Evaporation de l'eau dans un verre de montre

Un verre de montre de rayon $R = 30\,\mathrm{mm}$ et de hauteur $L = 10\,\mathrm{mm}$ contient de l'eau sur une hauteur $h(t = 0) = 2\,\mathrm{mm}$. Il est posé sur une paillasse. La température de la pièce est constante et égale à $T = 298\,\mathrm{K}$. L'ensemble est initialement à cette température. On donne le coefficient de diffusion de l'eau dans l'air à 25 °C, $D = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$ et la pression de vapeur saturante de l'eau à 25 °C, $P_s = 3{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa}$. La constante de Boltzmann est $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$.

Au bout de combien de temps n'y a-t-il plus d'eau dans la soucoupe ?

Exercice 2

Analysons : tant que la pression partielle de l'eau dans l'air sera inférieure à la pression de vapeur saturante à 25 °C, l'eau va s'évaporer du verre de montre. Le volume de la pièce étant très grand et le volume d'eau initial petit, l'évaporation aura lieu jusqu'à disparition complète de l'eau liquide. L'eau gazeuse va diffuser dans la pièce.

Considérons un axe vertical Oz orienté vers le haut. Supposons que la diffusion soit unidimensionnelle et selon Oz. Notons $h(t)$ la hauteur d'eau dans le verre de montre à un instant t (Figure 8.7).

Écrivons les conditions aux limites. On a :

$$n(z=h(t),t)=n_s$$

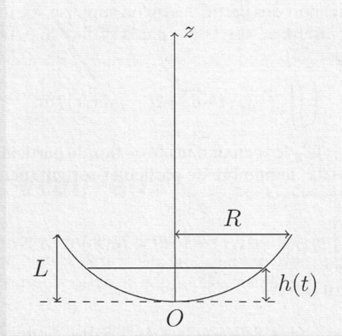

Figure 8.7. Évaporation de l'eau d'un verre de montre.

où n_s correspond à la densité de particules dans la vapeur saturante au voisinage de la surface de l'eau avec, par la loi des gaz parfaits, $P_s = n_s k_B T$, k_B étant la constante de Bolztmann. De plus on peut poser en considérant qu'au dessus du verre de montre à l'altitude L la vapeur d'eau est emportée par l'air :

$$n(L,t)=0.$$

L'évaporation doit être suffisamment lente et on peut supposer un régime quasi-permanent. L'équation de la diffusion s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 n}{\partial z^2}=0 \quad \text{soit avec les conditions aux limites :} \quad n(z,t)=\frac{n_s z}{h(t)-L}+\frac{n_s L}{L-h(t)}.$$

Déterminons alors la densité de courant de particules avec la loi de Fick :

$$j_D=-D\frac{\partial n}{\partial z}=\frac{D n_s}{L-h(t)}.$$

On peut alors exprimer le nombre de molécules d'eau dN qui part de la surface S pendant une durée dt :

$$dN=j_D S\,dt.$$

Relions cette quantité à la variation dh de hauteur d'eau liquide dans le verre de montre pendant la durée dt. Les $dN = j_D S\,dt$ molécules proviennent du volume $S\,dH$ d'eau qui s'évapore :

$$dN=-(S\,dh)\frac{\mu N_A}{M_{H_2O}}$$

où μ est la masse volumique de l'eau et M_{H_2O} la masse molaire de l'eau (attention ici dh est négatif; ce qui explique le signe moins car dN est positif).

On alors :

$$-(S\,dh)\frac{\mu N_A}{M_{H_2O}}=j_D S\,dt=\frac{D n_s}{L-h(t)}dt \quad \text{soit l'équation différentielle} \quad (L-h(t))\frac{dh}{dt}=-\frac{n_s D M_{H_2O}}{\mu N_A}$$

Intégrons entre les instants $t=0$ avec $h(t=0)$ et $t=t_f$ avec $h(t=t_f)=0$:

$$\int_{h(0)}^{0}(L-h(t))\frac{dh}{dt}=\int_0^{t_f}\frac{n_s D M_{H_2O}}{\mu N_A}dt \quad \text{soit} \quad -h(0)\left(L-\frac{h(0)}{2}\right)=-\frac{n_s D M_{H_2O}}{\mu N_A}t_f.$$

On en déduit t_f :

$$t_f=\frac{\mu N_A}{n_s D M_{H_2O}}h(0)\left(L-\frac{h(0)}{2}\right)=3{,}9\cdot 10^4\,\text{s} \quad \text{soit} \quad 10{,}8\,\text{h}.$$