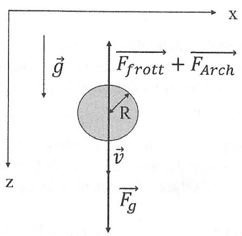
► **Correction :** Purification par décantation

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On considère le système {grain de sable} et on suppose que l'eau du bassin est immobile.



Bilan des forces :

— Poids de la particule de masse m : $\overrightarrow{F_g} = m\vec{g}$

— Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{F_{Arch}} = -\rho_{\text{eau}} V_{\text{part}}\vec{g}$

— Force de frottement : $\overrightarrow{F_{\text{frott}}} = -6\pi\eta R\vec{v}$

On projette la deuxième loi de Newton selon l'axe vertical u_z orienté vers le bas :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \rho_{\text{eau}} V_{\text{part}} g - 6\pi\eta R v$$

On fait l'hypothèse que la particule est assimilable à une **sphère** de rayon R. Sa masse vaut $m = \rho_{\text{part}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. En la réinjectant dans l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9}{2}\frac{\eta}{\rho_{\text{part}} R^2} v = \frac{\rho_{\text{part}} - \rho_{\text{eau}}}{\rho_{\text{part}}} g$$

Régime permanent

Le régime permanent est atteint lorsque la particule a un mouvement de **translation rectiligne uniforme** :

$$\boxed{v_{\text{lim}} = \frac{2}{9}\frac{\rho_{\text{part}} - \rho_{\text{eau}}}{\eta} R^2 g}$$

À partir de l'équation d'évolution de la vitesse, on peut identifier la durée caractéristique τ d'évolution vers le régime permanent :

$$\boxed{\tau = \frac{2}{9}\frac{\rho_{\text{part}}}{\eta} R^2}$$

A.N. :

	Symbole	*Unité*	**Sable**	**Vase**
Rayon	R	µm	100	1
Vitesse limite	v_{lim}	mm/s	13	2.8×10^{-3}
Temps caractéristique du régime transitoire	τ	ms	3,1	4.6×10^{-4}

Durée de la décantation

Au vu de la durée très courte du régime transitoire, on peut faire l'hypothèse d'être en **régime permanent** tout au long de la chute de la particule. On note Δt le temps de la décantation, c'est-à-dire le temps mis par une particule située à la surface de l'eau pour parcourir la profondeur du bassin H. On a alors $\Delta t = \frac{H}{v_{\text{lim}}}$.

A.N. : On prend une hauteur $H = 5\,\text{m}$.

	Symbole	**Sable**	**Vase**
Temps de décantation	Δt	6.3 min	20 jours
Rapport des durées décantation / transitoire	$\frac{\Delta t}{\tau}$	1.2×10^5	3.9×10^{12}

On a bien $\tau \ll \Delta t$, ce qui vérifie l'hypothèse de régime permanent *a posteriori* pour les deux types de particules.
Comme on pouvait s'y attendre, la durée de la décantation est **très longue** pour les particules de vase en suspension de diamètre inférieur à 5 µm. En revanche, la décantation est efficace pour les particules les plus grosses, comme le sable.
Pour accélérer une décantation, on peut augmenter artificiellement g par la **centrifugation**.

Question d'examinateur

Rappelez les conditions de validité de la loi de Stokes.

La force de frottement visqueux (loi de Stokes) donnée dans l'énoncé n'est valable que :

— pour les faibles nombres de Reynolds $R_e < 0.1$ (on parle d'*écoulement rampant*, cas particulier d'un régime **laminaire**)

— Si la particule (sphérique de rayon R) est suffisamment éloignée d'une distance d de tout obstacle ou paroi latérale ($d > 10R$). Au niveau des obstacles, des phénomènes de **couche limite** peuvent intervenir.

Pour vérifier la validité de la loi de Stokes, on calcule le nombre de Reynolds $R_e = \frac{(2R)\rho_{\text{part}} v_{\text{lim}}}{\eta}$.

Piège

Le nombre de Reynolds $Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$ (avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la **viscosité dynamique** du fluide), correspond qualitativement au rapport entre le transfert par convection et le transfert par diffusion de la quantité de mouvement. Il ne faut pas appliquer la formule directement avec R, mais avec la longueur caractéristique de la particule **dans l'écoulement** : il s'agit plutôt de son **diamètre** $2R$.

A.N. : On trouve $R_{e-\text{sable}} = 3.7$ et $R_{e-\text{vase}} = 1.2 \times 10^{-5}$.

La loi de Stokes est pleinement valable dans le cas de la vase, en revanche le nombre de Reynolds de l'écoulement autour d'une particule de sable est un peu trop élevé pour pouvoir l'appliquer en toute rigueur.