

► **Correction** : Radiothérapie et accélération de particules**Compréhension du système**

On considère un électron e^- de masse m_e assimilé à un point matériel dans le référentiel terrestre supposé **galiléen**. Entre deux tubes consécutifs, un **champ électrique $\vec{E}$ uniforme** est créé par la différence de potentiel U . On peut négliger le poids de l'électron devant la force de Lorentz. L'électron est alors uniquement soumis à la **force de Lorentz $F_e = -eE$** , de sens opposé au champ électrique. L'électron subit une accélération constante égale à $a = -\frac{eE}{m}$ à chaque passage d'un tube à l'autre, à condition que le champ électrique soit orienté selon $-\vec{u}_x$ et que la tension alternative soit **synchronisée**.

1. On choisit de suivre une **approche énergétique**.

On se place entre le premier et le deuxième tube, et on fait le bilan d'énergie mécanique d'un électron entre $x = 0$ et $x = \delta$. On considère δ suffisamment petit pour que le champ électrique soit considéré comme **constant**.

Le potentiel électrostatique est alors linéaire : $u(x) = \frac{U}{\delta}x$, avec U la tension appliquée. L'énergie potentielle associée à un électron placé en x_e s'écrit : $E_p(x_e) = -eu(x_e)$.

En y additionnant son énergie cinétique, on obtient l'énergie mécanique de l'électron $E_m(x) = E_c(x) + E_p(x)$, soit :

$$\begin{cases} E_m(x=0) &= 0 &+ & 0 \\ E_m(x=\delta) &= \frac{1}{2}mv_\delta^2 &+ & -eU \end{cases}$$

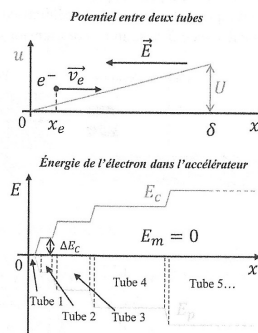
En l'**absence de forces non conservatives**, l'énergie mécanique de l'électron se **conserv**e au cours de la traversée du canon. L'électron gagne donc une énergie cinétique $\Delta E_c = eU$ à chaque passage entre deux tubes, soit une énergie totale au cours de la traversée des N tubes :

$$\Delta E_{c\text{-totale}} = (N-1)eU$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(V^2 - v_0^2) = (N-1)eU$$

La vitesse V de la particule lorsqu'elle sort du champ électrique est donc supérieure à sa vitesse initiale v_0 (supposée nulle). Elle vaut :

$$V = \sqrt{\frac{2(N-1)eU}{m}}$$

✍ **Pour mémoire**

D'après le **théorème de l'énergie cinétique**, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la **somme des puissances** des forces. On pourrait l'appliquer à l'électron, entre l'entrée de la portion accélératrice (1er tube) et la sortie de l'accélérateur ($N^{\text{ème}}$ tube), en supposant la vitesse initiale négligeable.

$$\text{A.N. : } V = 2.05 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

⊕ **Petit plus**

De manière générale, on néglige les aspects **relativistes** pour $v < 0,2c$. Il est très pertinent de mentionner l'aspect **relativiste** du problème, puisqu'on atteint une vitesse très proche de la vitesse de la lumière. Dans ce cas, l'énergie de l'électron accéléré prend en compte l'**impulsion de la particule**, $p = \gamma m_e v$, avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, le **facteur de Michelson-Morley**. On a alors

$$E^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2 \Rightarrow E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \text{ On en déduit, pour une énergie } E = 25 \text{ MeV, que } v = 0,9998c.$$

2. Pour accélérer les électrons, il faut que le temps de parcours dans le k^{e} cylindre soit égal à la demi-période de l'oscillateur. On note l_k la longueur du k -ème tube et $v_k = \sqrt{\frac{2(k-1)eU}{m_e}}$ la vitesse en entrée du k^{e} tube. Dans le tube, l'électron décrit un **mouvement rectiligne uniforme**.

Soit $\Delta t_k = \frac{l_k}{v_k} = \frac{l_k}{\frac{1}{2} \frac{1}{2f}}$ le temps de parcours du k^{e} tube par un électron. On a :

$$l_k = \Delta t_k v_k \Rightarrow l_k = \frac{\sqrt{2(k-1)eU} m_e}{2f}$$

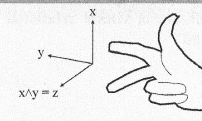
$$\text{A.N. : } l_2 = 7.0 \text{ mm et } l_{25} = 3.4 \text{ cm}$$

On a un rapport de longueur de 5 entre le deuxième et le dernier tube.

3. En sortant de l'accélérateur, l'électron entre dans le champ magnétique du déviateur avec une vitesse initiale V_N colinéaire à (Ox) . Dans le champ magnétique $\vec{B}$, l'électron est soumis à la force de Lorentz $\vec{F} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$. Comme auparavant, le poids de la particule est négligeable devant cette force.

✍ **Astuce**

Pour connaître le sens de la force $\vec{F}_{mag}$, il faut penser à la **règle des trois doigts**. Attention cependant, ce n'est valable qu'avec la **main droite**. Si vous tenez la craie de la main droite le jour de l'oral, une confusion peut vite arriver...



On veut une force magnétique centripète. Il faut donc un champ magnétique dirigé selon $-u_z$.

Pour mémoire

Le **travail fourni** par la force de Lorentz à l'électron est **nul** car la force est orthogonale à la vitesse : l'énergie cinétique de la particule ne change pas. La vitesse de la particule garde une valeur constante, mais sa direction change.

D'après la 2ème loi de Newton pour un point matériel soumis à une unique force, on a en norme : $F = ma$, avec a l'accélération du point. L'accélération tangentielle est nulle mais il existe une accélération centripète.

Astuce

L'électron va décrire un mouvement circulaire car il est uniquement soumis à une force **centripète**. On peut utiliser la **base de Frénet** dans lequel on a $\|\vec{F}\| = m \frac{v^2}{r}$.

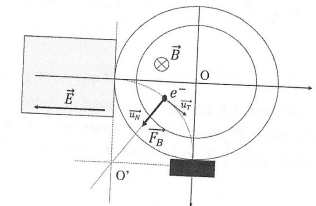
On a alors :

$$|q|VB = m \frac{V^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mV}{eB}$$

On choisit B de sorte que le faisceau décrive un quart de cercle de rayon r égal à celui du déviateur R :

$$B = \frac{mV_N}{eR}$$

$$\text{A.N. : } B_{\min} = 1.2 \times 10^{-2} \text{ T}$$



Ce champ magnétique est d'une intensité de l'ordre de celle qu'on peut mesurer à quelques centimètres d'un **aimant permanent**. L'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre est de $4.7 \times 10^{-5} \text{ T}$.

Petit plus

En utilisant la **vitesse relativiste** de l'électron pour une énergie de 25 MeV, on obtient $B = 1.7 \times 10^{-2} \text{ T}$.