

DS de Physique 26 Mars 2025 – 4H

PSI - Lycée du Parc des Loges

Calculatrices autorisées

Téléphonie Mobile

La téléphonie mobile a envahi notre quotidien. En janvier 2020, on comptait 5,19 milliards d'utilisateurs de mobile dans le monde, ce qui représente 67 % de la population totale. La croissance des utilisateurs de téléphone mobile a été plus rapide que celle de la population mondiale sur la même période.

Si le « mobile » a une utilité en tant que téléphone, ce n'est clairement pas sa seule fonction ! Ainsi, 92 % des utilisateurs de téléphones mobiles s'en servent pour accéder à internet. D'après le rapport digital 2020 de *We are social*, un utilisateur passe en moyenne 3 heures et 22 minutes par jour sur internet à partir de son téléphone portable. Cela représente une augmentation de 10 % par rapport à l'année 2019.

Ce sujet porte sur quelques aspects de la téléphonie mobile. La première partie s'intéresse à la protection du téléphone face au piratage par « contact ». La deuxième partie est consacrée à l'étude de la fonctionnalité dictée des smartphones dite « speech-to-text ». Une dernière partie explore le principe de la réception d'un signal par un téléphone mobile et notamment le problème de réception en milieu urbain. Les trois parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Certaines données numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé.

I Protection des données bancaires par un conducteur

La protection du téléphone portable contre le piratage est devenue essentielle. Cette partie s'intéresse à la mise en place d'une protection simple en insérant une feuille d'aluminium dans la pochette du téléphone. En effet, les puces à distance (NFC-RFID) possèdent une antenne et un convertisseur de signal. L'antenne perçoit le signal de fréquence d'environ 14 MHz, émis à distance par le terminal et le convertisseur transforme ce signal en signal « horloge » qui sert à synchroniser les échanges de la puce et du terminal. À quelques mètres, on peut donc solliciter une puce NFC-RFID et recueillir ses données relativement aisément. Pour se prémunir d'un piratage, il suffit de protéger son téléphone à l'aide d'un feuillet constitué par exemple d'aluminium.

On considère l'aluminium comme un conducteur ohmique, homogène, isotrope et non magnétique. En son sein, les charges mobiles sont des électrons animés d'une vitesse d'ensemble $\vec{v}(t)$ soumis à l'action d'un champ électrique variable $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. Les électrons libres, de masse m et de charge $-e$, sont soumis en outre selon le modèle de Drude, à une force $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(t)$ où τ est une constante physique traduisant les interactions avec l'ensemble du réseau cristallin, sa valeur est d'environ $1,0 \times 10^{-14}$ s. Le poids de ces charges est négligé. Le conducteur est immobile dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.

I.A – Loi d'ohm locale

- Q 1.** Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ des électrons.
- Q 2.** Déterminer, en régime forcé, une expression de la vitesse sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp(i\omega t)$ où $\vec{v}_0$ est l'amplitude vectorielle complexe de la vitesse que l'on exprimera en fonction des données du problème.
- Q 3.** On note n^* la densité volumique, supposée constante, d'électrons libres. Déterminer l'expression, en notation complexe, du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$.
- Q 4.** Montrer alors que l'on peut établir une loi d'ohm locale complexe en considérant que la conductivité électrique du milieu $\underline{\gamma}$ peut s'écrire, en notation complexe, sous la forme $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\tau\omega}$ où γ_0 correspond à la conductivité électrique « statique » et $g(\omega)$ à une fonction de la pulsation. On exprimera ces deux grandeurs en fonction des données de l'énoncé.
- Q 5.** Déterminer la valeur de la fréquence limite f_{lim} en dessous de laquelle on peut considérer que la loi d'ohm en notation réelle peut s'écrire sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$.
- Q 6.** Peut-on écrire la loi d'Ohm sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ pour les communications NFC-RFID ?
- Q 7.** Pour les communications NFC-RFID, estimer numériquement le rapport entre la norme du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ et celle du vecteur densité de courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ présent dans l'équation de Maxwell-Ampère que l'on rappellera.

- Q 8.** En déduire une simplification de la formulation de l'équation de Maxwell-Ampère. Comment appelle-t-on cette approximation ?

I.B – Propagation d'une onde électromagnétique

On considère désormais une onde électromagnétique plane progressive et harmonique (OPPH) $\vec{E}_c(z, t)$ de pulsation ω se propageant dans le conducteur précédemment considéré qui occupe le demi-espace $z \geq 0$. En notation complexe, cette onde s'écrit

$$\vec{E}_c(z, t) = E_{0,c} \exp(i(\omega t - k_z z)) \vec{e}_x$$

L'amplitude $E_{0,c}$ est supposée constante et le vecteur d'onde $\vec{k}_t = k_t \vec{e}_z$ est complexe de telle sorte que $k_t = \alpha + i\beta$ avec α et β réels.

- Q 9.** On suppose que la loi d'Ohm s'écrit sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$, montrer que dans le conducteur la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ peut être considérée comme nulle au bout d'un temps τ' que l'on exprimera en fonction des données du problème. On pourra notamment utiliser l'équation de conservation de la charge, que l'on ne cherchera pas à démontrer, et établir l'équation vérifiée par $\rho(M, t)$.

- Q 10.** Justifier que l'on peut supposer que le milieu est électriquement neutre. Écrire dans ces conditions l'équation de Maxwell-Gauss dans un conducteur ohmique.

- Q 11.** En supposant que les valeurs des fréquences utilisées permettent d'utiliser les versions simplifiées des équations de Maxwell identifiées dans les questions 8 et 10, établir l'équation suivante pour le champ électrique $\vec{E}_c$ au sein du conducteur

$$\Delta \vec{E}_c(z, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial \vec{E}_c(z, t)}{\partial t} = \vec{0}.$$

Exprimer D en fonction des grandeurs du problème et préciser son unité.

- Q 12.** Montrer alors que la relation de dispersion, pour le milieu considéré, s'écrit

$$k_t^2 = -i\omega\mu_0\gamma_0.$$

- Q 13.** Déterminer l'expression des grandeurs α et β en choisissant $\alpha > 0$, c'est-à-dire en considérant une propagation vers les z croissants.

- Q 14.** Montrer alors que le champ électrique, en notation réelle, dans le conducteur peut se mettre sous la forme

$$\vec{E}_c(z, t) = E_{0,c} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x.$$

Exprimer δ en fonction des données de l'énoncé.

- Q 15.** Proposer une représentation soignée de la composante suivant x , $E_{c,x}$, de $\vec{E}_c(z, t)$ à t fixé, en fonction de z pour le demi-espace $z \geq 0$. On fera apparaître la grandeur δ sur le schéma.

- Q 16.** Comment appelle-t-on δ ? Quelle est sa signification physique ? Donner la valeur de δ pour les ondes électromagnétiques de communication NFC-RFID.

I.C – Réflexion sur un conducteur ohmique

L'onde $\vec{E}_c(z, t)$ présente dans le conducteur précédent est due à la présence d'une OPPH incidente se propageant dans le vide, supposée occuper le demi-espace $z < 0$, vers les z croissants de même pulsation ω de la forme, en notation complexe, $\vec{E}_i(z, t) = \underline{E}_{0,i} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$, avec $k = \frac{\omega}{c} > 0$. L'onde incidente atteint le conducteur en $z = 0$.

- Q 17.** Proposer une expression du champ électrique réfléchi d'amplitude complexe $\underline{E}_{0,r}$.

- Q 18.** En exploitant les relations de continuité du champ électrique à la surface d'un dioptre, déterminer une relation reliant les coefficients complexes de transmission $\underline{t} = \frac{E_{0,c}}{E_{0,i}}$ et de réflexion $\underline{r} = \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}}$ en amplitude de l'onde électromagnétique.

- Q 19.** Déterminer l'expression des champs magnétiques incident $\vec{B}_i(z, t)$, réfléchi $\vec{B}_r(z, t)$ et transmis $\vec{B}_c(z, t)$.

- Q 20.** En exploitant les relations de continuité du champ magnétique à la surface d'un dioptre et en considérant les courants surfaciques nuls, déterminer une nouvelle relation entre $\underline{t}$ et $\underline{r}$.

- Q 21.** En combinant les deux expressions précédentes de $\underline{t}$ et $\underline{r}$, montrer que

$$\underline{r} = \frac{k\delta - 1 + i}{k\delta + 1 - i} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2k\delta}{k\delta + 1 - i}.$$

- Q 22.** Que deviennent les expressions de $\underline{t}$ et $\underline{r}$ dans le cas où l'aluminium est considéré comme un conducteur parfait ? Que dire de l'efficacité de la protection de données avec un conducteur parfait ?

Q 23. En réalité, l'aluminium n'est pas un conducteur parfait. Déterminer la valeur du coefficient de transmission en énergie $T = 1 - |r|^2$ pour des ondes électromagnétiques de communication NFC-RFID. Conclure sachant qu'une feuille d'aluminium standard de cuisine a une épaisseur $a = 0,020$ mm.

III Réception d'une communication téléphonique

III.B – Problème de réception du signal

« Je n'ai plus de réseau ! » Voilà une phrase que tous les utilisateurs de mobiles ont prononcée un jour ! On cherche ici à illustrer quelques difficultés liées à la réception d'un signal en téléphonie mobile.

Pour simplifier l'étude, l'onde émise par la station de base sera considérée comme plane et polarisée rectilignement suivant l'axe des x . Son champ électrique s'écrit, en notation complexe, $\underline{\vec{E}}_i(z, t) = E_{0,i} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} > 0$ et $\omega = 2\pi f$ pulsation de l'onde du champ électrique. On suppose que l'amplitude $E_{0,i}$ est une grandeur réelle. La fréquence est égale à 3500 MHz.

On suppose qu'un obstacle (par exemple un immeuble) situé en $z = L$ réfléchit l'onde sans l'atténuer et sans modifier sa polarisation (Figure 10).

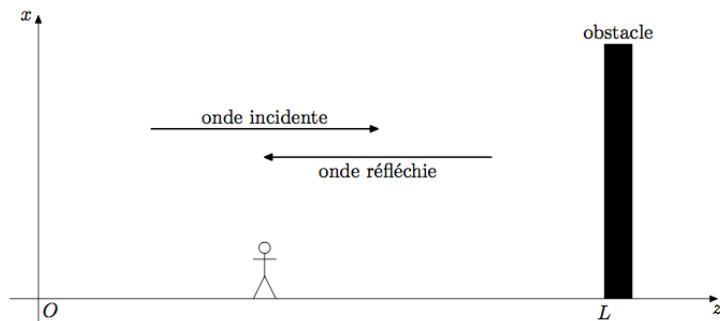


Figure 10 Obstacle sur le trajet d'une onde de téléphonie mobile

Q 50. En utilisant les relations de passage en $z = L$ pour le champ électrique et en modélisant l'obstacle par un métal conducteur parfait, déterminer l'expression complexe du champ électrique de l'onde réfléchie $\underline{\vec{E}}_r$ supposée de même fréquence et de même direction que l'onde incidente.

Q 51. En déduire l'expression du champ électrique résultant $\underline{\vec{E}}_{\text{tot}}$. Comment qualifie-t-on ce type d'onde ? On admet que la puissance P reçue par l'utilisateur (via son téléphone mobile en réseau 5G) est proportionnelle à la valeur moyenne dans le temps du carré du champ électrique. L'établissement de la communication est impossible (plus de réseau !) si la puissance reçue est inférieure à une puissance seuil notée P_{seuil} qui correspond au dixième de la valeur moyenne spatiale (c'est-à-dire suivant z) de la puissance reçue P .

Q 52. Déterminer la durée moyenne des coupures lorsque le téléphone mobile est porté par un piéton qui se déplace à la vitesse de $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ suivant l'axe des z croissants, puis lorsque le téléphone est porté par un passager d'une automobile se déplaçant à $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ dans le sens des z croissants. Commenter les résultats obtenus.

En milieu urbain, notamment à cause des divers obstacles, les retards des trajets réfléchis des ondes par rapport aux trajets directs sont de l'ordre de $\Delta t = 0,5 \mu\text{s}$.

Q 53. Quelle est la valeur typique de $L - z$ associée à ce retard ?

On suppose que pour cette valeur typique de $L - z$ et pour la fréquence f , le signal reçu par le mobile de la part de la station de base a une puissance nulle. On fait alors varier la fréquence f de $\pm \Delta f$.

Q 54. Déterminer numériquement la valeur minimale à donner à Δf pour obtenir une puissance supérieure à P_{seuil} .

Q 55. En vous appuyant sur les questions précédentes, proposer au moins une méthode permettant de lutter contre les coupures réseau.

Données

Données générales

Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Données sur l'aluminium métallique

Conductivité en régime permanent	$\gamma_0 = 38 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique relative	$\epsilon_r = 1$
Perméabilité magnétique relative	$\mu_r = 1$

Formulaire

Les grandeurs complexes sont soulignées d'un trait et on note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Le symbole $\times$ désigne l'opération produit vectoriel. L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Analyse vectorielle

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z$$

Relation de continuité des champs électromagnétiques

En présence de charges surfaciques σ , la composante normale du champ électrique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante tangentielle est toujours continue

$$\vec{E}_{2,n} - \vec{E}_{1,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{2,t} - \vec{E}_{1,t} = \vec{0}$$

En présence de courants surfaciques $\vec{j}_s$, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante normale est toujours continue

$$\vec{B}_{2,t} - \vec{B}_{1,t} = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{2,n} - \vec{B}_{1,n} = \vec{0}$$

Un actionneur électromécanique

Partie I - Principe de l'actionneur électromécanique linéaire synchrone

Ce type d'actionneur qui s'affranchit de tout dispositif de transmission mécanique classique est utilisé en robotique. Il est aussi particulièrement bien adapté aux trains à sustentation magnétique comme le SCMaglev japonais (**figure 1**) qui peut atteindre des vitesses de l'ordre de 600 km/h.



Figure 1 - SCMaglev

I.1 - Multi-pôle magnétique

On considère (**figure 2**) un circuit magnétique composé de deux plaques de fer supposées infinies et distantes d'un entrefer e . Des conducteurs électriques, de diamètre négligeable, parcourus par des courants d'intensité I sont placés à l'interface fer-air de la plaque inférieure. Ils sont distants d'une longueur L . Deux conducteurs voisins sont parcourus par des courants opposés comme le montre le sens des flèches sur la **figure 2**.

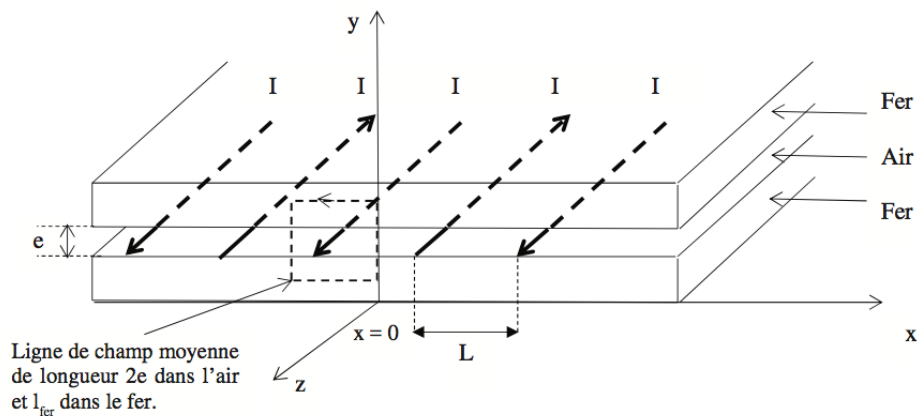


Figure 2 - Circuit magnétique

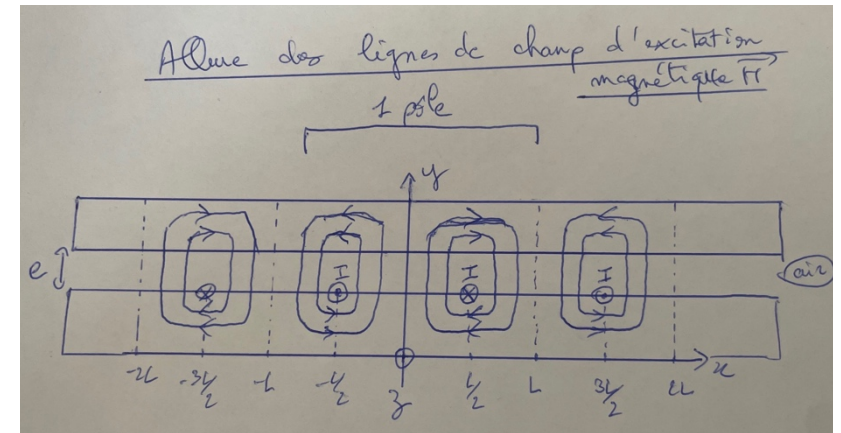


Figure 2 bis – Allure des lignes de champ

Les lignes de champ sont effectivement perpendiculaires aux interfaces fer-air et elles sont canalisées par les parties ferromagnétiques de l'actionneur.

Pour l'application des théorèmes de l'électromagnétisme, on utilisera une ligne de champ particulière, appelée ligne de champ moyenne, représentée sur la **figure 2**.

D'un point de vue magnétique, le fer sera assimilé à un matériau magnétique doux de perméabilité relative μ_r . L'air sera assimilé au vide de perméabilité magnétique μ_0 .

De façon générale, on note $\vec{H}$, le champ d'excitation magnétique.

On notera respectivement $\vec{H}_{\text{air}}$ et $\vec{H}_{\text{fer}}$ les champs d'excitation magnétique dans l'air et dans le fer, $\vec{B}_{\text{air}}$ et $\vec{B}_{\text{fer}}$ les champs magnétiques dans l'air et dans le fer.

Q1. Préciser les unités de μ_0 et de μ_r , ainsi qu'un ordre de grandeur de μ_r pour le fer.

Q2. En analysant les symétries des sources, montrer que le champ d'excitation magnétique H appartient au plan (xOy) . Par analyse des invariances, de quelles variables dépend le champ d'excitation H . Donner sa forme générale.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux champs H et B produit par un conducteur électrique unique, parcouru par le courant I et placé en $x = -L/2$, par exemple.

Q3. Ecrire, dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique.

On considère la ligne de champ moyenne, de longueur $2e$ dans l'air et l_{fer} dans le fer, **figure 2**. Déterminer, en considérant H_{air} et H_{fer} comme uniforme, l'équation liant H_{air} , H_{fer} , e , l_{fer} et I .

Conformément à la **figure 2 bis**, on considère que dans l'entrefer les champs H et B ont une unique composante selon $\vec{e}_y$.

Q4. On a représenté sur la **figure 3** un tube de champ magnétique traversant l'entrefer.

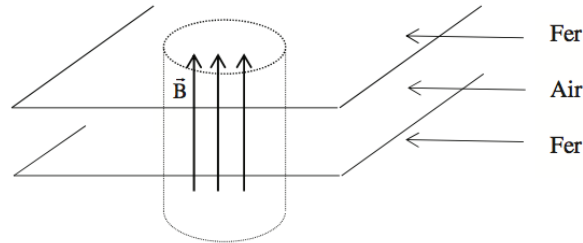


Figure 3 - Tube de champ magnétique

Quelle propriété de $\vec{B}$ permet d'affirmer que $B_{\text{fer}} = B_{\text{air}}$?

Ecrire l'équation de Maxwell qui traduit cette propriété.

Dans la suite du problème, cette valeur commune sera notée B .

Q5. Rappeler les équations liant d'une part H_{air} et B , puis d'autre part H_{fer} et B .

En remarquant que $\frac{l_{\text{fer}}}{\mu_r} \ll e$, déterminer l'expression de B en fonction de e , I et de μ_0 .

Dans ce type de moteur, a-t-on intérêt à avoir un entrefer large ou réduit ?

Q6. On considère maintenant l'ensemble de la distribution de conducteurs produisant le champ magnétique B .

Montrer que la propriété précédente de B , citée en Q4, impose $\vec{B} = B(x) \vec{e}_y$ dans l'entrefer.

Ce champ est-il périodique selon x ? Justifier. Si oui, en préciser la période.

En analysant les symétries, justifier la position des plans de changement de signe de B . Le plan $x = 0$ présente-t-il une particularité qui permet d'en déduire la parité de $B(x)$?

On considérera que la norme de B est uniforme sur chaque portion de longueur L , voir **figure 2bis**.

Tracer alors l'allure de la fonction $B(x)$.

I.2 - Multi-pôle magnétique sinusoïdal

La répartition du courant à l'interface inférieure air-fer, n'est pas constituée, par pôle, d'un seul conducteur aller et d'un seul conducteur retour, espacés d'une longueur L , mais d'un ensemble de deux groupements de trois conducteurs aller et de trois conducteurs retour centrés sur les abscisses $x = -L/2$ et $x = L/2$, comme le montre la **figure 4**. Les trois conducteurs d'un même groupement sont équidistants de $\Delta L < L/4$.

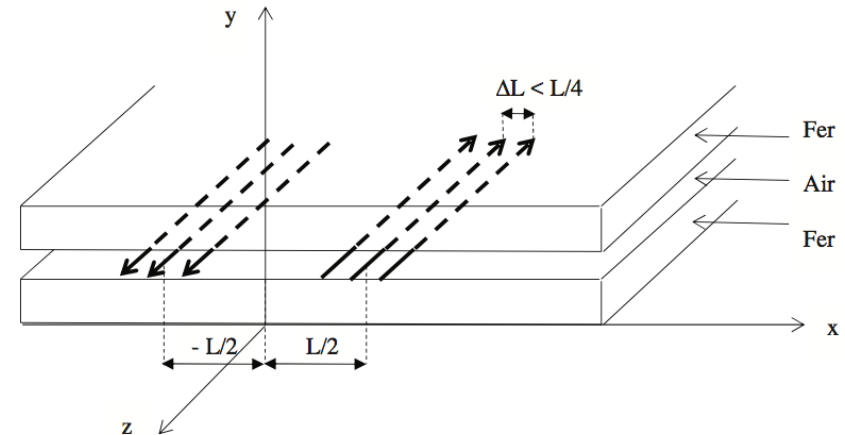
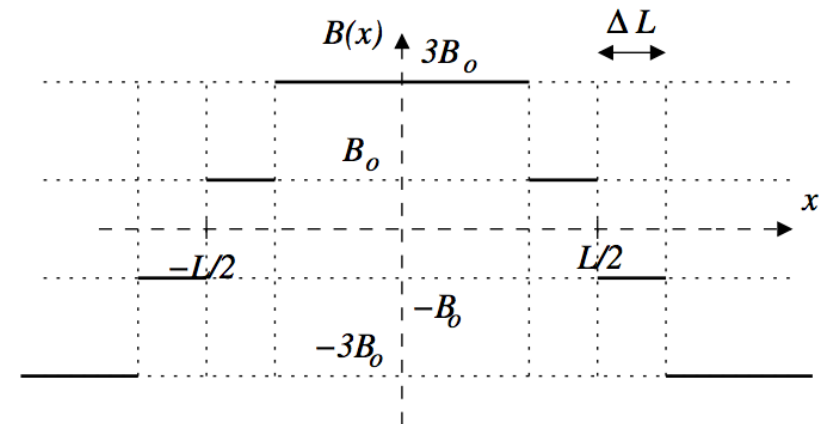


Figure 4 - Multi-pôle magnétique quasi-sinusoïdal

Q7. Montrer que l'allure du champ magnétique adopte la forme suivante :



Dans toute la suite du problème, on admettra qu'en choisissant bien le nombre et la répartition des conducteurs aller et retour, le champ magnétique dans l'entrefer est de la forme $\vec{B} = KI \cos(\frac{\pi x}{L}) \vec{e}_y$ où K est une constante positive.

I.3 - Onde magnétique plane progressive sinusoïdale

On considère maintenant la superposition de deux multi-pôles magnétiques sinusoïdaux décalés spatialement d'une distance de $L/2$.

Ils sont respectivement alimentés par des courants sinusoïdaux, de même amplitude I_s et de même pulsation ω_s , en quadrature de phase, de sorte que $i_1(t) = I_s \cos(\omega_s t)$ et $i_2(t) = I_s \sin(\omega_s t)$.

Le premier multi-pôle crée ainsi dans l'entrefer un champ magnétique $\vec{B}_1 = Ki_1(t) \cos(\frac{\pi x}{L}) \vec{e}_y$ alors que le second crée un champ magnétique $\vec{B}_2 = Ki_2(t) \cos(\frac{\pi(x-L/2)}{L}) \vec{e}_y$.

Q8. Déterminer en fonction de K , I_s , L et ω_s , l'expression du champ magnétique créé par cette double répartition du courant dans l'entrefer. Dans quel sens et à quelle vitesse, notée $\vec{v}_s$, se propage cette onde magnétique ?

Q9. Que faut-il faire pour inverser le sens de propagation de cette onde magnétique ?
Application numérique : dans le cadre d'une application au train à sustentation magnétique, déterminer la valeur de la distance inter-polaire L permettant d'obtenir une vitesse $v_s = 500$ km/h avec une alimentation à la fréquence $f_s = 100$ Hz.

I.4 - Actionneur linéaire synchrone

L'actionneur linéaire synchrone (**figure 5**) est constitué :

- d'une partie statique, analogue à celle étudiée précédemment, qui crée une onde magnétique sinusoïdale progressive $\vec{B}(x, t) = B_0 \cos(\omega_s t - kx) \vec{e}_y$;
- d'une partie mobile assimilable :
 - d'un point de vue électrique, à une spire rectangulaire orientée, parcourue par un courant électrique permanent I , imposé par un dispositif extérieur. Elle a pour longueur $L = 2a$ suivant l'axe des x et pour largeur $2b$ suivant l'axe des z ,
 - d'un point de vue magnétique, à un dipôle de moment $\vec{M} = 2LbI \vec{e}_y$.

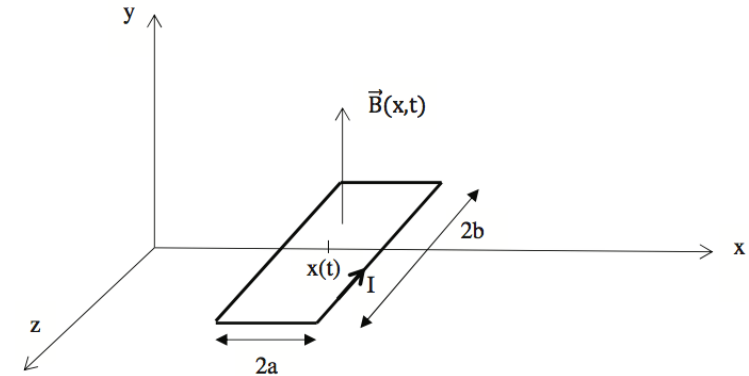


Figure 5 - Actionneur linéaire synchrone

Cette spire est en mouvement supposé rectiligne et considéré comme uniforme à la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$. On note x_0 la position initiale du centre de la spire qui a donc pour abscisse, à la date t , $x(t) = x_0 + vt$.

Q10. La force qui s'exerce sur la spire, à la date t , est de la forme $\vec{F}(t) = F_x(t) \vec{e}_x$. On admettra que :

$$F_x(t) = (\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x})_{\text{centre du dipôle}}.$$

Exprimer $F_x(t)$ en fonction de b , L , I , B_0 , ω_s , k , v , x_0 et t .

Q11. En faisant une analogie avec vos connaissances sur les machines synchrones, déterminer la valeur de la force $\vec{F}(t)$, maintenant notée $\bar{F}$, en fonction de b , L , I , B_0 , k et x_0 .

Exprimer en fonction de k , la valeur de x_0 pour laquelle la composante F_x de cette force est maximale.

Formules trigonométriques :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$