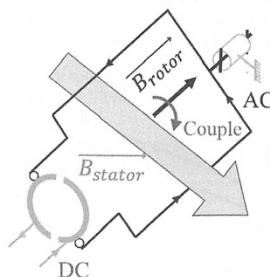


► Correction : Machine à courant continu d'une grue

1.

Une machine à courant continu est composée d'un inducteur et d'un induit. L'**inducteur** est placé au **stator** et génère un champ magnétique constant. Il s'agit dans l'exercice d'un aimant permanent. L'**induit** est placé au **rotor**, il est traversé par un courant qui génère aussi un champ. L'interaction des champs rotorique et statorique produit un couple, à la manière de l'aiguille aimantée d'une boussole qui suit le champ magnétique terrestre.

La particularité du moteur à courant continu est de **changer le sens du courant de l'induit** à l'aide de **balais collecteurs**. De cette façon, le champ du rotor ne s'aligne jamais avec celui du stator, ce qui entretient le couple. Le courant est **continu vu de l'extérieur, mais ne l'est pas à l'intérieur** !



Les équations qui régissent son fonctionnement sont les suivantes :

— **Mécanique** (théorème du moment dynamique appliqué sur l'axe du moteur) :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C - f\Omega - C_r$$

Avec Ω la vitesse de rotation en rad/s, J l'inertie sur l'arbre moteur, C le couple moteur, f le coefficient de frottement fluide, C_r un couple résistant lié à la charge.

— **Électrique** (loi des mailles) :

$$U = L \frac{dI}{dt} + RI + E$$

Avec U la tension d'alimentation du moteur, L l'inductance de l'induit, I le courant, R la résistance de l'induit, E la force contre-électromotrice.

Pour mémoire

Il ne faut pas confondre U et E ! Rappelez-vous notamment des **chutes de tension ohmiques** qui se produisent entre les deux dès que le courant est non nul.

— **Electromagnétiques** (loi de Faraday et bilan de puissance) :

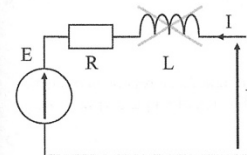
$$\begin{cases} E = k\Omega \\ C = kI \end{cases}$$

Avec k une constante homogène à un flux magnétique (Wb).

Pour mémoire

Le même k intervient dans deux relations électromagnétiques. Pour le démontrer, il faut considérer dans le modèle équivalent que la **puissance absorbée** aux bornes de la force contre-électromotrice $P_{\text{électromag}} = EI = k\Omega I$ est égale à la **puissance mécanique** $P_{\text{mech}} = C\Omega$. On identifie alors $C = kI$.

2.



On procède à un **essai à vitesse imposée**. On est en régime permanent, l'inductance de l'induit se comporte comme un **court-circuit**. On peut alors déterminer la valeur de la résistance d'induit ainsi que celle de la constante k .

— La pente de la droite vaut $\frac{1}{R}$. Graphiquement, la pente des droites est égale à 2. On en déduit que $R = 0.5 \Omega$.

— Le courant s'annule lorsque $E = U$. Pour $N = 1000 \text{ tr/min}$

$$\text{on relève } E = 150 \text{ V, soit } k = \frac{60E}{2\pi N}$$

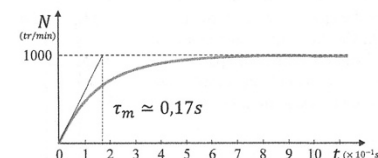
$$\text{A.N. : } k = 1.43 \text{ Wb}$$

3. Pour cet essai à vide, on a $C_r = 0$. En régime permanent, le seul couple résistant à compenser est celui des frottements fluides. On note Ω_{∞} la vitesse de rotation en régime établi $C = k\Omega_{\infty} = f\Omega_{\infty}$, et on a :

$$f = \frac{k\Omega_{\infty}}{\Omega_{\infty}}$$

$$\text{A.N. : } f = 1.4 \times 10^{-3} \text{ Nm s}$$

On relève ce qui semble être la réponse indicielle d'un système du premier ordre. On identifie la constante de temps qui vaut environ $\tau_m \simeq 0.17 \text{ s}$.



Il s'agit de la **constante de temps mécanique**, qui est bien plus grande que la constante de temps électrique : $\tau_e = \frac{L}{R}$. Un ordre de grandeur de l'inductance d'induit est de quelques mH, on obtient $\tau_e \simeq 1 - 10 \text{ ms} \ll \tau_m$. Il est donc normal de ne pas observer les caractéristiques d'un système du second ordre !

Pour mémoire

Il est courant de négliger la constante de temps électrique devant la constante de temps mécanique. Dans ce cas, **on ne s'occupe plus de l'inductance** dans le modèle électrique équivalent ! Cette hypothèse est souvent laissée à l'initiative du candidat.

On peut donc relever l'inertie à vide en considérant l'équation :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \underbrace{C}_{\frac{k\Omega}{R}} - f\Omega \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} + \frac{f}{J}\Omega = \frac{k}{J} \frac{U - E}{R}$$

La tension d'alimentation U s'exprime en fonction de la vitesse Ω_∞ et du courant I_∞ en régime permanent par la loi des mailles : $U = \underbrace{k\Omega_\infty}_{150\text{ V}} + \underbrace{RI_\infty}_{0.05\text{ V}}$. On peut donc négliger la chute de tension ohmique à vide. D'où :

$$\Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} + \underbrace{\frac{fR + k^2}{JR}}_{1/\tau_m} \Omega = \frac{k^2 \Omega_\infty}{JR} \Rightarrow \boxed{J = \frac{fR + k^2}{R} \tau_m}$$

A.N. : $J = 0.70 \text{ kg m}^2$

4. Pour répondre à la question, on peut suivre les étapes suivantes :

- Étude de la poulie pour trouver le lien entre vitesse de rotation de la roue motrice et vitesse de déplacement de la charge, ainsi que les efforts associés.
- Analyse du régime permanent pour trouver la tension d'alimentation à vitesse constante.
- Étude la phase d'accélération (régime transitoire), dans laquelle le courant absorbé est maximal.

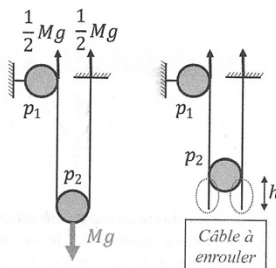
Étude des poulies

On isole le câble lorsque M est animé d'une vitesse constante, et on effectue un bilan des forces. Les poulies étant parfaites, la **tension du câble se conserve**. On s'aperçoit que seule la moitié du poids est supportée par la poulie motrice. En contrepartie, une élévation d'une hauteur h de la masse conduit à un enroulement d'une longueur $2h$ de câble autour de la poulie motrice.

On a donc en **régime permanent** :

$$\begin{cases} V_M &= \frac{1}{2} \Omega_{p1} R_p \\ C_{p1} &= -\frac{1}{2} Mg R_p \end{cases}$$

Avec $\Omega_{p1} = K_r \Omega$ la vitesse de rotation de la poulie motrice, et C_{p1} le moment de la force de tension du câble sur l'axe de p_1 .



Régime permanent

Le réducteur a un rendement de $\eta_r = 80\%$. Un réducteur est composé d'engrenages, la vitesse de sortie est mécaniquement imposée par celle d'entrée. L'effet du rendement est une augmentation du couple résistant due aux frottements internes. Le couple résistant sur l'arbre moteur vaut :

$$C_r = \frac{K_r M g R_p}{2\eta}$$

En régime permanent, ce couple résistant est exactement compensé par le couple moteur, auquel il faut ajouter les frottements fluides déterminés auparavant :

$$C = f\Omega + C_r = 2f \frac{V_M}{K_r R_p} + \frac{K_r M g R_p}{2\eta}$$

■ **A.N.** : $C = 82 \text{ Nm}$, le couple de frottements fluides ne représentant que 0,2% du couple total.

Ce couple permet de déterminer le courant absorbé en régime permanent :

$$I = \frac{C}{k}$$

■ **A.N.** : $I = 57 \text{ A}$

⊕ Petit plus

Cette grande valeur de courant nécessite des **câbles adaptés**. Les câbles que vous utilisez en travaux pratiques sont faits pour supporter "seulement" 16 A. On retiendra l'ordre de grandeur de la densité de courant maximale admissible dans un câble de puissance 5 A/mm². Paradoxalement, cette valeur est bien plus élevée dans les micro-actionneurs, car les fils doivent être bien plus petits !

On peut alors remonter à la tension nécessaire, en tenant compte de la chute ohmique dans la résistance des enroulements :

$$U = 2k \frac{V_M}{K_r R_p} + RI$$

■ **A.N.** : $U \simeq 2,4 \times 10^2 \text{ V}$

Régime transitoire

On suppose que la constante de temps électrique est toujours négligeable par rapport à la constante de temps mécanique. En effet, la constante de temps mécanique ne peut qu'augmenter en charge.

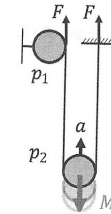
Il faut réécrire les équations de la mécanique dans cette nouvelle situation.

● Piège

On pourrait être tenté de réutiliser les équations que l'on vient d'établir, notamment celle du couple, **mais ce serait faux** : si la tension est un échelon, le courant et le couple n'en sont pas. Il faut refaire le calcul !

Le théorème du moment dynamique donne :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \underbrace{C}_{k \frac{U - k\Omega}{R}} - \underbrace{C_r}_{?} - f\Omega$$



Pour trouver le couple résistant C_r dû à la charge qui accélère, il faut trouver la norme F de la tension qui se conserve tout le long du câble car les poulies sont idéales.

La deuxième loi de Newton appliquée à la masse donne, en projection sur un axe vertical orienté vers le haut :

$$M \frac{dV_M}{dt} = 2F - Mg \Rightarrow F = \frac{C_{p1}}{R_p} = \frac{1}{2} M \left(\frac{dV_M}{dt} + g \right)$$

Comme $V_M = R_p K_r \Omega$ et $C_{p1} = \frac{\eta C_r}{K_r}$, on obtient :

$$C_r = \frac{MR_p K_r}{2\eta} \left(R_p K_r \frac{d\Omega}{dt} + g \right)$$

En réinjectant dans le **théorème du moment dynamique**, on obtient :

$$\frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{\tau} \Omega = \frac{kU}{\tau R(k^2/R + f)} - \frac{R_p K_r M g}{2\tau \eta (k^2/R + f)} \quad \text{avec } \tau = \frac{J + (MR_p^2 K_r^2)/(2\eta)}{k^2/R + f} \simeq 0,2 \text{ s}$$

Le régime permanent est atteint à 95 % pour $t = 3\tau = 0,6 \text{ s}$.

⊕ Petit plus

La démarche que propose cet exercice s'inspire beaucoup des **sciences de l'ingénieur**, ce qui est dans l'esprit du programme. On pourrait tout à fait demander au candidat de construire le **schéma-bloc** de la machine à courant continu, qui se déduit des équations de la question 1. Il ne faut alors pas oublier de passer en **notation opérationnelle** en utilisant p la variable de Laplace. On obtient :

