

DS de Physique 26 Mars 2025 – 4H
PSI - Lycée du Parc des Loges Difficulté supérieure

Calculatrices autorisées

Le sujet comporte deux parties indépendantes.

Étude physique d'un capteur de position

Le contrôle d'un système ou d'un processus physique présent dans un grand nombre de dispositifs technologiques nécessite de connaître à chaque instant, le plus précisément possible, un certain nombre de grandeurs physiques intervenant dans ce contrôle.

Ces grandeurs sont donc mesurées par des capteurs qui convertissent la grandeur physique mesurée en une grandeur électrique utilisée afin de réguler le processus.

La réalisation de capteurs doit prendre en compte divers éléments tels que la précision, la miniaturisation, le poids, le traitement numérique des données, etc.

Ce problème étudie dans un premier temps le principe physique selon lequel le capteur inductif linéaire « LVDT » (Linear Variable Differential Transformer) convertit un déplacement de position en une grandeur électrique (parties I et II). Dans un deuxième temps, il étudie le conditionnement de cette grandeur électrique en une tension proportionnelle au déplacement (partie III). Dans un dernier temps, il développe une application utilisant ce capteur (partie IV).

Pour les applications numériques, on ne conservera au plus que 2 chiffres significatifs.

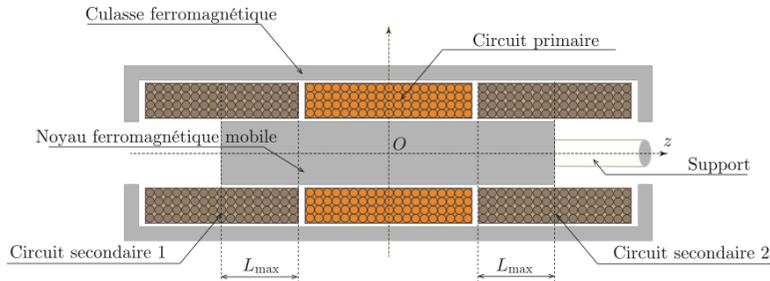


FIGURE 1 – Schéma descriptif du LVDT.

Le LVDT est un transformateur différentiel comportant trois circuits, un circuit primaire et deux circuits secondaires. Les bornes homologues de ces circuits, mentionnées sur la figure 2 à l'aide d'un point, sont telles que les courants algébriques entrants par ces bornes génèrent un flux magnétique algébrique orienté selon \vec{u}_z .

Les deux circuits secondaires sont identiques, constitués de fils de cuivre bobinés autour du noyau et portent n spires par unité de longueur.

Le circuit magnétique du transformateur est formé d'une culasse cylindrique externe ferromagnétique et d'un noyau cylindrique ferromagnétique de section S , de rayon a , relié à un support non magnétique qui permet de le translater selon l'axe Oz . Le déplacement de ce noyau cylindre par rapport à la position de référence représentée en figure 1 est limité à $\pm L_{\max}$.

L'ensemble présente une symétrie de révolution autour de l'axe Oz et on repérera l'espace par le système de coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Le but de ce dispositif est de fournir une grandeur électrique permettant de caractériser le déplacement du cylindre.

Dans toute la suite, on supposera que le matériau magnétique constituant le noyau cylindrique et la culasse est parfait, de perméabilité magnétique μ_r infinie et de conductivité électrique nulle. Les matériaux non magnétiques (air, support, cuivre) ont une perméabilité magnétique relative égale à 1.

La figure 2 représente le système pour un déplacement algébrique z du centre C du cylindre tel $\vec{OC} = z\vec{u}_z$. Sur l'exemple de la figure 2, $z > 0$ et, de façon générale, z vérifie $|z| < L_{\max}$. Le circuit primaire est alimenté par la tension $u_p(t)$ et parcouru par le courant d'intensité $i_p(t)$. Les deux circuits secondaires sont connectés en série et la tension utile vaut $u_s = u_2 - u_1$ (voir figure 2).

La tension d'excitation u_p est sinusoïdale de fréquence f variant de 20 Hz à 20 kHz. La position du noyau magnétique affecte la répartition du champ magnétique et modifie les inductances mutuelles entre les circuits secondaires et le circuit primaire.

On notera :

- L_p , l'inductance propre du circuit primaire,
- M_1 , l'inductance mutuelle entre le circuit secondaire 1 et le circuit primaire,
- M_2 , l'inductance mutuelle entre le circuit secondaire 2 et le circuit primaire.

Le courant dans les deux circuits secondaires est supposé nul.

On désignera par état de référence, la configuration du dispositif où le circuit primaire est alimenté par la tension $u_p = U_p \sin(\omega t)$ et où la position du noyau ferromagnétique est telle que $z = 0$.

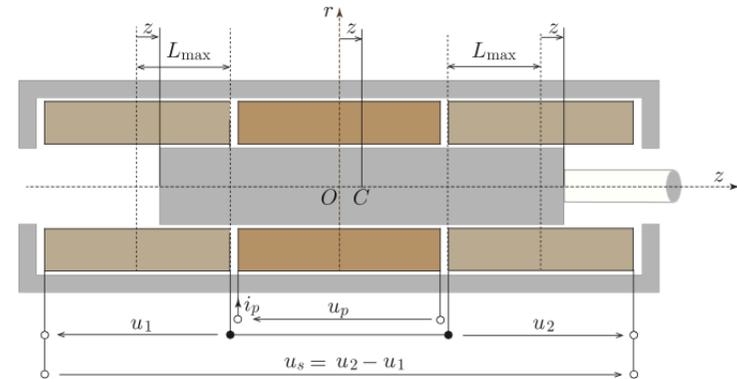


FIGURE 2 – Définition des paramètres

I Étude de l'état de référence

Dans tout le problème, on supposera la fréquence f suffisamment faible pour que l'étude s'inscrive dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP).

- – 1. Énoncer dans le cadre de ce régime l'équation Maxwell-Ampère reliant le vecteur excitation magnétique \vec{H} et \vec{j} , on précisera la nature de \vec{j} . En déduire la forme générale de l'énoncé du théorème d'Ampère.
- – 2. Énoncer l'équation de Maxwell-Thomson (également appelée Maxwell-Flux) et en déduire la propriété correspondante du flux du champ magnétique.
- – 3. Quelle est la direction du champ magnétique en tout point du plan passant par O et orthogonal à \vec{u}_z ?
- – 4. En un point M de coordonnées (r, θ, z) quelconques, que peut-on dire des coordonnées (B_r, B_θ, B_z) du champ magnétique compte tenu des symétries du problème ?

La résolution numérique des équations locales permet de représenter, en figure 3, quelques lignes du champ magnétique dans un plan de coupe contenant l'axe Oz , pour un courant $i_p > 0$.

- – 5. Le résultat de la simulation numérique est-il compatible avec ceux des questions 3 et 4 ? On justifiera précisément la réponse.

La figure 4 fournit, en échelles arbitraires (E.A. sur la figure) et indépendantes, les variations des composantes $B_z = \vec{B} \cdot \vec{u}_z$ et de $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$ en fonction de z à la distance r de l'axe tel que $0 < r < a$.

- – 6. Justifier les propriétés de parité de ces deux composantes du champ.
 □ – 7. Représenter sommairement l'allure d'une ligne de champ. Après avoir orienté cette ligne, justifier le signe des composantes du champ magnétique observé en figure 4.

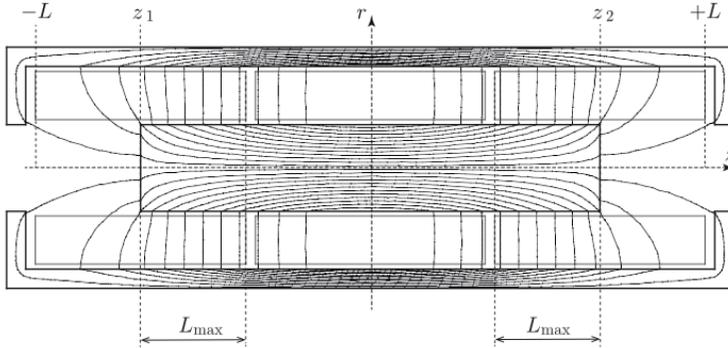


FIGURE 3 – Lignes de champ pour un noyau centré obtenues par simulation numérique.

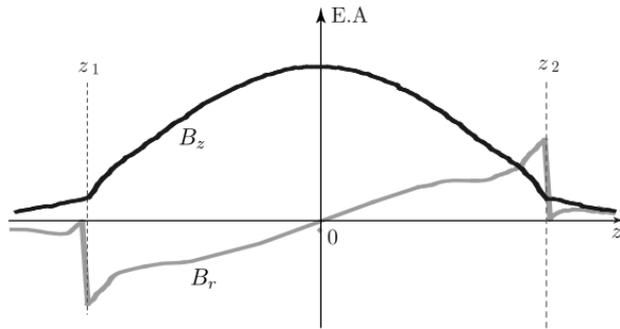


FIGURE 4 – Composantes B_r (en grisé) et B_z (en noir) en r tel que $0 < r < a$.

On remarque que $|B_r|$ devient très faible sur une très courte distance juste après z_2 et juste avant z_1 .

- – 8. Justifier cette observation par un calcul littéral.

Peut-on, sur la figure 3, observer ce phénomène à d'autres endroits ?

Afin de déterminer l'expression des inductances mutuelles, on souhaite modéliser simplement le champ magnétique. Pour cela, grâce à la simulation numérique, sur la figure 5, on a représenté en trait plein la courbe des variations de $B_z/B_{z,\max}$ évaluée en $r = 0$ en fonction de z .

- – 9. Quels éléments observés en figures 3 et 5 permettent de justifier que l'on puisse considérer le champ magnétique comme uniforme au voisinage du centre du noyau.
 □ – 10. Quels éléments observés en figure 3 permettent d'expliquer la diminution de la composante $\vec{B} \cdot \vec{u}_z$ du champ observée en figure 5 lorsqu'on se rapproche des bords du noyau ?

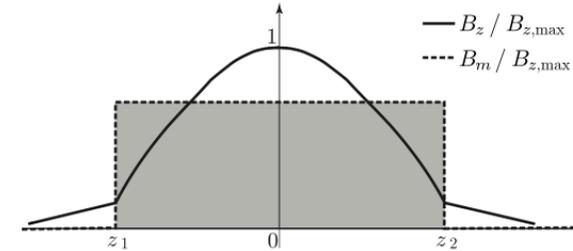


FIGURE 5 – Composante B_z sur l'axe Oz .

Dans un premier modèle, on assimile le champ magnétique axial au profil représenté en traits pointillés en figure 5. En effet, on supposera que :

- $\boxed{H_1}$: si $z_1 < z < z_2$ et $r < a$, alors la composante $\vec{B} \cdot \vec{u}_z$ du champ magnétique est uniformément égale à B_m , sa valeur moyenne sur l'axe Oz dans le noyau. On posera $B_m = K i_p$, où K est une constante caractéristique du système ;
- $\boxed{H_2}$: si $z < z_1$ ou $z > z_2$ alors pour tout $r < a$ on a $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = 0$;
- $\boxed{H_3}$: en tout point compris entre le noyau et la culasse, tels que $-L < z < L$, alors $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = 0$.

- – 11. Dans le cadre de ces hypothèses simplificatrices, montrer que les deux inductances mutuelles M_1 et M_2 sont identiquement égales à une même valeur notée M_0 . Exprimer M_0 en fonction de S , K , n et L_{\max} .
- – 12. Application numérique : On donne la résistance du circuit primaire $R_p = 100 \Omega$ et l'inductance du circuit primaire $L_p = 6 \text{ mH}$. Pour $U_p = 10 \text{ V}$, on mesure aux bornes de chacun des deux circuits secondaires non connectés entre eux une tension d'amplitude $1,5 \text{ V}$ pour une fréquence de 5 kHz . Calculer la valeur de M_0 . On prendra $10\pi \sim 30$ et $\sqrt{42 \cdot 10^3} \sim 205$.

II Déplacement du noyau

On étudie désormais le LVDT dans l'état représenté en figure 2 où le centre C du cylindre est déplacé de z par rapport à l'état de référence, soit $\vec{OC} = z\vec{u}_z$.

Le circuit primaire est toujours alimenté par la tension $u_p = U_p \sin(\omega t)$ et parcouru par le courant d'intensité i_p . Le courant circulant dans les circuits secondaires connectés en série est nul.

La figure 6 représente le tracé des lignes de champ magnétique dans un plan de coupe contenant l'axe Oz , obtenu par résolution numérique des équations locales dans les mêmes conditions que celui de la figure 3, pour un courant $i_p > 0$. Le seul changement réside dans la position du noyau.

La cartographie des lignes de champ dans le noyau étant très semblable à celle de la figure 3, on conserve les hypothèses $\boxed{H_1}$, $\boxed{H_2}$ et $\boxed{H_3}$ correspondantes.

Deuxième problème

Trains à sustentation électromagnétique

Un train à sustentation magnétique utilise les forces magnétiques pour léviter au-dessus de la voie ; il n'est donc pas en contact avec des rails, contrairement aux trains classiques. Ce procédé permet de supprimer la résistance au roulement et d'atteindre des vitesses élevées.

Il existe actuellement deux types de trains à grande vitesse à sustentation magnétique :

- un train à sustentation électromagnétique dans lequel le train lévite par attraction grâce à des aimants (Transrapid développé en Allemagne) ;
- un train à sustentation électrodynamique dans lequel le train lévite par répulsion grâce aux courants de Foucault induits par le déplacement du train (SCMaglev développé au Japon).

La seule réalisation commerciale du Transrapid est à l'heure actuelle la ligne de 30 kilomètres qui fonctionne depuis 2004 entre Shanghai et son aéroport international de Pudong. Le trajet s'effectue en moins de 8 minutes, à la vitesse moyenne de 245 km/h. Sur ce parcours le train atteint la vitesse de 430 km/h, il a la capacité d'accélérer de 0 à 350 km/h en 2 minutes.

La première version commerciale du SCMaglev doit relier en une heure Tokyo et Osaka, distantes de 400 km à vol d'oiseau. L'ouverture du premier tronçon de la ligne (Tokyo-Nagoya) est prévu en 2027 avec une vitesse de pointe sur le parcours de 505 km/h. En 2015 une rame de test de sept voitures a atteint la vitesse de 603 km/h, établissant ainsi l'actuel record de vitesse pour un train.

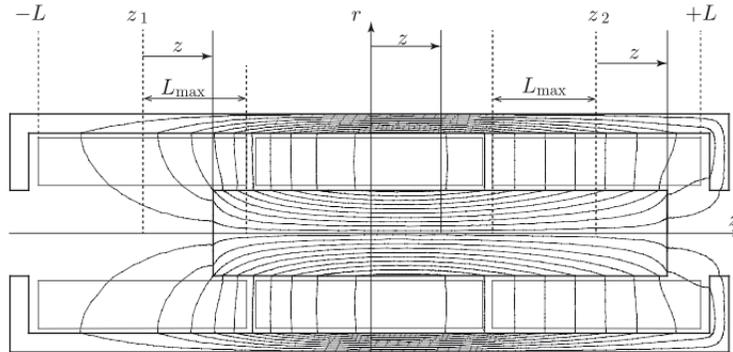


FIGURE 6 – Lignes de champ pour un noyau décentré.

- – 13. Dans le cadre de ce modèle, montrer que si $|z| < L_{\max}$ alors L_p est indépendante de z .
- – 14. Déterminer l'inductance mutuelle $M_1(z)$ en fonction de M_0 , z et L_{\max} .
- – 15. De même, déterminer l'inductance mutuelle $M_2(z)$ en fonction de M_0 , z et L_{\max} .
- – 16. Dédire des résultats précédents que la tension différentielle à vide du circuit secondaire s'écrit sous la forme $u_s = u_2 - u_1 = \lambda M_0 \frac{z}{L_{\max}} \frac{di_p}{dt}$, dans laquelle on précisera la valeur de la constante λ .
- – 17. Pour un courant i_p sinusoïdal fixé, quel est le paramètre de la tension u_s , noté A , permettant de mesurer z ? Tracer l'allure des variations de A en fonction de z ? Comment peut-on discerner le cas $z > 0$ et $z < 0$? Connaissez-vous un procédé permettant de générer une tension proportionnelle à ce paramètre ?



Transrapid



SCMaglev

Figure 1

Nous étudions ici quelques aspects du fonctionnement de ces trains, en accordant — sauf en partie I — une attention particulière au Transrapid.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Des données utiles, un formulaire et deux annexes sont regroupés en fin d'énoncé.

II La sustentation électromagnétique du Transrapid

II.A – Modélisation du champ magnétique dans l'entrefer

La figure 2 présente la rame du Transrapid sur son rail et, dans un plan de coupe, le détail du système de sustentation. Ce système est constitué d'un électroaimant dont le circuit magnétique est composé :

- d'une portion de rail (1) en matériau ferromagnétique doux de perméabilité relative μ_r ;
- d'une portion (2) solidaire de la rame, constituée du même matériau ferromagnétique, sur lequel sont bobinées N spires alimentées par un courant d'intensité $i(t)$.

Les deux portions sont séparées par un entrefer de largeur z variable. La section S du matériau ferromagnétique dans les portions (1) et (2) du circuit magnétique est supposée commune aux portions (1) et (2), constante le long du circuit magnétique et carrée de côté a : $S = a^2$. (C) est une ligne de champ magnétique du circuit (figure 2).

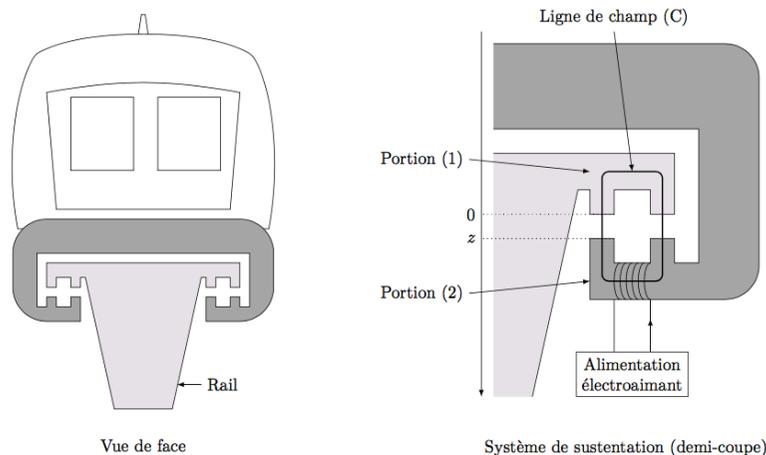


Figure 2 Transrapid et son système de sustentation

Les hypothèses d'étude sont les suivantes :

- les milieux ferromagnétiques sont supposés doux ;
- on néglige les pertes par courants de Foucault ;
- toutes les lignes de champ sont canalisées par le circuit magnétique.

On note :

- \vec{B}_1 le champ magnétique dans la portion (1) ;
- \vec{B}_2 le champ magnétique dans la portion (2) ;
- \vec{B}_a le champ magnétique dans les entrefers ;
- z la largeur, variable, des entrefers entre les deux portions ferromagnétiques du circuit magnétique (l'origine O sur l'axe descendant (O, \vec{u}_x) est choisie sur le rail fixe) ;
- ℓ la longueur moyenne de la partie de la ligne de champ (C) située à l'intérieur des portions ferromagnétiques (1) et (2) du circuit.

II.A.1)

Q 6. Définir l'excitation magnétique \vec{H} et donner l'expression reliant le vecteur \vec{H} au champ magnétique \vec{B} dans la matière et à l'aimantation \vec{M} de la matière.

Q 7. Rappeler les équations de Maxwell valables dans un milieu ferromagnétique dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

II.A.2)

Q 8. Quelle propriété vérifie le flux du champ magnétique dans le circuit magnétique ?

Q 9. En déduire les relations liant \vec{B}_1 , \vec{B}_2 et \vec{B}_a .

Q 10. À quelle condition, supposée vérifiée ici, les lignes de champ restent-elles parallèles dans l'entrefer ?

II.A.3)

Q 11. Rappeler les caractéristiques d'un milieu ferromagnétique doux.

Q 12. Quelle relation lie alors le champ magnétique \vec{B} et l'excitation magnétique \vec{H} dans un tel milieu ?

Q 13. Définir la perméabilité relative et en donner un ordre de grandeur pour un milieu ferromagnétique doux.

II.A.4)

Q 14. Écrire le théorème d'Ampère sur le contour (C).

Q 15. En déduire B_2 en fonction de ℓ , z , N , i , μ_0 et μ_r .

Q 16. Simplifier cette écriture en utilisant la question 12.

II.B – Lévitación par attraction

On rappelle que la force électromagnétique s'exerçant sur une partie mobile d'un circuit magnétique, parcouru par un courant d'intensité i , en translation suivant la direction \vec{u}_z s'écrit $\vec{F}_{em} = \left(\frac{\partial E_m}{\partial z} \right)_i \vec{u}_z$ où E_m est l'énergie magnétique.

Q 17. Montrer que l'inductance propre $L(z)$ du bobinage peut s'écrire sous la forme $L(z) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2z}$.

Q 18. Rappeler l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine d'inductance $L(z)$ parcourue par le courant d'intensité $i(t)$.

Q 19. En déduire la force électromagnétique F_{em} s'exerçant sur la rame.

Q 20. Calculer la masse m qui peut ainsi être mise en sustentation à une distance $\delta = 10$ mm du rail pour un électroaimant alimenté avec un courant d'intensité $i_e = 10$ A.

Q 21. Une rame a une masse d'environ 180 tonnes. En déduire le nombre d'électroaimants nécessaires pour la sustentation de la rame. On donne : $N = 1000$, $S = 0,50$ m².

Q 22. Montrer que le système de sustentation électromagnétique est instable.

III Capteur de position

L'instabilité de l'équilibre de la rame en sustentation nécessite l'asservissement en position de l'entrefer. Cet asservissement est réalisé en utilisant un capteur de position. On se propose dans cette partie d'étudier le principe d'un capteur de position à inductance variable.

III.A – Capteur à entrefer variable « push-pull »

La figure 3 décrit le schéma de principe d'un capteur inductif à entrefer variable dans un montage « push-pull ». Le capteur comprend un circuit magnétique composé d'un noyau solidaire du rail fixe et de deux bobines B1 et B2 sur deux noyaux ferromagnétiques en vis-à-vis, solidaires de la rame. Les bobines B1 et B2 du capteur sont identiques et placées de façon symétrique par rapport au rail lorsque la rame est à l'équilibre (figure 3 à gauche). Ces bobines B1 et B2 sont indépendantes des bobines assurant la lévitation. Elles sont constituées de N_c spires de surface S .

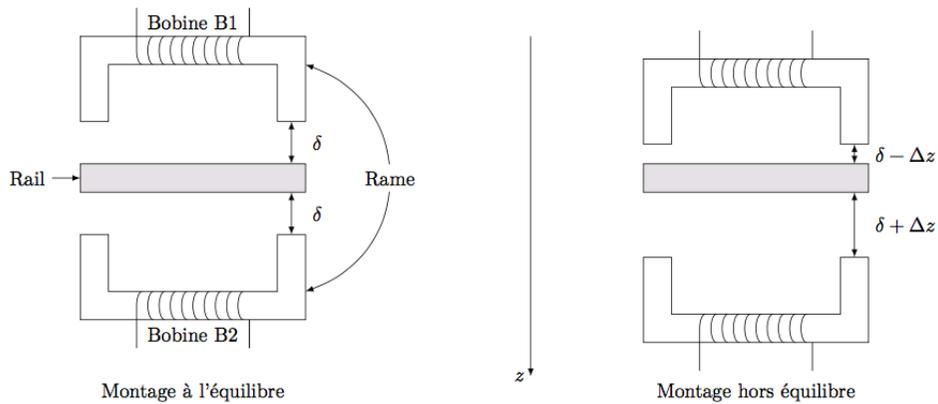


Figure 3

- Q 23.** Écrire l'inductance L_e des bobines B1 et B2 lorsque la rame est à l'équilibre. On envisage une variation Δz de la position du train par rapport à la position d'équilibre $z_e = \delta$ (figure 3 à droite), en considérant $\Delta z \ll \delta$.
- Q 24.** Écrire les inductances L_1 et L_2 de chacun des bobines B1 et B2 en se limitant au terme du premier ordre en $\Delta z/\delta$.

III.B - Mesure des variations d'inductance

Les bobines B1 et B2 sont alimentées par un générateur délivrant une tension électrique $e(t) = E \cos(\omega t)$, de pulsation ω , en série avec une résistance R (figure 4). On néglige ici les résistances des deux bobines.

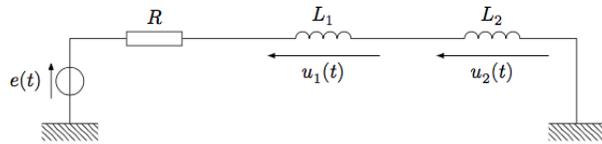


Figure 4 Alimentation du capteur

- Q 25.** Déterminer les expressions des tensions électriques complexes \underline{u}_1 et \underline{u}_2 en fonction de R , L_1 , L_2 , ω et \underline{e} . Ces tensions sont placées à l'entrée du montage présenté figure 5. L'ALI est supposé idéal en fonctionnement linéaire.

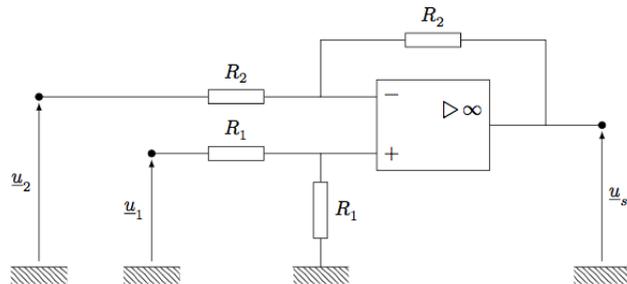


Figure 5 Montage soustracteur

- Q 26.** Montrer que la tension électrique de sortie du montage peut s'écrire sous la forme $\underline{u}_s = K(\underline{u}_1 - \underline{u}_2)$ où K est une constante que l'on déterminera en fonction des composants du montage.
- Q 27.** Exprimer la fonction de transfert complexe $\underline{T}(j\omega)$ sous la forme $\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = T_0 \frac{j(\omega/\omega_0)}{1 + j(\omega/\omega_0)}$ où T_0 et ω_0 sont des fonctions de L_e , R , Δz et δ , que l'on déterminera.
- Q 28.** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $\underline{T}(j\omega)$.
- Q 29.** De quel type de filtre s'agit-il ?

- Q 30.** Quelle est la signification de la pulsation ω_0 ?
- Q 31.** Dans quelle gamme de fréquences doit-on travailler pour que $\underline{T}(j\omega)$ soit indépendant de ω et proportionnel au déplacement de la rame ? On a $R = 750 \Omega$, $L_e = 60 \text{ mH}$ et une fréquence d'utilisation $f = 4 \text{ kHz}$.
- Q 32.** Montrer que le signal de sortie peut se mettre sous la forme $u_s(t) = E \frac{\Delta z}{\delta} \cos(\omega t + \varphi)$.
- Q 33.** Exprimer et calculer le déphasage φ .

III.C - Électronique de conditionnement

On souhaite obtenir un signal continu image de la position z de la rame. On utilise pour cela un multiplieur analogique, avec une constante de multiplication K_m , dans le montage donné figure 6.

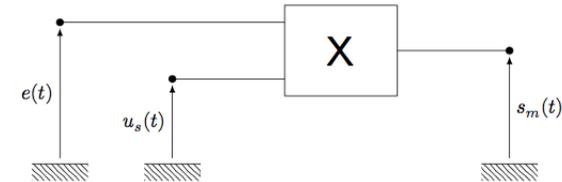


Figure 6 Multiplieur analogique

- Q 34.** Exprimer la tension électrique $s_m(t)$ à la sortie du multiplieur et donner sa décomposition spectrale. Préciser le terme représentatif de la position z de la rame.
- Q 35.** Quel montage doit-on placer à la sortie du multiplieur pour récupérer une tension continue S_m proportionnelle au déplacement Δz ? Préciser la nature et les caractéristiques de ce montage.
- Q 36.** Exprimer la sensibilité du capteur définie par $\frac{\Delta S_m}{\Delta z}$.
- Q 37.** Application numérique Le capteur permet de mesurer la tension de sortie à 10 mV près. En déduire le plus petit écart relatif mesurable par rapport à la position d'équilibre. On prendra $E = 6,00 \text{ V}$, $K_m = 1,00 \text{ V}^{-1}$.

Données et formulaire

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Intensité du champ de pesanteur terrestre	$g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$