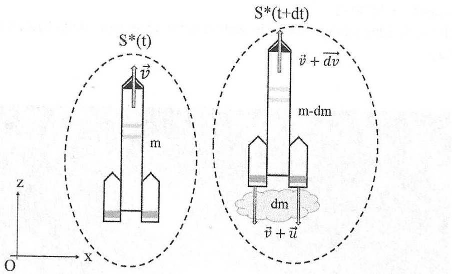
▶ Correction : Fusée expérimentale

La fusée va s'élever verticalement pendant une première phase d'ascension sous l'effet d'une force de poussée due à l'expulsion des gaz, jusqu'à l'instant t_f où tout le carburant aura été consommé.
La fusée, alors soumise à son poids et avec une vitesse initiale non nulle, continuera de s'élever verticalement jusqu'à atteindre une altitude z_{max}, puis retombera sur le sol en **chute libre**.

Afin de répondre à la problématique, on suit le raisonnement suivant :
- Définition d'un système fermé et bilan de quantité de mouvement pour déterminer la force de poussée
- Étude de la phase d'ascension avec propulsion
- Étude de la phase d'ascension sans propulsion

Définition d'un système fermé
Pour appliquer le **théorème de la quantité de mouvement**, il est nécessaire de définir un **système fermé**.



On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On étudie le système fermé S^* défini ainsi :
- **à l'instant t** : $S^*(t)$ contient la fusée de masse $m(t)$ et de vitesse $\vec{v}(t)$ dans le référentiel terrestre.
- **à l'instant t+dt** : $S^*(t+dt)$ contient la fusée de masse $m(t)+dm$, et de vitesse $\vec{v}(t)+\vec{dv}$, ainsi que les gaz expulsés entre t et $t+dt$, de masse $-dm$, et de vitesse $\vec{v}+\vec{u}$ dans le référentiel terrestre.

On note que dm est la masse algébrique formelle gagnée par la fusée, et que $dm<0$.

Pour mémoire

Contrairement à un système isolé, un **système fermé** peut échanger de la chaleur et de l'énergie avec son environnement. Cependant, il ne peut **pas échanger de matière**.

Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel le **principe d'inertie est vérifié**, c'est-à-dire que, dans ce référentiel, tout corps soumis à des forces nulles ou qui se compensent décrit un mouvement rectiligne uniforme (immobile étant un cas particulier).

Bilan de quantité de mouvement
La quantité de mouvement du système fermé $S*$ s'écrit aux instants t et $t+dt$:

$$\begin{cases} \vec{P^*}(t) & = & m(t)\vec{v}(t) \\ \vec{P^*}(t+dt) & = & m(t+dt)\vec{v}(t+dt)-dm(\vec{v}+\vec{u}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{P^*}(t)=\vec{P^*}(t+dt)-\vec{P^*}(t)=(m+dm)(\vec{v}+\vec{dv})-(\vec{v}+\vec{u})dm-m\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{P^*}(t)=m\vec{dv}-\vec{u}\,dm$$

Piège

Il faut veiller à respecter **toutes les conditions** nécessaires à l'application du théorème de la quantité de mouvement. On doit se placer dans un **référentiel galiléen**, ce qui interdit de se placer dans le référentiel de la fusée, et on doit considérer un **système fermé**.

Étude de la phase d'ascension avec propulsion
Le système fermé S^* est uniquement soumis à son poids. D'après le **théorème du centre d'inertie** :

$$\frac{d\vec{P^*}(t)}{dt}=m\vec{g}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{\vec{dv}}{dt}=m\vec{g}+\vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Le système ouvert {fusée} est donc soumis à une poussée $\vec{\Pi}=\vec{u}\frac{dm}{dt}$, qui est bien verticale et orientée vers le haut, puisque la variation de masse est négative : $\frac{dm}{dt}=-q_m$.

D'après les conditions imposées par l'énoncé, l'accélération est opposée au champ de gravité, de sorte que : $\frac{\vec{dv}}{dt}=-\vec{g}$. On a alors :

$$\vec{\Pi}=-2m\vec{g} \Rightarrow \quad \vec{U}\frac{dm}{dt}=-2m\vec{g}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dm}{m}=-2\frac{g}{U}dt$$

En intégrant la relation entre l'instant initial $t=0$ et l'instant t, on obtient :

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)=-2\frac{g}{U}t$$

Détermination de la durée d'ascension

La fusée va accélérer jusqu'à la fin de la propulsion, c'est-à-dire jusqu'à l'épuisement des gaz à l'instant t_f. On a alors $m = m_0 - m_c$, d'où :

$$\boxed{t_f = \frac{u}{2g} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_c}\right)}$$

A l'instant t_f, on a une vitesse $\vec{v}(t_f) = -t_f \vec{g}$.
La distance parcourue est $z_f = \frac{1}{2} g t_f^2$.

A.N. : On trouve : $t_f = 17\,\mathrm{s}$, $v(t_f) = 167\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $z_f = 1.42 \times 10^3\,\mathrm{m}$

Étude de la phase d'ascension sans propulsion

À partir de l'instant t_f, la masse m de la fusée devient constante, et elle n'est plus soumise alors qu'à son poids. Elle est en **chute libre** et va donc décrire une **parabole** si on néglige les frottements de l'air.
D'après le **principe fondamental de la dynamique**, en projection sur l'axe (Oz), on a :

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \quad \dot{z} = -gt + A$$

Avec A une constante d'intégration. Les conditions en $t = t_f$ donnent :

$$\dot{z} = -g(t - t_f) + v(t_f) \Rightarrow \quad z(t) = -\frac{g}{2}(t - t_f)^2 + v(t_f)t + B$$

Avec B une constante donnée par les conditions en $t = t_f$. On obtient **l'équation horaire** de l'altitude :

$$z(t) = -\frac{g}{2}(t - t_f)^2 + v(t_f)(t - t_f) + z_f$$

L'altitude est maximale à l'instant $t_m = t_f + \frac{v(t_f)}{g}$. On a alors :

$$\boxed{z_{max} = z_f + \frac{1}{2}\frac{v_f^2}{g}}$$

A.N. : $z_{max} = 2.85 \times 10^3\,\mathrm{m}$

⊕ Petit plus

Des étudiants de Polytechnique Montréal ont battu un record en propulsant une fusée d'une charge utile de 10 lbs (4.5 kg) à une altitude de 25 818 ft (7.89 km), et en la récupérant en bon état !