

Un grand classique de CS et MP le conformateur à diode

Il s'agit de redressement ! sujet d'oral aussi

Mines Ponts 2022 PSI

Conditionnement du signal produit par le capteur de position de votre dernier sujet de DS sur les milieux magnétiques

Vous intéressez au conformateur à diodes ! à partir de Q23

Enoncé à lire entre Q22 et Q23

III Conditionnement du signal

□ - 18. Un ALI idéal possède deux caractéristiques principales :

- Son impédance d'entrée est infinie : les courants de polarisation sont nuls $i_+ = i_- = 0$
- Son impédance de sortie est nulle
- Son gain différentiel est infini : $\varepsilon = 0$ en régime linéaire.

On étend souvent ce modèle au gain infini bien que parfois, on puisse étudier un ALI idéal de gain fini. On

A priori, on peut dire que :

- Les ALI (A1) et (A2) fonctionnent en régime linéaire car leur rétroaction est effectuée sur la borne inverseuse
- L'ALI (A3) fonctionne en régime saturé car sa rétroaction a lieu sur la borne non-inverseuse

□ - 19. On considère l'ALI (A1). Le régime est *a priori* linéaire donc $\varepsilon = 0$.

La borne non-inverseuse est reliée à la masse donc : $v_{+1} = 0$ (potentiel de la borne non-inverseuse). On en déduit donc que $v_{-1} = 0$, donc d'après la loi des nœuds en termes de potentiels appliquée à la borne \ominus :

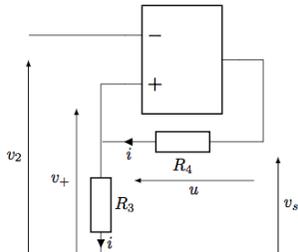
$$0 = v_{-1} = \frac{v_e + \frac{v_1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Leftrightarrow \frac{v_e}{R_1} = -\frac{v_1}{R_2} \Leftrightarrow v_e = -\frac{R_1}{R_2} v_1$$

On considère l'ALI (A2). Le régime est *a priori* linéaire donc $\varepsilon = 0$.

La borne non-inverseuse est reliée à la masse donc : $v_{+2} = 0$ (potentiel de la borne non-inverseuse). On en déduit donc que $v_{-2} = 0$, donc d'après la loi des nœuds en termes de potentiels appliquée à la borne \ominus utilisée en régime sinusoïdal forcé :

$$0 = v_{-2} = \frac{\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{1/j\omega C}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{1/j\omega C}} \Leftrightarrow \frac{v_1}{R} = -v_2 j\omega C \Leftrightarrow v_1 = -RC \frac{dv_2}{dt}$$

□ - 20. Introduisons quelques notations :



La loi d'Ohm donne :

$$R_3 i = v_+ \quad \text{et} \quad R_4 i = -u \quad \text{soit} \quad u = -v \frac{R_4}{R_3}$$

D'après la loi des mailles, on obtient :

$$v_+ = u + v_s \quad \text{soit} \quad v_+ \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = v_s$$

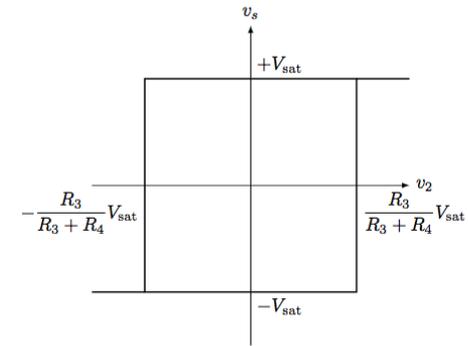
On en déduit donc :

$$\varepsilon = v_+ - v_- = v_s \frac{R_3}{R_3 + R_4} - v_2$$

Ainsi, procédons en suivant un chemin :

- Si $v_2 < 0$ et $v_s = +V_{\text{sat}}$ ensuite, v_2 augmente jusqu'à $V_{\text{lim}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}}$. À partir de cette valeur, v_2 continue d'augmenter mais $v_s = -V_{\text{sat}}$ car ε devient négatif.
- Ensuite, v_2 diminue jusqu'à $-V_{\text{lim}}$ à partir d'où $v_s = +V_{\text{sat}}$ et v_2 continue de diminuer dans les valeurs négatives.

On peut ainsi tracer le cycle suivant :



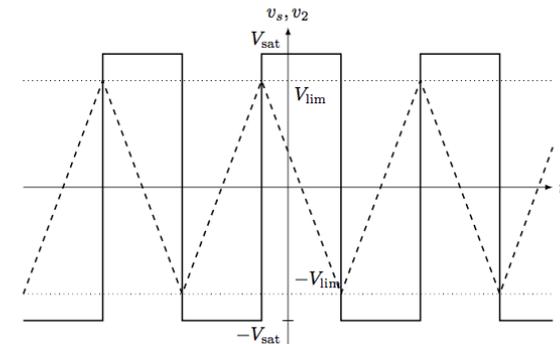
] - 21. D'après la figure 8, on observe que $v_s = v_e$, on en déduit, d'après les questions précédentes :

$$v_1 = -\frac{R_2}{R_1} v_s \quad \text{soit} \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{R_2}{R_1 R_2 RC} v_s$$

Lorsque $v_s = +V_{\text{sat}}$, alors $v_2(t) = -\frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} t + V_{\text{lim}}$.

Lorsque $v_s = -V_{\text{sat}}$, alors $v_2(t) = \frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} t - V_{\text{lim}}$.

On en déduit le tracé suivant :



v_2 est visiblement une fonction triangulaire périodique du temps de même période que v_s . On en déduit donc que $\frac{T}{2}$ est la durée pour passer de $+V_{\text{lim}}$ à $-V_{\text{lim}}$.
On pose $t = 0$ tel que :

$$\begin{cases} v_2(0) = V_{\text{lim}} \\ v_2(\frac{T}{2}) = -V_{\text{lim}} \end{cases} \Rightarrow 2V_{\text{lim}} = v_2(0) - v_2\left(\frac{T}{2}\right) = V_{\text{lim}} + \frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} \frac{T}{2} - V_{\text{lim}} \quad \text{d'après l'expression établie plus haut}$$

On en déduit donc :

$$2V_{\text{lim}} = \frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} \frac{T}{2} \quad \text{soit} \quad T = 4 \frac{R_3 R_1 RC}{R_2 (R_3 + R_4)}$$

□ - 22. $T = \frac{1}{f}$ (f la fréquence du signal) donc :

$$C = \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{4 R R_3 R_1 f} = \frac{R_3 + R_4}{4 R R_3 f}$$

L'application numérique donne : $C = 0,25 \mu\text{F}$.

La modification de la fréquence est possible en plaçant une résistance variable sur R . Ainsi, n'apparaissant que dans ce paramètre, il n'y a pas de compromis à trouver avec d'autres réglages apparentement.

D'après nos raisonnements précédents, $E = V_{\text{lim}}$:

$$E = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}}$$

Cette amplitude est modifiée à l'aide des résistances R_3 et R_4 .

Pour obtenir le rapport désiré, il faut :

$$0,22 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \quad \text{soit} \quad \frac{R_3}{R_4} = 0,28$$

On obtient alors $E = 4,23 \text{ V}$

□ - 23. D'après le schéma :

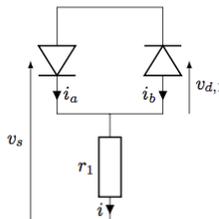
$$\left. \begin{aligned} \frac{v_t(1/4)}{E} = 1 \\ \frac{v_t(0)}{E} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_t(\theta)}{E} = 4\theta$$

Ainsi :

$$\text{Pour } 0 \leq \frac{t}{T} \leq \frac{1}{4}, \quad v_t(\theta) = 4\theta E$$

□ - 24. Supposons que les deux diodes conduisent le courant simultanément. On en déduit donc que la tension à leurs bornes est à la fois **strictement** inférieure et égale à $U_s > 0$. Cette incohérence nous conduit donc à affirmer que l'une des deux seulement peut être passante.

Introduisons quelques notations :



Si l'une des deux diodes passe, alors $u_{d,1} = U_s$ d'après l'énoncé et $i_a = i > 0$ ou bien $i_b = i > 0$. Ainsi :

$$v_s = U_s + r_1 i \geq U_s \quad \text{avec } i > 0$$

Ce qui implique donc que si $v_s \leq U_s$, alors $i = 0$, le courant circulant dans r_1 est donc bien nul.

Si $v_s > U_s$, alors le courant est non nul. On a donc : $U_s = U_1$.

□ - 25. Par un raisonnement similaire : $v_s = 2U_s + r_2 i$ avec $i > 0$.

La valeur de U_2 est donc : $U_2 = 2U_s$.

□ - 26. La tension maximale atteinte par la tension aux bornes d'une diode est U_s d'après l'énoncé. On en déduit donc, par additivité des tensions, que la tension maximale de la cellule (3) est de $V_{\text{max}} = 3U_s$.

□ - 27. En $\theta = 0$, $s(\theta) \sim V_{\text{max}} 2\pi\theta$, or, $v_t(\theta) = 4\theta E$, on veut donc :

$$3U_s \times 2\pi = 4E \quad \text{soit} \quad \frac{E}{U_s} = \frac{2E}{3\pi}$$

On peut reformuler cela avec le rapport :

$$\frac{E}{U_s} = \frac{3\pi}{2}$$

On obtient bien une fraction de π .

□ - 28. Si $v_s < U_1$, alors $i = 0$ et $i_s = 0$ d'après l'énoncé. On en déduit donc que :

$$v_s = v_t = 4\theta E \quad (\text{aucun courant ne traverse } r_0)$$

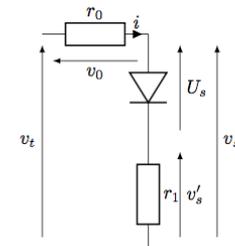
On cherche alors θ_1 tel que :

$$v_s(\theta_1) = U_1 \quad \text{soit} \quad 4\theta_1 E = U_1 = U_s$$

Ainsi :

$$\theta_1 = \frac{U_s}{4E} = \frac{1}{6\pi} \quad \text{d'après la condition précédemment établie}$$

□ - 29. Ici, $U_1 < v_s < U_2$, donc r_1 est alimentée mais pas r_2 . On a le montage suivant :



$$\left. \begin{aligned} r_0 i = v_0 \\ r_1 i = v'_s = v_s - U_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_0}{r_0} = \frac{v_s - U_s}{r_1}$$

Ainsi :

$$v_0 = \frac{r_0}{r_1} (v_s - U_s)$$

D'après la loi des mailles :

$$v_t = v_0 + v_s = \left(\frac{r_0}{r_1} + 1\right) v_s - U_s \frac{r_0}{r_1}$$

On en déduit donc :

$$v_s = \frac{v_t + U_s \frac{r_0}{r_1}}{1 + \frac{r_0}{r_1}} = \frac{v_t + U_s \rho_1}{1 + \rho_1} \quad \text{soit} \quad v_s = \frac{4\theta E + U_s \rho_1}{1 + \rho_1}$$

Dérivons les expressions :

$$\frac{ds}{d\theta} = 3U_s \times 2\pi \cos(2\pi\theta) \quad \text{d'où} \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^+} \frac{ds}{d\theta} = 6U_s \pi \cos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Et :

$$\frac{dv_s}{d\theta} = \frac{4E}{1 + \rho_1}$$

On en déduit, pour vérifier la relation indiquée dans l'énoncé :

$$\frac{4E}{1 + \rho_1} = 6U_s \pi \cos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Le hacheur survolteur appliqué aux panneaux solaires CS 2023 PSI

Voir aussi ex 1 TD !

Aussi CCINP Modélisation 2024 !

Ainsi, on obtient :

$$\rho_1 = \frac{1}{\cos(\frac{1}{3})} - 1$$

Compte-tenu de la définition de θ_2 , on peut écrire :

$$v_s(\theta_2) = U_2 = \frac{4\theta_2 E + \rho_1 U_s}{1 + \rho_1} \Rightarrow \theta_2 = \frac{U_s(2 + 2\rho_1 - \rho_1)}{4E} = (2 + \rho_1)\theta_1$$

On pose alors : $\alpha = 2 + \rho_1$ soit

$$\alpha = \frac{1}{\cos \frac{1}{3}} + 1$$

□ - 30. Désormais, on a : $U_s < v_s < 3U_s$. Le circuit devient alors :

D'après la loi des nœuds, $i = i_1 + i_2$, ainsi, en utilisant la loi d'Ohm :

$$\frac{v_0}{r_0} = \frac{v_s - U_s}{r_1} + \frac{v_s - 2U_s}{r_2}$$

La loi des mailles donne :

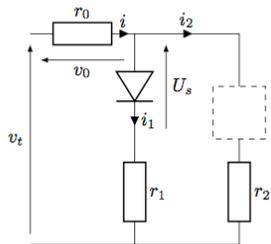
$$v_t = v_0 + v_s = \frac{r_0}{r_1}(v_s - U_s) + \frac{r_0}{r_2}(v_s - 2U_s) + v_s$$

Ainsi, on obtient :

$$v_s = \frac{v_t + U_s \frac{r_0}{r_1} + 2 \frac{r_0}{r_2} U_s}{1 + \frac{r_0}{r_1} + \frac{r_0}{r_2}} = \frac{4E\theta + U_s \frac{r_0}{r_1} + 2 \frac{r_0}{r_2} U_s}{1 + \frac{r_0}{r_1} + \frac{r_0}{r_2}}$$

□ - 31. Si $\theta > \theta_3$, comme v_s augmente et a atteint la valeur V_{\max} , sa valeur est bloquée à $3U_1$.

□ - 32. Les écarts peuvent être réduits en rajoutant des étapes. Ici, le système est constitué de 3 étapes mais en rajoutant plusieurs (à 4 diodes, à 5 etc...), on peut affiner l'approximation du signal désiré.



III Utilisation de panneaux solaires

A. Puissance nécessaire pour une voiture.

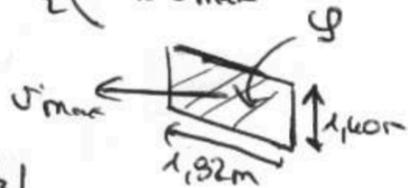
Q.35 La puissance surfacique maximale que le capteur reçoit à Paris vers 10h en juillet est de $750 \text{ W} \cdot \text{m}^2$ d'après le document 12. On suppose que les panneaux sont orientés de façon à la récupérer. Le document 11 annonce un rendement de 23,15% donc la puissance maximale reçue par les 5 m^2 de panneaux solaires est :

$$P_{\max} = 0,2315 \times 750 \times 5 = 1,1 \text{ kW}$$

Comme la vitesse maximale est atteinte, cette puissance compense la puissance perdue par frottements fluides : $P_{max} = \frac{1}{2} \rho g C_x J_{max}^3$

avec $\rho = \rho_{air} = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

et $S = 1,40 \times 1,82 = 2,5 \text{ m}^2$



$$\Rightarrow J_{max} = \left[\frac{2P_{max}}{\rho g C_x} \right]^{1/3}$$

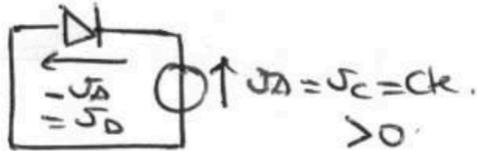
$$= \left[\frac{2 \times 1150}{1,2 \times 2,5 \times 0,23} \right]^{1/3} = 16 \text{ m/s} = 53 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$$

B. Conversion de puissance

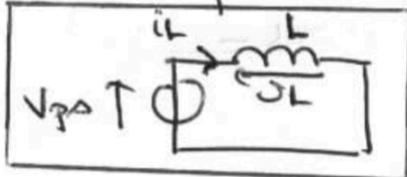
Q.37 T_2 est fermé :

La tension J_D est < 0

\Rightarrow D est bloquée



Le circuit équivalent du côté source d'entrée est :

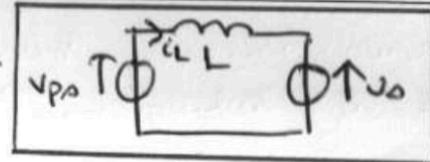


Q.38 On a $V_{PS} = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L(t) = i_{Lmin} + \frac{V_{PS}}{L} t \quad 0 \leq t \leq \alpha T$

Q.39 $\tau = RC$ doit être $\gg T$ pour que $J_C \approx C_k$,

$$\Rightarrow \boxed{C \gg \frac{T}{R}}$$

Q.40 roue libre :



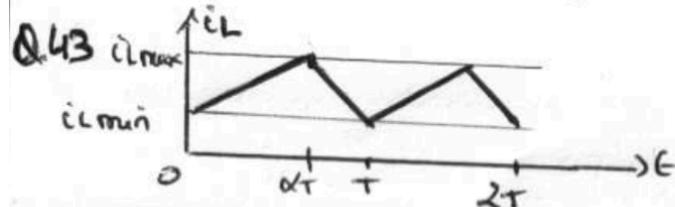
Q.41 On a $V_{PS} - J_D = L \frac{di_L}{dt}$ avec $t \mapsto i_L(t)$ continue

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{V_{PS} - J_D}{L} (t - \alpha T) + i_{Lmax} = \frac{V_{PS} - J_D}{L} (t - \alpha T) + i_{Lmax}$$

Q.42 d'après Q.38 : $i_{Lmax} - i_{Lmin} = \frac{V_{PS}}{L} \alpha T$

d'après Q.41 : $i_{Lmax} - i_{Lmin} = \frac{J_D - V_{PS} (1 - \alpha) T}{L}$

car $i_L(T) = i_L(0) = i_{Lmin}$ en régime établi.



$$\text{Q.44 } \langle J_L \rangle = L \left\langle \frac{di_L}{dt} \right\rangle = \frac{L}{T} \int_0^T di_L = \frac{L}{T} (i_L(T) - i_L(0)) = 0$$

$\langle J_D \rangle = J_D$ puisqu'on néglige l'induction,

donc $\langle J_D \rangle = J_D = \frac{V_{PS}}{1 - \alpha}$ d'après Q.42

Q.45 Comme $0 < \alpha < 1$ on a $J_D > V_{PS}$: hacheuse au moteur

$$\text{AN : } \alpha = \frac{J_D - V_{PS}}{J_D} = \frac{350 - 72}{350} = 0,79$$

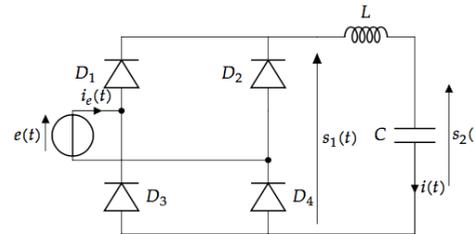
L'onduleur classique !
comme en cours pleine
onde
CS 2019 PSI avec
redressement au départ !!

IV Station de charge d'une brosse à dent électrique

IV.A Conversion alternatif-continu

30. E est l'amplitude d'une tension de valeur efficace $U = 230 \text{ V}$: $E = \sqrt{2}U$, $E = 325 \text{ V}$

31. Le montage de redressement double-alternance est :



Ce montage est absurde et ne doit pas être réalisé pour effectuer le redressement de la tension du secteur.

- Une approche qualitative simple permet de voir que le montage ne convient pas. Il s'agit d'un convertisseur direct et la source d'entrée est une source de tension alternative. La source de sortie doit donc se comporter comme une source de courant continu (au sens utilisé en électrotechnique, *i.e.* de valeur moyenne non-nulle.). Or le dipôle RC série ne se comporte pas comme une source de courant.

En effet, si un courant $i(t)$ de valeur moyenne non-nulle traverse la charge LC, le condensateur se charge et la tension s_2 augmente indéfiniment.

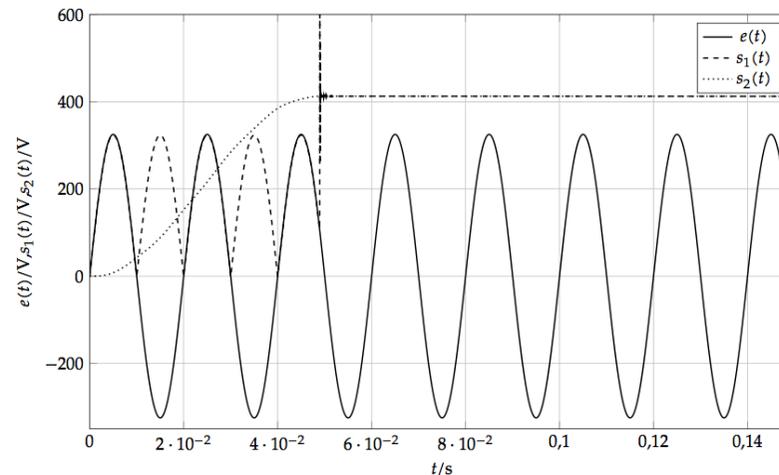
- Un raisonnement plus détaillé permet de trouver le point de fonctionnement de ce circuit en régime permanent.

D'une part, la présence des quatre diodes idéales impose $i(t) \geq 0$.

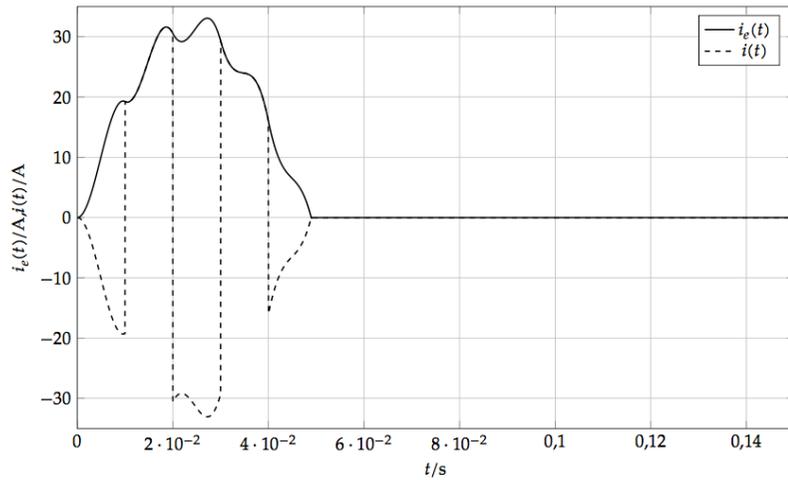
D'autre part, l'impédance de la charge est $Z(j\omega) = Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}$. Donc $|Z(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} +\infty$. Ce qui implique que la valeur moyenne de $i(t)$ est nulle : $\langle i(t) \rangle = 0$.

Donc, l'intensité dans la charge est nulle en régime permanent : $i(t) = 0$. Ce qui signifie que les quatre diodes sont bloquées.

- Un logiciel de simulation permet de voir le régime transitoire, pendant lequel les diodes changent d'état, et pour lequel $\begin{cases} s_1(t) \approx |e(t)| \\ i(t) \geq 0 \end{cases}$. Pendant cette phase, le condensateur se charge. Lorsque l'intensité $i(t)$ s'annule, les quatre diodes se bloquent, le régime permanent décrit plus haut est atteint.



Les intensités dans la source d'entrée et la charge sont représentées sur le graphique ci-dessous.



En régime permanent, les intensités sont nulles dans la source d'entrée et dans la charge, il n'y a pas de transfert de puissance.

- Les trois questions suivantes ne sont pas pertinentes. Les réponses justes à ces questions sont :

32 : s_1 est une tension continue, le spectre donné n'est pas correct. La valeur de la composante continue dépend de la valeur de la capacité qui n'est pas connue.

33 : s_1 n'a pas de composante fondamentale.

34 : s_2 est une tension continue, son taux d'ondulation est nul quelle que soit la valeur de C.

On attend toutefois des réponses fausses aux trois questions suivantes, les voici.

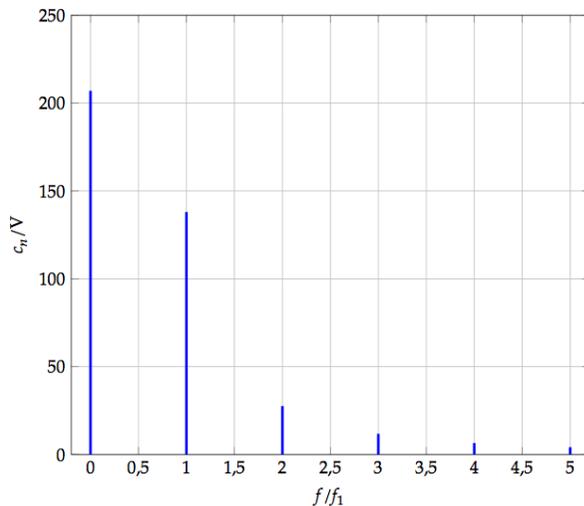
32. On admet que $s_1(t) = |e(t)|$, donc $s_1(t) = E|\sin(\omega t)|$. La composante continue de s_1 est la valeur moyenne de s_1 : $c_0 = \frac{E}{T} \int_0^T |\sin(\omega t)| dt$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Donc, la fonction étant de période $\frac{T}{2}$: $c_0 = \frac{2E}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |\sin(\omega t)| dt$

Donc $c_0 = \frac{2E}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt$. Ce qui donne $c_0 = \frac{2E}{\omega T} \left[-\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + 1 \right]$.

Donc $c_0 = \frac{2E}{\pi}$. Soit $c_0 = 207 \text{ V}$

Le spectre du signal est :



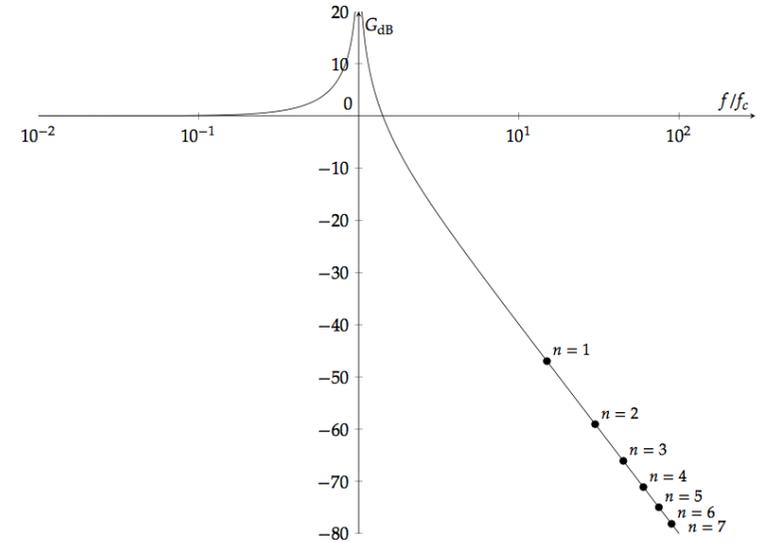
33. La fréquence de $s_1(t)$ est $f_1 = 100 \text{ Hz}$.

34. La fonction de transfert du filtre est $H(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2}$. Il s'agit d'un filtre passe-bas du second ordre, avec une résonance infinie pour la fréquence $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Le signal d'entrée est tel que $\begin{cases} \langle s_1 \rangle = \frac{2E}{\pi} = 207 \text{ V} \\ \Delta s_1 = E = 325 \text{ V} \end{cases}$

Le taux d'ondulation du signal d'entrée est donc $\frac{\Delta s_1}{\langle s_1 \rangle} = 1,57$.

Ce taux d'ondulation est très grand devant la valeur souhaitée, il faudra donc que le filtre atténue très fortement les harmoniques du signal. On peut donc supposer que toutes les harmoniques devront avoir des fréquences grandes devant la fréquence caractéristique f_c .



La gain en très basse fréquence est de 1 donc $\langle s_2 \rangle = \langle s_1 \rangle$.

Si toutes les harmoniques ont des fréquences supérieures à f_c , le montage a un comportement double-intégrateur pour la partie variable des signaux. On note $\begin{cases} \tilde{s}_1(t) = \langle s_1 \rangle + \tilde{s}_1(t) \\ \tilde{s}_2(t) = \langle s_1 \rangle + \tilde{s}_2(t) \end{cases}$

En notation complexe, $[1 - LC\omega^2] \tilde{s}_2 = \tilde{s}_1$. Ce qui se simplifie, si toutes les composantes sont dans le domaine double-intégrateur : $-LC\omega^2 \tilde{s}_2 = \tilde{s}_1$.

En notation réelle : $LC \frac{d^2 \tilde{s}_2}{dt^2} = \tilde{s}_1(t)$.

Pour $0 < t < \frac{T_0}{2}$, $\tilde{s}_1(t) = E \sin(\omega t) - \frac{2E}{\pi}$

De façon évidente, la solution de valeur moyenne nulle et de période $\frac{T_0}{2}$ est :

$$\tilde{s}_2(t) = -\frac{E}{LC} \left[\frac{1}{\omega^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{1}{\pi} \left[t \left(t - \frac{T_0}{2} \right) - \frac{T_0^2}{2} \right] \right]$$

Et l'amplitude crête-à-crête est :

$$\Delta s_2 = \tilde{s}_2(0) - \tilde{s}_2\left(\frac{T_0}{4}\right)$$

$$\text{Donc : } \Delta s_2 = \frac{E}{LC} \left[\frac{1}{\omega^2} \sin \frac{\omega T_0}{4} + \frac{T_0^2}{16\pi} \right]$$

Or $\omega T_0 = 2\pi$, donc $\sin \frac{\omega T_0}{4} = 1$ et

$$\text{Donc } \Delta s_2 = \frac{ET_0^2}{16\pi^2 LC} (\pi + 4)$$

Le taux d'ondulation du signal de sortie est donc : $\tau_2 = \Delta s_2 \frac{\pi}{2E}$.

$$\text{Donc } \tau_2 = \frac{T_0^2(\pi + 4)}{32\pi LC}$$

On note $\tau_c = 5 \cdot 10^{-2}$ le taux limite. On souhaite $\tau_2 < \tau_c$.

$$\text{Donc } C > \frac{T_0^2(\pi + 4)}{32\pi L \tau_c} \text{ Soit } C > 5,68 \text{ mF}$$

IV.B Conversion alternatif-continu

35. Les règles de fonctionnement sont les suivantes :

- K_1 et K_3 ne doivent pas être fermés simultanément pour ne pas mettre E_0 en court-circuit.
- K_2 et K_4 ne doivent pas être fermés simultanément pour ne pas mettre E_0 en court-circuit.
- K_1 et K_3 ne doivent pas être ouverts simultanément pour ne pas mettre le charge inductive en circuit ouvert.
- K_2 et K_4 ne doivent pas être ouverts simultanément pour ne pas mettre le charge inductive en circuit ouvert.

Il y a donc quatre états possibles pour les diodes. Comme on cherche un cycle de fonctionnement n'utilisant que deux de ces états, et que l'on veut que la valeur moyenne de u_1 soit nulle, on propose le cycle suivant :

	K_1	K_2	K_3	K_4	$u_1(t)$
$0 < t < \frac{T_0}{2}$					$u_1(t) = E_0$
$\frac{T_0}{2} < t < T_0$					$u_1(t) = -E_0$

36. L'intensité dans la charge est donnée en notation complexe par $[Lj\omega + r]i = u_1$.

En tenant compte de la valeur de u_1 :

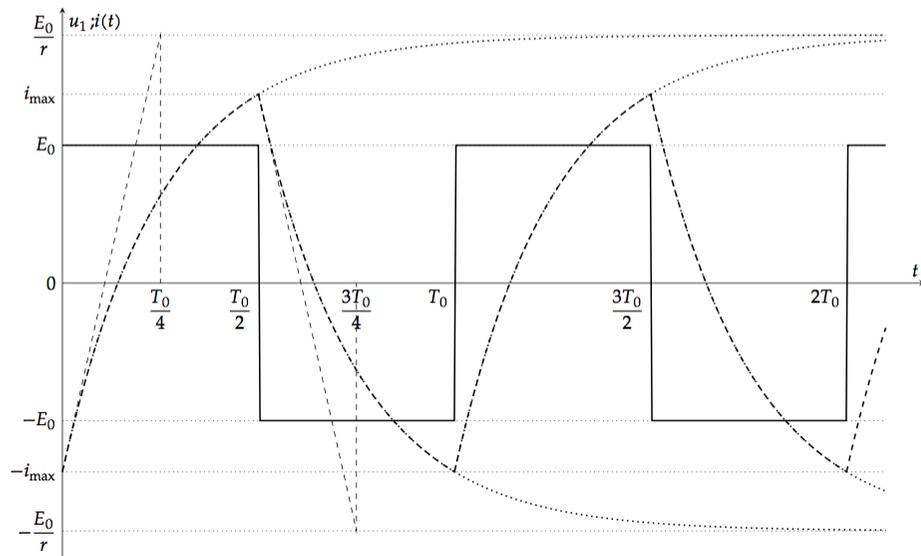
$$\begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i(t) = \frac{E}{L} & \text{pour } 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ \frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i(t) = -\frac{E}{L} & \text{pour } \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

37. Pour $0 < t < \frac{T_0}{2}$, la solution générale de l'équation différentielle est $i(t) = ae^{-\frac{r}{L}t} + \frac{E}{r}$ où a est une constante d'intégration.

Or $\begin{cases} i(0) = -i_{\max} \\ i(\frac{T_0}{2}) = i_{\max} \end{cases}$, donc $\begin{cases} -i_{\max} - \frac{E}{r} = a \\ i_{\max} - \frac{E}{r} = ae^{-\frac{rT_0}{2L}} = a\alpha \end{cases}$, et $i_{\max} - \frac{E}{r} = -\alpha \left(i_{\max} + \frac{E}{r} \right)$

Donc $i_{\max} = \frac{E}{r} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$

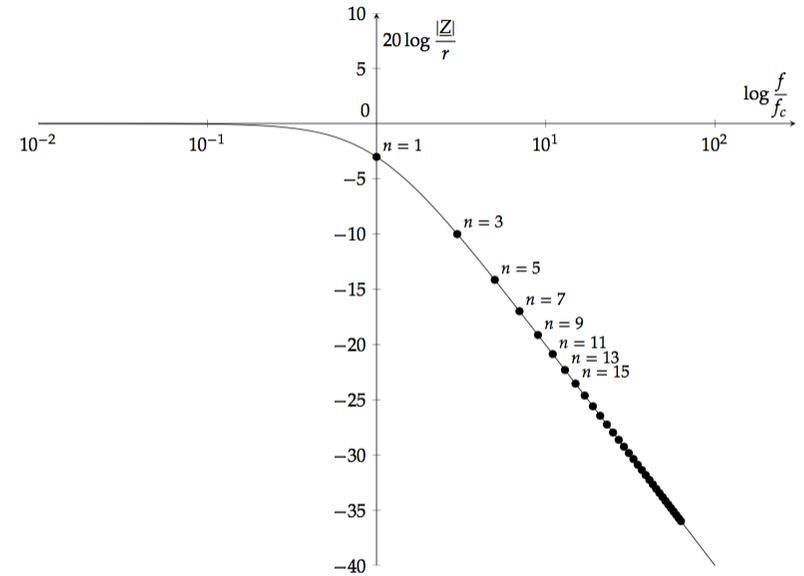
38. Le graphique représentant $u_1(t)$ et $i(t)$ est :



39. L'impédance de la branche (L, r) est $Z(j\omega) = r + Lj\omega = \frac{u_1}{i}$.

$$\text{Donc } \frac{r}{L} = \frac{1}{1 + \frac{Lj\omega}{r}}$$

Le montage se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre, de fréquence de coupure $f_c = \frac{r}{2\pi L}$.



Si on choisit $f_0 \approx f_c$, le fondamental sera légèrement atténué, les harmoniques de rang 3, 5, 7, ... seront plus fortement atténués. Cette situation est un bon compromis : $i(t)$ sera proche d'un signal sinusoïdal sans que son amplitude soit trop faible.

Il faut choisir les composants de telle sorte que $\frac{r}{L} \approx 2\pi f_0$.

Les onduleurs de Mines Ponts

Voir aussi le sujet MLI 2017 PSI

MLI calculée dans le complément de cours

MP 2020 PSI onduleur à commande décalée

Q18. Le dispositif convertit au sens de l'électronique de puissance une tension continue en une tension alternative, c'est un **onduleur**. Pour les applications, on peut citer :

- **alimentation de secours** pour un hôpital (réalisation d'une tension alternative 230 V efficace à partir de batteries) ;
- transfert sur le réseau électrique de l'énergie récupérée par des **panneaux solaires**.

Q19. K_1 et K'_1 ne peuvent être simultanément fermés sinon la source de tension est court-circuitée (de même pour K_2 et K'_2).

Si on suppose une charge inductive, K_1 et K'_1 ne peuvent être simultanément ouverts sinon la source de courant est placée en circuit ouvert (de même pour K_2 et K'_2).

Les interrupteurs (K_1, K'_1) fonctionnent en complémentarité (de même (K_2, K'_2)).

Considérons les différentes situations :

- la condition $u(t) = E$ nécessite K_1 et K'_2 fermés ;
- la condition $u(t) = -E$ nécessite K'_1 et K_2 fermés.
- la condition $u(t) = 0$ peut être réalisée avec K_1 et K_2 fermés ou K'_1 et K'_2 fermés.

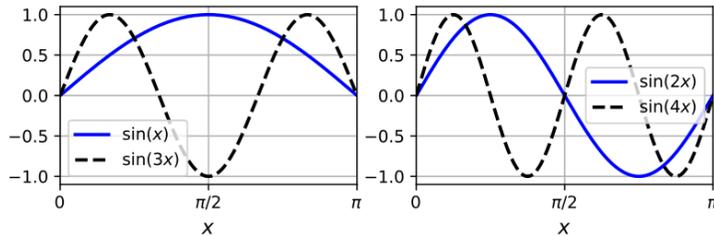
Le choix multiple sur la dernière condition autorise plusieurs options pour la commande des interrupteurs, une commande respectant une condition d'ouverture sur 50% du temps de chaque interrupteur est par exemple la suivante :

	$[0, t_0[$	$[t_0, T/2 - t_0[$	$[T/2 - t_0, T/2 + t_0[$	$[T/2 + t_0, T - t_0[$	$[T - t_0, T[$
K_1	1	1	0	0	1
K'_1	0	0	1	1	0
K_2	1	0	0	1	1
K'_2	0	1	1	0	0

Q20. Très généralement un développement en série de Fourier peut comporter des termes en sinus et des termes en cosinus.

Le choix de l'origine des temps génère une **fonction u impaire** ce qui assure l'**absence de termes en cosinus dans le développement de Fourier**.

Les sinus de pulsation $(2p+1)\omega$ ont la même symétrie axiale que la fonction u par rapport à l'axe $t = T/4$ ($x = \pi/2$). Les sinus de pulsation $(2p)\omega$ possèdent une symétrie différente (symétrie centrale par rapport au point $t = T/4$ de l'axe des abscisses), ils ne peuvent servir à construire la fonction u .



Q21. En choisissant convenablement t_0 , on peut annuler un des termes harmoniques (hors fondamental) ; il semble raisonnable d'annuler l'harmonique de plus bas rang associé à $p = 1$, les autres harmoniques pouvant plus facilement être filtrés (cf. questions suivantes).

D'après la figure 4, on retient $t_0 = T/12$. Notons la cohérence de ce résultat avec la formule donnant les b_i :

$$b_3 = \frac{4E}{3\pi} \times \cos\left(3 \times \frac{2\pi t_0}{T}\right) = \frac{4E}{3\pi} \times \cos\left(3 \times \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{12}\right) = 0$$

Avec cette valeur de t_0 :

- fondamental : $b_1 = \frac{4E}{\pi} \cos(\pi/6) = \frac{4E}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- harmonique de rang 5 : $b_5 = \frac{4E}{5\pi} \cos(10\pi/12) = -\frac{4E}{5\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- harmonique de rang 7 : $b_7 = \frac{4E}{7\pi} \cos(14\pi/12) = -\frac{4E}{7\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$|b_5| = b_1/5 \text{ et } |b_7| = b_1/7.$$

Q22. Commençons par calculer la grandeur efficace du signal u :

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \times 2E^2 \left(\frac{T}{2} - 2t_0\right) \Rightarrow U = E\sqrt{1 - \frac{4t_0}{T}}$$

Le fondamental est purement sinusoïdal d'amplitude $b_1 = \frac{4E}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi t_0}{T}\right)$ et donc de

$$\text{valeur efficace : } U_f = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2\pi t_0}{T}\right).$$

Pour $t_0 = T/12$, $U = E\sqrt{2/3}$ et $U_f = \frac{2E}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}$, on en déduit :

$$\tau = \frac{\sqrt{\frac{2E^2}{3} - \frac{4E^2}{\pi^2}} \times \frac{3}{2}}{\frac{2E}{\pi} \times \sqrt{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{2} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2}}$$

$$\text{On obtient } \tau \approx \frac{\pi}{2} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{6}{10}} \approx \frac{\pi}{2} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{30}} \approx \frac{\pi}{\sqrt{90}} \approx \frac{\pi}{10} \Rightarrow \tau \approx 0,3$$

Pour $t_0 = 0$, $U = E$ et $U_f = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}}$, c'est à dire :

$$\tau = \frac{\sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}}}{4/(\pi\sqrt{2})} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \approx \sqrt{\frac{10}{8} - 1} \approx \sqrt{\frac{1}{4}} \approx 0,5$$

L'utilisation du passage par 0 et l'**élimination de l'harmonique de rang 3 permet d'atténuer le taux de distorsion** sans le rendre suffisamment faible d'où l'importance du filtrage.

Q23. Par application de la formule du pont diviseur de tension :

$$\frac{u_r}{u} = \frac{R}{R + jL\omega} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{u_r}{u} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \text{ avec } \omega_c = \frac{R}{L}}$$

Le dispositif réalise un **filtre passe-bas d'ordre 1** de fréquence de coupure ω_c .

Q24. La fonction de transfert a pour module $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$ et pour argument

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right).$$

Pour obtenir le signal de sortie il faut appliquer la fonction de transfert à chacun des termes du développement de Fourier de u à chaque fois pour la fréquence de l'harmonique considéré.

$$\boxed{u_r(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b_{2p+1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2p+1)\omega}{\omega_c}\right)^2}} \sin\left[(2p+1)\omega t - \arctan\left(\frac{(2p+1)\omega}{\omega_c}\right)\right]}$$

Q25. Appelons c_i les amplitudes du développement de Fourier de u_r (avec $\omega = \omega_c$) :

$$c_{2p+1} = \frac{b_{2p+1}}{\sqrt{1 + (2p+1)^2}}$$

Grâce aux expressions des b_i obtenues à la question **Q.21**, il vient :

$$c_1 = \frac{4E}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} ; |c_5| = \frac{4E}{5\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{26}} ; |c_7| = \frac{4E}{7\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{50}}$$

Et pour le rapport des amplitudes :

$$\boxed{\frac{|c_5|}{c_1} = \frac{1}{5\sqrt{13}} \approx \frac{1}{5 \times 3,5} \approx 6\%} \text{ et } \boxed{\frac{|c_7|}{c_1} = \frac{1}{35} \approx 3\%}$$

On peut donc quasiment confondre le signal u_r avec son fondamental :

$$u_r(t) \approx \frac{4E}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \boxed{u_r(t) \approx \frac{E\sqrt{6}}{\pi} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Le signal présente une amplitude de l'ordre de $0,8E$ et possède un déphasage retard de $\pi/4$, équivalent à $1/8$ de période (Cf. figure ci-contre).

