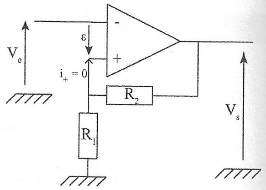
▶ Correction : Multivibrateur astable

Pour résoudre ce problème, nous allons procéder par étapes :
- Étude de la relation entre V_+ et V_s
- Étude du comparateur à hystérésis
- Étude du cycle charge / décharge du condensateur
- Calcul de la fréquence et du rapport cyclique.

1.

Diviseur de tension

On veut trouver une relation entre V_e et V_s. Or, V_s dépend directement du signe de $\varepsilon = V_A - V_e$. Aussi, on cherche une relation qui relie $V_+ = V_A$ à V_s.



L'ALI est supposé parfait, donc le courant qu'il absorbe est nul. On peut alors appliquer la formule du **diviseur de tension** . On obtient directement :

$$V_+ = \underbrace{\frac{R_1}{R_1+R_2}}_{k} V_s$$

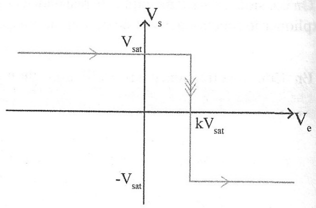
Pour mémoire

On peut être tenté d'utiliser **la loi des nœuds en terme de potentiels** pour exprimer cette relation, par habitude. Cependant, c'est **inutilement compliqué** pour un cas aussi simple, et son utilisation montrerait un manque de recul sur la situation.
Il faut utiliser les outils adaptés au problème : inutile d'écraser une mouche avec un marteau !

Comparateur à hystérésis

Ce montage est en réalité un **comparateur à hystérésis**, aussi appelé *trigger de Schmitt*. Sa caractéristique s'obtient en deux étapes :

—Phase 1 : $V_s = V_{\text{sat}}$. On considère $V_e \ll 0$, la tension ε aux bornes d'entrée de l'ALI est positive et vaut :

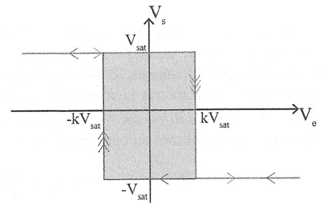


$$\varepsilon = V_+ - V_- = kV_{\text{sat}} - V_e > 0$$

V_s change lorsque ε change de signe. $V_s = V_{\text{sat}}$ tant que :

$$\varepsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_e > kV_{\text{sat}}}$$

— Phase 2 : $V_s = -V_{\text{sat}}$. la tension ε aux bornes d'entrée de l'ALI est négative et vaut :



$$\varepsilon = V_+ - V_- = -kV_{\text{sat}} - (\infty) < 0$$

La sortie change d'état lorsque ε change de signe :

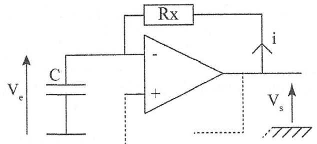
$$\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_e < -kV_{\text{sat}}}$$

2.

Étude du condensateur

On remarque que la **rétroaction négative** est un circuit $R - C$. Les **diodes** vont permettre de changer la résistance selon le sens du courant.

— Phase 1 : $V_s = V_{\text{sat}}$ et $V_e < kV_{\text{sat}} \Rightarrow i > 0$.
Le courant i passe donc par Rx.
Comme l'ALI considéré idéal n'absorbe aucun courant, le condensateur C et Rx sont **en série** : $i = C\frac{dV_e}{dt}$.
La **loi des mailles** donne $V_s - V_e = Rxi = RxC\frac{dV_e}{dt}$.
On obtient l'équation différentielle :



$$\dot{V}_e + \frac{V_e}{\tau_x} = \frac{V_s}{\tau_x} = \frac{V_{\text{sat}}}{\tau_x}$$

Avec $\tau_x = RxC$. Sa solution est :

$$V_e(t) = A\exp\left(\frac{-t}{\tau_x}\right) + V_{\text{sat}}$$

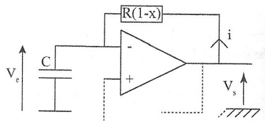
On considère qu'à l'instant initial, V_s vient de basculer de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$ donc $V_e(0) = -kV_{\text{sat}}$ d'après l'étude du comparateur à hystérésis. On obtient finalement :

$$\boxed{V_e(t) = V_{\text{sat}}\left[1 - (1+k)\exp\left(\frac{-t}{\tau_x}\right)\right]}$$

Cette relation est valable jusqu'à ce que V_s bascule à nouveau. On cherche l'instant de basculement t_1 pour lequel on a :

$$V_e(t_1) = kV_{\text{sat}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = \tau_x \ln\frac{1+k}{1-k}}$$

— Phase 2 : $V_s = -V_{\text{sat}}$ et $V_e > -kV_{\text{sat}} \Rightarrow i < 0$.
Le courant passe donc par $R(1-x)$.
De même que précédemment, le même courant i passe à travers le condensateur et à travers la résistance, d'où $i = C\frac{dV_e}{dt}$. On a $V_s - V_e = R(1-x)i = R(1-x)C\frac{dV_e}{dt}$. L'équation différentielle qui régit la tension aux bornes du condensateur est :



$$\dot{V}_e + \frac{V_e}{\tau_{1-x}} = \frac{V_s}{\tau_{1-x}} = \frac{V_{\text{sat}}}{\tau_{1-x}}$$

Avec $\tau_{1-x} = (1-x)RC$. On intègre l'équation :

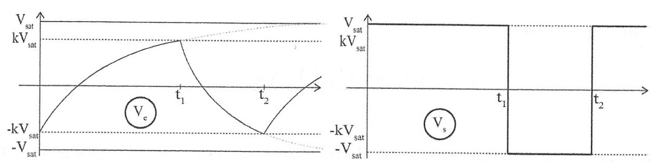
$$V_e(t) = B\exp\left(\frac{-(t-t_1)}{\tau_{1-x}}\right) - V_{\text{sat}}$$

Au début de la phase, la tension V_s vient de basculer de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$, donc $V_e(t_1) = kV_{\text{sat}}$ d'après l'étude du comparateur à hystérésis. On obtient finalement :

$$\boxed{V_e(t) = V_{\text{sat}}.\left[(1+k)\exp\left(\frac{-(t-t_1)}{\tau_{1-x}}\right) - 1\right]}$$

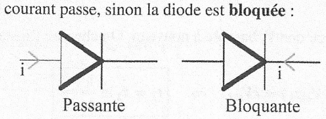
On cherche l'instant de basculement, c'est-à-dire l'instant t_2 tel que $V_e(t_1+t_2) = -kV_{\text{sat}}$:

$$V_e(t_1+t_2) = -kV_{\text{sat}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_2 = \tau_{1-x}.\ln\frac{1+k}{1-k}}$$



Astuce

Pour savoir quelle diode est passante, on regarde le sens du courant : si celui-ci arrive dans le sens de la pointe de flèche le courant passe, sinon la diode est **bloquée** :



Fréquence et rapport cyclique

La fréquence se déduit de la période $T = t_1 + t_2 = RC\ln\frac{1+k}{1-k}$. Soit :

$$\boxed{f = \frac{1}{RC}\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{-1}}$$

Le **rapport cyclique** α est le rapport entre la durée du front haut du signal (V_s en l'occurrence) et la période du signal. Ainsi :

$$\boxed{\alpha = \frac{t_1}{T} = x}$$

C'est tout l'intérêt de ce montage par rapport au multivibrateur astable classique (aussi appelé **bascule de Schmitt**) : on peut modifier le rapport cyclique du signal de sortie avec un simple potentiomètre.

Question d'examinateur

Quelle est la fréquence maximale atteignable par le montage ?

La fréquence est limitée par la vitesse limite de balayage en tension, plus fréquemment appelée **slew rate** de l'ALI : $\delta = \left.\frac{dV_s}{dt}\right|_{\max}$. L'ALI doit avoir le temps de passer de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$ pour que le condensateur se charge. Cette transition dure au maximum $t_m = \frac{2V_{\text{sat}}}{\delta}$. Or une période du signal présente deux changements de tension, soit : $f_{\max} = \frac{1}{2t_m} = \frac{\delta}{4V_{\text{sat}}}$.

Pour le TL081, souvent utilisé en travaux pratiques de CPGE, le slew rate vaut $\delta = 13\,\text{V}\,\mu\text{s}^{-1}$. Pour une tension de sortie de +15 V/-15 V, cela correspond à une fréquence de : $\boxed{f_{\max} = 217\,\text{kHz}}$