

Téléphonie mobile – Réflexion des ondes électromagnétiques sur un conducteur Centrale MPI 2023

1) PFD d'un électron "moyen" dans RI galiléen / poids négligé

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \approx -\frac{e\vec{E}}{\gamma}$$

PF: $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} \nabla \times \vec{E}$ (pour) et donc $\|\vec{B}\| \sim \frac{1}{\omega} \|\nabla \times \vec{E}\|$

et $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{v}{v_p}$ si $v \ll v_p$ alors on peut négliger la partie magnétique de la force de Lorentz $\rightarrow$ on le suppose dans la suite.

et alors: $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$

2) en RSF: $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$ $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i\omega t}$ $\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow i\omega \vec{v}$

$\vec{v} = \frac{-\frac{e}{m} \vec{E}}{i\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{-\frac{eE_0}{m} \vec{e}_x}{1 + i\omega\tau}$ $\vec{v}_0 = \frac{-\frac{eE_0}{m} \vec{e}_x}{1 + i\omega\tau}$

3) $\vec{j} = -ne\vec{v}$ car seuls les électrons sont mobiles. d'où

loi d'Ohm locale: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où $\gamma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$ avec $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$

5) $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ si $\omega\tau \ll 1 \Rightarrow f \ll f_{lim} = \frac{1}{2\pi\tau} \sim 1,6 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$

6) NFC - RFID: $f = 1,4 \cdot 10^7 \text{ Hz} \ll f_{lim}$ (borderline grandeur) $\Rightarrow \vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ est une excellente approximation

7) (NA): $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ $\frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}\|} \sim \frac{\sigma_0 \omega |\vec{E}|}{\sigma_0 |\vec{E}|} \sim \frac{\sigma_0 \omega}{\sigma_0} \sim 1,0 \cdot 10^{-11} \ll 1$

on peut négliger le courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant le courant $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ dans l'aluminium à 14 MHz.

8) (NA) $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ $\rightarrow$ on retrouve l'équation de (NA) de la statique / équation valable dans le cadre notamment de l'ARQS magnétique.

9) équation locale de conservation de la charge: $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. et $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ (NA) $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
d'où $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \rho = 0 \rightarrow$ de temps $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0}$ et

10) $\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\rightarrow 0$ en ggs τ , et en RSF $(i\omega + \frac{1}{\tau})\rho = 0$ donc $\rho = 0$ en RSF / $\sigma \sim 2 \cdot 10^{19} \text{ S/m}$
on peut ainsi considérer le conducteur comme neutre et $\text{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow -i\omega\epsilon_0 \vec{E} = 0$ (TE)

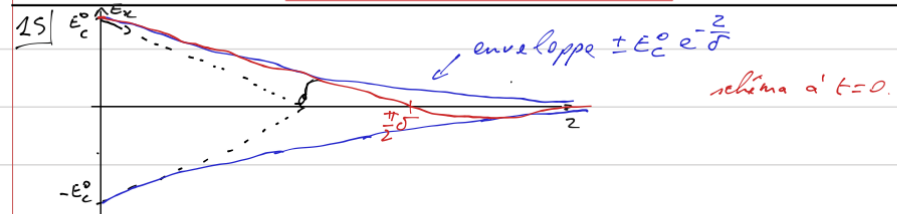
11) $\text{rot}(\text{NA}): \text{rot}(\text{rot}(\vec{B})) = \mu_0 \sigma_0 \text{rot}(\vec{E}) \stackrel{(NA)}{=} -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{rot}(\text{rot}(\vec{B})) = \nabla(\text{div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B}$
on a bien $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ où $\nu = \frac{1}{\mu_0 \sigma_0}$ $[C] = m^2 \cdot s^{-2}$

12) $\Delta \vec{E} = -k_c^2 \vec{E} / \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \epsilon_0$ d'où $k_c^2 = -i\omega \mu_0 \sigma_0$

13) $k_c = e^{-i\frac{\pi}{2}} \mu_0 \sigma_0 \omega \Rightarrow k_c = -i e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \sigma_0 \omega = -(1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}}$

propagation $\text{mln} + \vec{u}_z \Rightarrow \text{Re}(k_c) > 0$ soit $k_c = \frac{1-i}{\delta}$ où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$

14) on injecte k_c dans l'expression de $\vec{E}_z$: $\vec{E}_z = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_z$ on prend la partie réelle.
 $\vec{E}_z(z,t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \vec{e}_z$



16) δ : profondeur de peau: distance caractéristique d'atténuation de l'onde dans le conducteur. il n'y a plus d'onde au delà de ggs δ AN: $\delta = 22 \mu\text{m}$ pour l'aluminium à 14 MHz

17) $\vec{E}_r = E_0 \exp(i(\omega t + k_c z)) \vec{e}_x$ ne propage dans la direction $-\vec{u}_z$.

18) $\vec{E}$ et $\vec{B}$ continus à l'interface $z=0$ (schematisation volumique / $\epsilon_r = 1$ pour conducteur).
d'où $E_{0i} + E_{0r} = E_{0c}$ (continuité de $\vec{E}$ en $z=0$). soit $1 + \Gamma = \frac{E_0}{E_0}$ (2)

19) $\vec{B}_i = \vec{u}_z \wedge \vec{E}_{0i} = \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - k_c z)} \vec{u}_y$ / $\vec{B}_r = -\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r = -\frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t + k_c z)} \vec{u}_y$
OPPH / vide.
et $\vec{B}_c = \frac{k_c}{\omega} \vec{E}_c = \frac{(1-i)}{\omega\delta} E_0 e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{u}_y$
(NF) / OPPH $k = \frac{\omega}{c}$ vide

20) la continuité de $\vec{B}$ en $z=0$ dicte: $\frac{E_0}{c} - \frac{E_{0r}}{c} = \frac{(1-i)}{\omega\delta} E_0$ soit $1 - \Gamma = \frac{(1-i)}{k\delta} \frac{E_0}{E_0}$ (2)

21) (2)+(2) $\Rightarrow 2 = \frac{E_0}{E_0} (1 + \frac{1-i}{k\delta}) = \frac{E_0}{E_0} (\frac{k\delta + 1 - i}{k\delta})$ et $\Gamma = \frac{2k\delta}{k\delta + 1 - i}$ ok!

pour $\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = \frac{k\delta - 1 + i}{k\delta + 1 - i}$ ok!

22) conducteur parfait: $k\delta \rightarrow \infty \Rightarrow \Gamma = 1$ et $\Gamma = -1$ l'onde est totalement réfléchie.
protection des données parfaite!

23) $|\Gamma|^2 = \frac{(k\delta - 1)^2 + 1}{(k\delta + 1)^2 + 1} \Rightarrow T = 1 - |\Gamma|^2 = \frac{(k\delta + 1)^2 - (k\delta - 1)^2}{(k\delta + 1)^2 + 1} = \frac{4k\delta}{(k\delta + 1)^2 + 1}$

AN: $k = \frac{\omega}{c} = 2\pi f = 0,29 \text{ m}^{-1}$ / $k\delta = 6,4 \cdot 10^{-6} \ll 1 \Rightarrow T \approx 2k\delta$ (0,2 en kS) $T \approx 1,3 \cdot 10^{-5} \ll 1$

23) suite: pour une feuille d'aluminium c'est plus compliqué car l'interface vide | alu | vide et épaisseur $d_{\text{alu}} = 20 \text{ nm}$ n.s.

on peut faire une analogie avec barrière épaisse pour effet tunnel en quantique et facteur de transmission global $T_{\text{tot}} \propto T^2 e^{-\frac{2a}{\delta}} \approx 3 \cdot 10^{-11} \ll 1$.
l'écrantage par une feuille d'aluminium pour $f \approx 14 \text{ THz}$ est excellent!

50) $\vec{E}_T = \vec{E}_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x$ CL: annulation de $(\vec{E}_i + \vec{E}_r)$ sur le conducteur parfait car tangentiel:
 $(\vec{E}_i + \vec{E}_r)(z=L) \cdot \vec{u}_y = 0$ soit
 $E_0 e^{-ikL} + E_0 e^{ikL} = 0 \quad \boxed{E_0 = -E_0 e^{-2ikL}}$

51) $\vec{E}_{\text{tot}} = E_0 e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz} e^{-2ikL}) \vec{e}_x$ on factorise par l'arc montré e^{-ikL} .
 $\vec{E}_{\text{tot}} = E_0 e^{i(\omega t - kL)} (e^{ik(L-z)} - e^{-ik(L-z)}) \vec{e}_x$
 $2i \sin(k(L-z))$ partie réelle de $\vec{E}_{\text{tot}}$.

$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}} = 2E_0 \sin(\omega t - kL) \sin(k(L-z)) \vec{e}_x}$

il s'agit d'une onde stationnaire (car variables spatiales et temporelles séparées).

52) $P = \langle E_{\text{tot}}^2 \rangle = 4KE_0^2 \underbrace{\langle \sin^2(\omega t - kL) \rangle}_{\frac{1}{2}} \sin^2(k(L-z)) = 2K E_0^2 \sin^2(k(L-z))$ moyenne d'après le théorème
 $P_{\text{moy}} = \frac{1}{20} \times 2KE_0^2 \sin^2(k(L-z))$

soit $\boxed{P_{\text{moy}} = \frac{KE_0^2}{10}}$ ainsi: $\boxed{P = 20 P_{\text{moy}} \sin^2(k(L-z))}$

posons $u = k(L-z)$

$U_{\text{max}} / \sin^2(U_{\text{max}}) = \frac{1}{20}$

$\sin(U_{\text{max}}) = \frac{1}{\sqrt{20}} \quad U_{\text{max}} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right) \approx 0,226$

$\Delta U = 2U_{\text{max}} \approx 0,45 \Rightarrow$ la $\Delta z_{\text{pas de réseau}} = 0,45 \Rightarrow \boxed{\Delta z_{\text{pas}} = \frac{0,45}{2\pi} = 6,1 \text{ mm}}$

et $\Delta t_{\text{pas}} = \frac{\Delta z_{\text{pas}}}{v} \Rightarrow \boxed{\Delta t_{\text{piéton}} = 7,4 \text{ ms}} \quad \boxed{\Delta t_{\text{voiture}} = 0,44 \text{ ms}}$ durée de perte du réseau.

dans les deux cas $\frac{1}{\Delta t}$ est dans le spectre audible $\Rightarrow$ gêne importante de la communication.

53) $\Delta t = \frac{2(L-z)}{c} \Rightarrow \boxed{(L-z) = \frac{c \Delta t}{2} \approx 75 \text{ m}}$ odg ok. (facteur 2 car aller-retour)

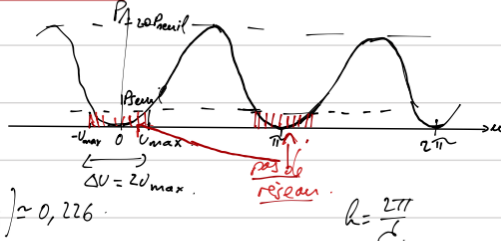
54) $\omega \rightarrow \omega + \Delta\omega \Rightarrow k \rightarrow k + \Delta k$ on a $k(L-z) = n\pi$. (U_{max} défini Q52).
 $(k + \Delta k)(L-z) = n\pi + U_{\text{max}}$

54) suite: ainsi $\Delta k_{\text{min}}(L-z) = U_{\text{max}}$ soit $\frac{\Delta\omega_{\text{min}}(L-z)}{c} = U_{\text{max}}$

et $\frac{L-z}{c} = \frac{\Delta t}{2} \quad \Delta\omega = 2\pi\Delta f$ d'où $\Delta f_{\text{min}} \Delta t = \frac{U_{\text{max}}}{\pi} = 7,2 \cdot 10^{-2}$

ou encore $\boxed{\Delta f_{\text{min}} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Hz}}$

55) on peut éviter la perte de réseau en utilisant plusieurs porteurs de fréquences voisines, soit les "trous" ne se superposent pas.



Un actionneur électromécanique CCNIP PSI 2017

Q1. Dans le système international d'unités, μ_0 la perméabilité magnétique du vide s'exprime en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$, μ_r est sans unité. Pour le fer $\mu_r \approx 10^4 - 10^5$.

Q2. Invariance par translation selon Oz donc $\vec{B}(x, y)$ et $\vec{H}(x, y)$.

Q3. Équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique en ARQS : $\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_\ell$, avec $\vec{j}_\ell$ le vecteur densité de courant libre.

Le contour retenu étant orienté conforme au sens du courant dans le fil, le théorème d'Ampère conduit à :

$$H_{\text{air}} \times 2e + H_{\text{fer}} \times \ell_{\text{fer}} = I$$

Q4. Le champ magnétique est à **flux conservatif** ; cette affirmation est la traduction intégrale de l'équation locale de **Maxwell-Thomson** : $\text{div} \vec{B} = 0$.
Le flux du champ magnétique étant conservé sur la section droite du tube et le **tube ayant une section uniforme**, on en déduit : $B = B_{\text{air}} = B_{\text{fer}}$.

Q5. Dans l'air : $B = \mu_0 H_{\text{air}}$; dans le fer (matériau doux) : $B = \mu_0 \mu_r H_{\text{fer}}$.

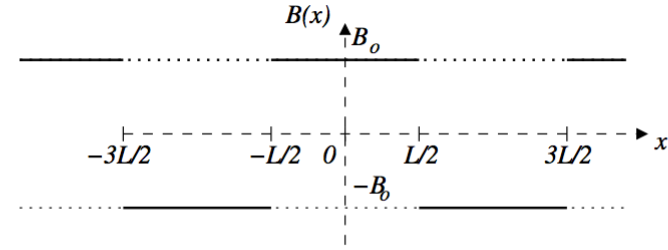
On reporte ces expressions dans la relation issue de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$I = \frac{B}{\mu_0} \times 2e + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \times \ell_{\text{fer}} \underset{\ell_{\text{fer}}/\mu_r \ll e}{\approx} \frac{B}{\mu_0} \times 2e \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2e}$$

On privilégie un **entrefer étroit** qui permet d'augmenter la valeur du champ magnétique ; il ne faut cependant pas atteindre la saturation du matériau qui rendrait les formules linéaires inapplicables.

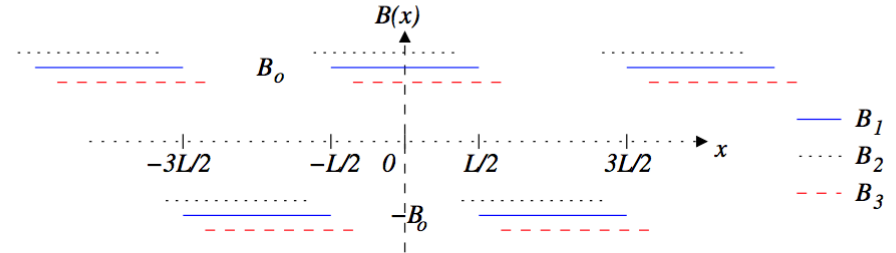
Q6. L'expression obtenue précédemment montre que le champ magnétique est uniforme sur la zone $x \in]-L/2, L/2[$ de valeur $B_o = \frac{\mu_0 I}{2e}$.

De plus tout plan perpendiculaire à $\vec{u}_x$ et contenant un fil est un plan de symétrie des courants, c'est donc un plan d'antisymétrie du champ dont la composante suivant $\vec{u}_y$ change de signe pour $x = L/2 + pL$ avec p in $\mathbb{Z}$.

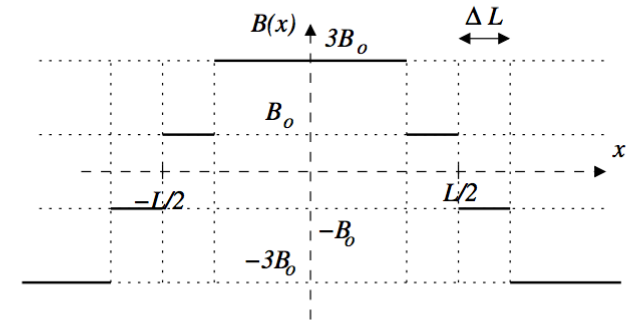


Plus simplement, on peut retrouver ce résultat en considérant les lignes de champ moyennes centrées sur chacun des fils.

Q7. La distribution proposée correspond à trois fois la distribution précédente avec des décalages de $\pm \Delta L$ pour deux d'entre elles (les champs ont même amplitude mais les courbes ont été légèrement décalées verticalement par souci de lisibilité).



Les milieux étant supposés linéaires, les équations de Maxwell étant elles-mêmes linéaires, le champ résultant est la somme de trois champs magnétiques dus à chacune des distributions prises séparément $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$, ce qui donne finalement pour l'allure du champ :



Q8. En remarquant que : $\cos\left(\frac{\pi}{L}\left[x - \frac{L}{2}\right]\right) = \cos\left(\frac{\pi}{L}x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$:

$$\vec{B} = KI_s \left[\cos(\omega_s t) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin(\omega_s t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \vec{u}_y$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{B} = KI_s \cos\left(\omega_s t - \frac{\pi x}{L}\right) \vec{u}_y = KI_s \cos\left(\omega_s \left[t - \frac{\pi x}{L\omega_s}\right]\right) \vec{u}_y}$$

Il s'agit d'une onde de champ magnétique de célérité $\boxed{\vec{V}_s = \frac{L\omega_s}{\pi} \vec{u}_x}$ se propageant dans le **sens des x croissants** (forme en $t - x/V_s$).

Q9. En inversant le sens du courant dans le second enroulement, on a, toutes choses égales par ailleurs, $i_2(t) = -I_s \sin(\omega_s t)$, ce qui conduit à :

$$\boxed{\vec{B} = KI_s \cos\left(\omega_s \left[t + \frac{\pi x}{L\omega_s}\right]\right) \vec{u}_y}$$

Ceci caractérise bien une onde de propagation dans le sens des x décroissants.

Application numérique :

$$L = \frac{\pi V_s}{\omega_s} = \frac{\pi V_s}{2\pi f_s} = \frac{V_s}{2f_s} = \frac{500/3,6}{2 \times 100} \Rightarrow \boxed{L = 0,70 \text{ m}}$$

Q10. À l'aide de la formule proposée $F_x(t) = 2LbIB_o k \sin(\omega_s t - kx_0 - kv t)$

$$\Rightarrow \boxed{F_x(t) = 2LbIB_o k \sin[(\omega_s - kv)t - kx_0]}$$

Q11. Par analogie avec le moteur synchrone, on cherche une **force en moyenne non nulle** ce qui impose une relation entre la vitesse de l'onde magnétique et la vitesse du cadre, c'est à dire ici :

$$\boxed{\omega_s = kv}$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{F} = -2LbIB_o k \sin(kx_0) \vec{u}_x}$$

La **norme** de la force est maximale pour $\boxed{kx_0 = \frac{\pi}{2} + p\pi \text{ avec } p \in \mathbb{Z}}$.