation des cylindres et donc la vitesse du tapis, c'est cohérent.

Q11. *Question pas claire : quel degré de détail est attendu ?*

Un redresseur est un convertisseur AC/DC et un hacheur est un convertisseur DC/DC.

Le rôle du convertisseur AC/DC est d'adapter la puissance provenant du secteur (alternative) au moteur qui nécessite une puissance continue.

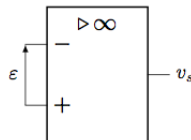
Le convertisseur DC/DC permet de contrôler la valeur de l'intensité du courant d'alimentation du moteur en jouant sur un paramètre du convertisseur (par exemple le rapport cyclique d'un hacheur).

Q12. Un ALI idéal en régime linéaire est caractérisé par :

— Des courants de polarisation nuls $i_{\ominus} = i_{\oplus} = 0$.

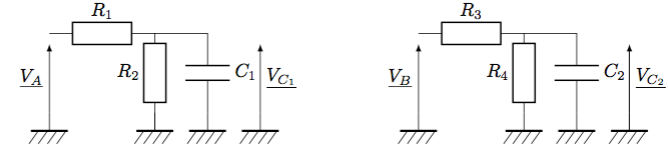
— Un gain infini : $\underline{H}_{\text{ALI}} = \frac{v_s}{\varepsilon} = 0$

— Aucune limite en vitesse de balayage



Tous les ALI comportent une rétroaction et celles-ci ont lieu sur la borne inverseuse, on peut donc supposer que le régime de fonctionnement des ALI est linéaire.

Q13. Les courants de polarisation des ALI étant nuls, on peut identifier deux ponts diviseurs de tension :



Un pont-diviseur de tension donne ainsi :

$$V_{C_1} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_1} V_A = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{\underline{Z}}} V_A$$

où $\underline{Z}$ est l'impédance équivalente à l'association de R_2 et C_1 en parallèle soit $\underline{Z} = j\omega C_1 + \frac{1}{R_2} = \frac{1 + j\omega R_2 C_1}{R_2}$, donc :

$$V_{C_1} = \frac{1}{1 + R_1 \frac{1 + j\omega R_2 C_1}{R_2}} V_A \quad \text{soit} \quad V_{C_1} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}} V_A$$

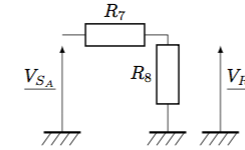
De même :

$$V_{C_2} = \frac{\frac{R_2}{R_3 + R_4}}{1 + j\omega \frac{R_3 R_4 C_2}{R_3 + R_4}} V_B$$

Q14. Les deux amplificateurs sont montés en suiveurs, on a donc directement :

$$V_{S_A} = V_{C_1} \quad \text{et} \quad V_{S_B} = V_{C_2}$$

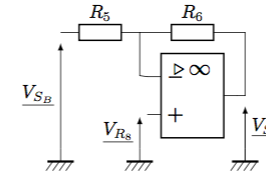
Q15. De même que plus haut, on identifie une structure pont-diviseur de tension :



Ainsi, on obtient :

$$V_{R_8} = \frac{R_8}{R_7 + R_8} V_{S_A}$$

Q16. La situation est équivalente à :



L'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, le potentiel entre les résistances vaut V_{R_8} , ainsi une loi des nœuds en termes de potentiels donne :

$$\frac{V_{R_8} - V_{S_B}}{R_5} + \frac{V_{R_8} - V_S}{R_6} = 0 \quad \text{soit} \quad V_S = V_{R_8} \left(1 + \frac{R_6}{R_5} \right) - V_{S_B} \frac{R_6}{R_5}$$

Q17. Erreur dans l'énoncé : R_2 au lieu de R_3 .

La loi des nœuds appliquée en :

$$A \text{ donne } \underline{i} = \underline{i}_{R_1} + \underline{i}_{R_{shunt}}$$

$$B \text{ donne } \underline{i}_{R_{shunt}} = \underline{i} + \underline{i}_{R_3}$$

Ainsi, on déduit de la loi d'Ohm :

$$\underline{i} = \frac{V_{C_1} - V_A}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_{shunt}}$$

Or, d'après ce qui précède en question Q13. et en utilisant les égalités de l'énoncé :

$$\underline{V_A} = \underline{V_{C_1}} \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad \text{et} \quad \underline{V_B} = \underline{V_{C_2}} \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Soit :

$$\underline{i} = \frac{\underline{V_{C_1}}}{R_1} \left(1 - \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \right) + \frac{1}{R_{shunt}} \left(\underline{V_{C_1}} \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} - \underline{V_{C_2}} \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \right)$$

Ce qui donne, d'après la question Q14. :

$$\underline{i} = \left\{ \underline{V_{S_A}} \left(\frac{R_{shunt}}{R_1} \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 - j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right] + \left[1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right] \right) - \underline{V_{S_B}} \left(1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right) \right\} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}}$$

Enfin, d'après les résultats de la question Q15. : $\underline{V_{R_8}} = \frac{R_8}{R_7 + R_8} \underline{V_{S_A}}$, ainsi :

$$\underline{i} = \left\{ \underline{V_{R_8}} \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left(R_{shunt} \left[-\frac{1}{R_1 + R_2} - j\omega \frac{R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right] + \left[1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right] \right) - \underline{V_{S_B}} \left(1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right) \right\} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}}$$

Soit :

$$\underline{i} = \left\{ \underline{V_{R_8}} \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left(\frac{R_1 + R_2 - R_{shunt}}{R_1 + R_2} + j\omega \frac{R_2 C_1}{R_1 + R_2} (R_1 - R_{shunt}) \right) - \underline{V_{S_B}} \left(1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right) \right\} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}}$$

Or, on a établi en question Q16. :

$$\underline{V_S} = \left(1 + \frac{R_6}{R_5} \right) \underline{V_{R_8}} - \frac{R_6}{R_5} \underline{V_{S_B}}$$

On a donc :

$$\text{d'une part } \underline{i} = \alpha \underline{V_{R_8}} - \beta \underline{V_{S_B}} \quad \text{et, d'autre part } \underline{V_S} = \gamma \underline{V_{R_8}} - \delta \underline{V_{S_B}}$$

Et on veut :

$$\underline{V_S} = \frac{g_i}{1 + j\tau_i \omega} \underline{i} \quad \text{soit} \quad \gamma \underline{V_{R_8}} - \delta \underline{V_{S_B}} = \frac{g_i}{1 + j\tau_i \omega} (\alpha \underline{V_{R_8}} - \beta \underline{V_{S_B}})$$

On identifie :

$$\begin{cases} \alpha g_i = \gamma(1 + j\tau_i \omega) \\ \beta g_i = \delta(1 + j\tau_i \omega) \end{cases}$$

Ainsi, on obtient la relation :

$$\alpha \delta = \gamma \beta$$

Soit :

$$\frac{R_6}{R_5} \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left(\frac{R_1 + R_2 - R_{shunt}}{R_1 + R_2} + j\omega \frac{R_2 C_1}{R_1 + R_2} (R_1 - R_{shunt}) \right) \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}} = \left(1 + \frac{R_6}{R_5} \right) \left(1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}}$$

Attention, approximation forte : On souhaite avoir un bon capteur, il faut pour cela $\underline{i}_{shunt} \approx \underline{i}$ ce qui conduit à $R_{shunt} \ll R_1, R_2$.

On obtient ainsi :

$$\frac{R_6}{R_5} \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left(1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right) = \left(1 + \frac{R_6}{R_5} \right) \left(1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Deux conditions en ressortent (en identifiant les parties réelle et imaginaire) :

$$\begin{cases} \frac{R_6}{R_5} \frac{R_7 + R_8}{R_8} = \left(1 + \frac{R_6}{R_5} \right) \\ \omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} = \omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{R_7}{R_8} = \frac{R_5}{R_6} \\ C_1 = C_2 \end{cases}}$$

Remarque : On aurait également pu utiliser l'approximation dès le début afin de ne pas transporter R_{shunt} dans tous les calculs.

Q18. On réutilise une des relations de l'identification :

$$g_i \alpha = (1 + j\omega \tau_i) \gamma \quad \text{soit} \quad g_i \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left(1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}} = (1 + j\omega \tau_i) \frac{R_5 + R_6}{R_5}$$

Ainsi, en identifiant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} g_i \frac{R_7 + R_8}{R_8} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}} = \frac{R_5 + R_6}{R_5} \\ g_i \frac{R_7 + R_8}{R_8} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}} \frac{R_1 R_2 C_1 \omega}{R_1 + R_2} = \frac{R_5 + R_6}{R_5} \tau_i \omega \end{cases}$$

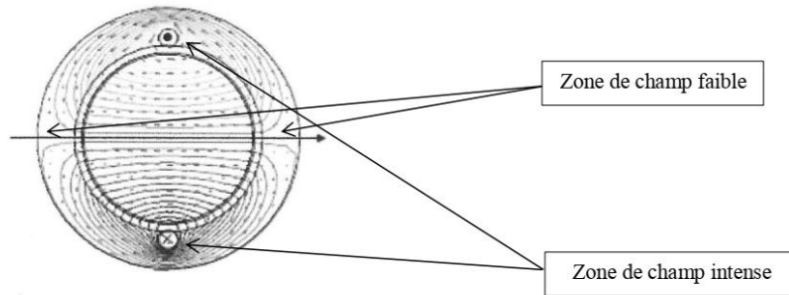
D'où :

$$\boxed{\begin{cases} g_i = \frac{R_2 R_{shunt}}{R_1 + R_2} \frac{R_6}{R_5} \\ \tau_i = \frac{R_1 R_2 C_1 \omega}{R_1 + R_2} \end{cases}}$$

Ainsi, en travaillant à hautes-fréquences, on ne garde qu'une image de la valeur moyenne de $\underline{i}$ car on obtient alors $\underline{V_S} \approx g_i \underline{i}$.

Partie VI – Machine synchrone

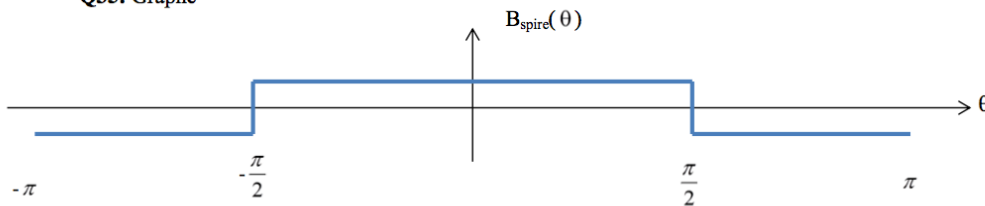
Q32. B n'est pas uniforme, les lignes de champ ne sont pas équidistantes.



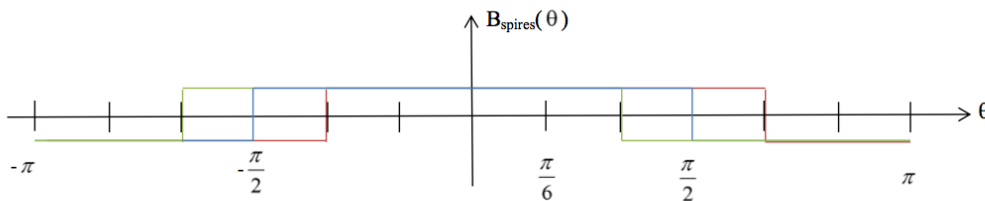
Q33. $\oint_{L_{dc}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_1(t)$ d'où $H_{air} * 2e + H_{fer} * L_{fer} = i_1(t)$

Q34. $\frac{B}{\mu_0} * 2e + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} * L_{fer} = i_1(t)$ qui devient $\frac{B}{\mu_0} * 2e \approx i_1(t)$ et $B = \frac{\mu_0 i_1}{2e}$.

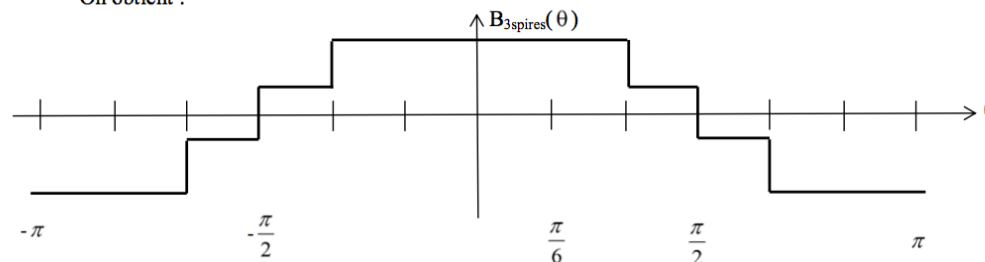
Q35. Graphe



Q36. On additionne les champs créés par les trois spires décalées de $\frac{\pi}{6}$.



On obtient :



Q37. $\vec{B}_s = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = K I_{max} [\cos(\omega_s t) \cos \theta + \sin(\omega_s t) \sin \theta] \vec{e}_r$

$\vec{B}_s = K I_{max} \cos(\omega_s t - \theta) \vec{e}_r = B_{s0} \cos(\omega_s t - \theta) \vec{e}_r$.

La dépendance en $\omega_s t - \theta$ montre qu'il s'agit d'un champ tournant à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_s \vec{e}_z$.

Q38. $w_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{volume entrefer}} (\vec{B}_s + \vec{B}_r)^2 d\tau$

Q39. $R_e \cdot L_e \cdot e$ est en m^3 . R_e et L_e correspondent au rayon de l'entrefer et à la longueur de l'entrefer.

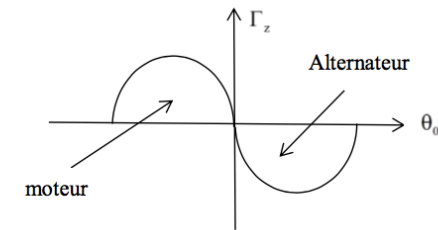
Q40. $\Gamma_z(t) = \frac{R_e \cdot L_e \cdot e}{2\mu_0} \cdot 2\pi B_{r0} B_{s0} \sin(\omega_s t - \theta_{r0}(t))$

$\Gamma_z(t) = \frac{\pi \cdot R_e \cdot L_e \cdot e}{\mu_0} B_{r0} B_{s0} \sin((\omega_s - \Omega)t - \theta_0)$

Q41. On a un couple moyen non nul si $\omega_s = \Omega$, c'est la condition de synchronisme.

On a : $\Gamma_{moyen} = \frac{-\pi \cdot R_e \cdot L_e \cdot e}{\mu_0} B_{r0} B_{s0} \sin(\theta_0)$.

Q42. Le comportement alternateur correspond à $\Gamma_{moyen} < 0$, soit $\theta_0 \in]0, \pi[$.



Zone moteur : $\theta_0 \in]-\pi, 0[$ et zone alternateur $\theta_0 \in]0, \pi[$

On a un fonctionnement moteur si $\Gamma_{moyen} > 0$.

Pour un fonctionnement moteur stable, il faut que sur une perturbation frein, (le rotor prend du retard et θ_0 diminue), Γ_{moyen} augmente et que sur une perturbation motrice (le rotor prend de l'avance et θ_0 augmente), Γ_{moyen} diminue soit $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

Moteur stable : $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

Fin

Partie IV. Assistance électrique

Intérêt d'une machine inversée

Q25. La force de Laplace élémentaire s'écrit : $d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_S = I dz \vec{e}_z \wedge B_s \vec{e}_r = I B_S dz \vec{e}_\theta$

En intégrant sur la longueur du conducteur, on obtient :

$$\vec{F}_L = \int_0^L dI B_S dz \vec{e}_\theta = I L B_s \vec{e}_\theta$$

Pour commencer, il faudrait peut-être préciser par rapport à quel point on doit calculer le moment ! Sans cette donnée, on ne peut pas, en toute rigueur, déterminer $\vec{M}$.

Nous allons donc ici déterminer le moment par rapport à l'axe de rotation.

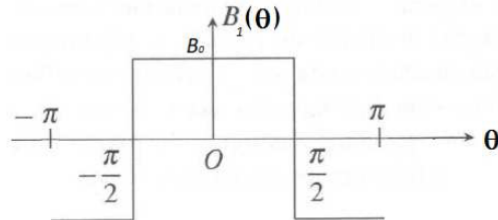
Pour calculer le moment, il faudrait écrire les moments élémentaires et intégrer. Cependant, la force de Laplace est la même sur tous les éléments du conducteur aller. On peut donc écrire $M_z = +||\vec{F}_L|| \times R = I L B_s R$.

Remarque : question vraiment maladroite. Le point de calcul du moment n'est pas précisé. On calcule le moment sur le conducteur aller. Quid du conducteur retour ? Et surtout, ce n'est pas ainsi qu'on calcule le moment qui s'exerce sur le rotor d'une machine synchrone ! En effet, il faut calculer le couple électromagnétique en dérivant l'énergie magnétique stockée dans l'entrefer de la machine, ce qui est d'ailleurs proposé dans la suite du problème

Q26. L'énoncé attend probablement qu'on dise que, dans une machine inversée, le rayon R est plus grand que dans une machine "classique" car $R(\text{rotor}) > R(\text{stator})$ et que cela permet d'augmenter le couple moteur ?

Étude d'une machine dipolaire

Q27. On a le graphe suivant :



Pour obtenir le champ représenté à la figure 17, il faut ajouter à la spire centrale deux spires alimentées par le même courant et décalées de $\pm \frac{\pi}{6}$ par rapport à la spire centrale.

Q28.

$$\vec{B}_{p=1} = K I_{Seff} \sqrt{2} [\cos \theta \cos(\omega_s t) + \sin \theta \sin(\omega_s t)] \vec{e}_r = K I_{Seff} \sqrt{2} \cos(\theta - \omega_s t) \vec{e}_r = \vec{B}_{p=1}$$

Ce champ a la forme d'une onde progressive se propageant selon les θ croissants à la vitesse angulaire ω_s . Le maximum de $\vec{B}_{p=1}$ se déplace au cours du temps en tournant dans le sens trigonométrique : $\vec{B}_{p=1}$ est donc bien un champ tournant.

Q29. $M_{aR} = M_0 \cos(\theta_R)$ avec θ_R l'angle entre le conducteur aller de la bobine (a) et celui du rotor.

Par analogie, on aura $M_{bR} = M_0 \cos(\theta_{R-b})$ avec $\theta_{R-b} = \theta_R - \frac{\pi}{2}$ l'angle entre le conducteur aller de la bobine (b) et celui du rotor.

$$\text{Ainsi, } M_{bR} = M_0 \cos\left(\theta_R - \frac{\pi}{2}\right) = M_0 \sin(\theta_R)$$

Si on ne considère qu'un conducteur pour la bobine (a) et la bobine (b), on remarque que le flux du champ créé par l'un est nul à travers l'autre car le champ est perpendiculaire au vecteur surface de la spire :

$$\Phi_{a \rightarrow b} = \iint_{(S_b)} \vec{B}_a \cdot d^2\vec{S}_b = 0$$

Ainsi, on aura $M_{ab} = 0$.

Q30. a)

$$W_{magn} = \frac{1}{2} L_s i_a^2 + \frac{1}{2} L_s i_b^2 + \frac{1}{2} L_R I_R^2 + M_{aR} i_a I_R + M_{bR} i_b I_R = \frac{1}{2} L_s (i_a^2 + i_b^2) + \frac{1}{2} L_R I_R^2 + M_0 I_R [i_a \cos(\theta_R) + i_b \sin(\theta_R)]$$

b)

$$\Gamma_{em} = \left(\frac{\partial W_{magn}}{\partial \theta_R} \right)_{i \text{ fixés}} = M_0 I_R [-i_a \sin(\theta_R) + i_b \cos(\theta_R)] = M_0 I_R I_{Seff} \sqrt{2} [-\cos(\omega_s t) \sin(\theta_R) + \sin(\omega_s t) \cos(\theta_R)]$$

soit

$$\Gamma_{em} = M_0 I_R I_{Seff} \sqrt{2} [\sin(\omega_s t - \theta_R)]$$

Q31. Le couple électromagnétique s'écrit : $\Gamma_{em} = M_0 I_R I_{Seff} \sqrt{2} [\sin((\omega_s - \Omega)t - \theta_0)]$

Ainsi, le couple moyen n'est non nul que si $\Omega = \Omega_1 = \omega_s$

Le couple moyen s'écrit alors : $\langle \Gamma_{em} \rangle = -M_0 I_R I_{Seff} \sqrt{2} \sin(\theta_0)$

Q32. Le couple est maximal quand $\sin(\theta_0) = -1$ soit $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ et alors $\Gamma_{max} = M_0 I_R I_{Seff} \sqrt{2}$

CCINP PSI 2024 – Machine asynchrone

Étude d'une machine à plusieurs paires de pôles

Q33. L'expression donnée pour $\Gamma_{em,p}$ n'est pas cohérente avec celle de la partie précédente. En effet, ici, $\theta_R = \Omega t - \theta_0$ alors que précédemment, on avait $\theta_R = \Omega t + \theta_0$. C'est vraiment dommage qu'un sujet de concours accumule un aussi grand nombre d'erreurs ou d'imprécisions ...

$$\langle \Gamma_{em,p} \rangle \neq 0 \Rightarrow \omega_s = p \Omega \Rightarrow \Omega = \Omega_p = \frac{\omega_s}{p}$$

On a alors

$$\Gamma_{em,p} = p M_0 I_R I_{Seff} \sqrt{2} \sin(p\theta_0)$$

Q34. Le réducteur permet de diminuer la vitesse de rotation du moteur. Ici, en augmentant p , on peut diminuer la vitesse de rotation du moteur donc obtenir le même effet qu'avec le réducteur : on peut donc s'en affranchir ou l'alléger.

La fréquence des courants statoriques est alors :

$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{p\Omega_p}{2\pi} = 10 \times \frac{90 \times 2\pi}{2\pi \times 60} = 15 \text{ Hz}$$

27) Comme le champ est obtenu par superposition et décalage de n champ, il suffit de dénombrer le nombre de "pôles" - 1 d'où 6 spires.

35) En régime permanent, la solution homogène a convergé, il ne reste que la solution particulière harmonique d'où

$$\omega_R = \omega_s - \Omega$$

36) On note $\underline{i}_{R1} = \underline{i}_{R10} \exp j\omega t$

$$\text{on a donc } L_R j\omega \underline{i}_{R1} + R_R \underline{i}_{R1} = -jA \exp j\omega t$$

$$\text{d'où } \underline{i}_{R10} = \frac{-jA}{R_R + jL_R\omega}$$

$$\text{d'où } I_{R\max} = |\underline{i}_{R10}| = \frac{|A|}{\sqrt{R_R^2 + (L_R\omega)^2}}$$

$$= \frac{\pi B_R I_{s\max} (\omega_s - \Omega)}{\sqrt{R_R^2 + (L_R(\omega_s - \Omega))^2}}$$

Dans le cas où $\omega_s = \Omega$, $I_{R\max} = 0$, il n'y a donc pas de phénomène d'induction (les phénomènes se compensent) et donc pas de couple électromagnétique a priori.

Il faut donc $\omega_s \neq \Omega$ pour qu'il y ait fonctionnement, d'où le terme de machine asynchrone.

37) Par superposition: $\vec{B}_R = \vec{B}_{R1} + \vec{B}_{R2}$

$$= K_R I_{R\max} \left(\cos(\theta - \theta_R) \sin(\omega_R t - \varphi) - \sin(\theta - \theta_R) \cos(\omega_R t - \varphi) \right) \vec{e}_r$$

$$= K_R I_{R\max} \sin(\omega_R t - \varphi - \theta + \theta_R) \vec{e}_r$$

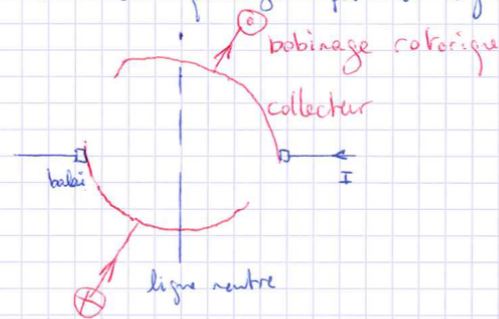
$$= K_R I_{R\max} \sin((\omega_R + \Omega)t - \theta - \varphi) \vec{e}_r$$

le champ tourne à la vitesse angulaire $\omega_R + \Omega$

Le champ est donc synchrone au champ statorique.

38) Dans une machine à courant continu, les 2 champs restent fixes dans le référentiel statorique, ils sont donc synchrone.

le synchronisme est assuré par l'inversion du courant dans le rotor lors du passage par la ligne neutre



39) la puissance joule dissipée dans un bobinage du rotor s'écrit $P_{JR1} = \frac{1}{2} I_{R\max}^2 R_R$ avec $I_{R\max}$ déterminé @36

$$\text{d'où } P_{JR} = P_{JR1} + P_{JR2} = R_R I_{R\max}^2$$

$$\text{On obtient alors que } P_s = R_R \frac{I_{R\max}^2}{\omega_s - \Omega}$$

$$\text{d'où } P_r = P_{JR} \cdot \frac{1}{g}$$

40) Au démarrage le glissement est maximal et vaut $g=1$.

En ne considérant que les pertes Joule, le rendement

$$\text{s'écrit } \eta = \frac{P_s}{P_s + P_{JR}} = \frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{g} + 1} = \frac{1}{g + 1}$$

le rendement est donc meilleur pour g proche de 0.

35) En régime permanent, la solution homogène a convergé, il ne reste que la solution particulière harmonique d'où

$$\underline{\omega_r} = \underline{\omega_s} - \Omega$$

36) On note $\underline{i}_{r1} = \underline{i}_{r10}$ car jw

$$\text{on a donc } L_r j\omega \underline{i}_{r1} + R_r \underline{i}_{r1} = -jA \text{ car jw}$$

$$\text{d'où } \underline{i}_{r10} = \frac{-jA}{R_r + jL_r \omega}$$

$$\text{d'où } I_{rmax} = |\underline{i}_{r10}| = \frac{|A|}{\sqrt{R_r^2 + (L_r \omega)^2}}$$

$$= \frac{\pi B_r I_{smax} (\omega_s - \Omega)}{\sqrt{R_r^2 + (L_r (\omega_s - \Omega))^2}}$$

Dans le cas où $\omega_s = \Omega$, $I_{rmax} = 0$, il n'y a donc pas de phénomène d'induction (les phénomènes se compensent) et donc pas de couple électromagnétique a priori.

Il faut donc $\omega_s \neq \Omega$ pour qu'il y ait fonctionnement, d'où le terme de machine asynchrone.

37) Par superposition: $\vec{B}_r = \vec{B}_{r1} + \vec{B}_{r2}$

$$= K_r I_{rmax} \left(\cos(\theta - \theta_r) \sin(\omega_r t - \varphi) - \sin(\theta - \theta_r) \cos(\omega_r t - \varphi) \right) \vec{e}_r$$

$$= K_r I_{rmax} \sin(\omega_r t - \varphi - \theta + \theta_r) \vec{e}_r$$

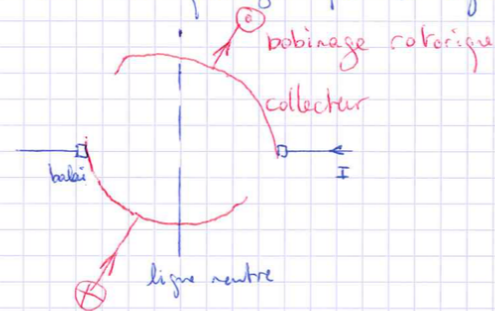
$$= K_r I_{rmax} \sin((\omega_r + \Omega)t - \theta - \varphi) \vec{e}_r$$

le champ tourne à la vitesse angulaire $\omega_r + \Omega$

le champ est donc synchrone au champ statorique.

38) Dans une machine à courant continu, les 2 champs restent fixes dans le référentiel statorique, ils sont donc synchrones.

le synchronisme est assuré par l'inversion du courant dans le rotor lors du passage par la ligne neutre



39) la puissance joule dissipée dans un bobinage du rotor s'écrit $P_{JR} = \frac{1}{2} I_{rmax}^2 R_r$ avec I_{rmax} déterminé @36

$$\text{d'où } P_{JR} = P_{JR1} + P_{JR2} = R_r I_{rmax}^2$$

$$\text{On obtient alors que } P_s = R_r \frac{I_{rmax}^2}{\omega_s - \Omega}$$

$$\text{d'où } P_r = P_{JR} \cdot \frac{1}{g}$$

40) Au démarrage le glissement est maximal et vaut $g=1$.

En ne considérant que les pertes Joule, le rendement

$$\text{s'écrit } \eta = \frac{P_s}{P_s + P_{JR}} = \frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{g} + 1} = \frac{1}{g+1}$$

le rendement est donc meilleur pour g proche de 0.