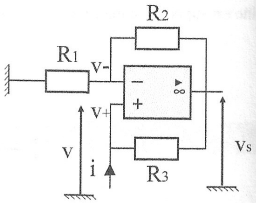
► **Correction :** Oscillateur LC parallèle à résistance négative

1. On considère l'ensemble { ALI, R_1, R_2, R_3 } uniquement.

1.1. On relève une **rétroaction négative** via la résistance R_2. On suppose donc dans un premier temps que l'ALI fonctionne en **régime linéaire**. Le gain de l'ALI est supposé infini, on a $v_+ = v_- = v$.



Pour trouver i, il faut trouver le potentiel en sortie de l'ALI afin d'utiliser la loi d'Ohm sur R_3. On peut appliquer le **diviseur de tension** car l'ALI n'absorbe aucun courant :

$$v = v_- = \frac{R_1}{R_2+R_1}v_s \quad \Rightarrow \quad v_s = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)v$$

On en déduit la valeur du courant i :

$$\boxed{i = \frac{v-v_s}{R_3} = -\frac{R_2}{R_1R_3}v}$$

Comme on est en convention récepteur, la caractéristique de cet ensemble en régime linéaire est bien celle d'une **résistance négative** de valeur $R_N = -\frac{R_1R_3}{R_2}$.

1.2. Soit V_{cc} la tension de saturation de l'ALI. On suppose que c'est le seul phénomène non-linéaire qui puisse se produire. On cherche les courants limites au-delà desquelles cela se produit.

Pour mémoire

Un ALI peut saturer en tension, mais aussi en **courant** lorsque celui-ci dépasse quelques dizaines de milliampères. C'est pour cela qu'on évite de prendre des résistances inférieures à la centaine d'ohms pour l'habillage d'un ALI. De **grandes résistances** garantissent **un courant faible**.

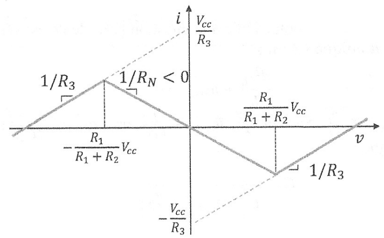
— Pour $\varepsilon = V_+ - V_- < 0$ et donc $v_s = -V_{cc}$, on a $v = V_+ < -\frac{R_1V_{cc}}{R_2+R_1}$ et $i = \frac{v+V_{cc}}{R_3}$.

— Pour $\varepsilon = V_+ - V_- > 0$ et donc $v_s = +V_{cc}$, on a $v = V_+ > \frac{R_1V_{cc}}{R_2+R_1}$ et $i = \frac{v-V_{cc}}{R_3}$.

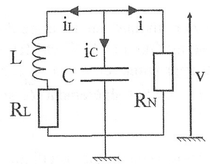
Piège

Un autre montage à résistance négative existe, avec la tension v sur la borne - de l'ALI. **La caractéristique en régime saturé est alors différente**, et fixée par la condition sur les signes de $\varepsilon = V_+ - V_-$ et v_s qui doivent être les mêmes. Il faut refaire le raisonnement ci-dessus !

On obtient la caractéristique courant-tension représentée sur la page suivante.



2.
On note i_L le courant traversant l'inductance et i_C le courant de la branche du condensateur. Le schéma équivalent est représenté ci-contre. On a :



— Loi des noeuds : $\frac{v}{R_N} + C\frac{dv}{dt} + i_L = 0$

— Loi des mailles : $R_Li_L + L\frac{di_L}{dt} = v$

En injectant l'expression de v dans la loi des noeuds, on obtient :

$$\frac{R_L}{R_N}i_L + \frac{L}{R_N}\frac{di_L}{dt} + C\left(R_L\frac{di_L}{dt} + L\frac{d^2i_L}{dt^2}\right) + i_L = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_NC} + \frac{R_L}{L}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}\left(\frac{R_L}{R_N}+1\right)i_L = 0}$$

On a des oscillations entretenues pour l'équation d'un **oscillateur harmonique**. Il faut alors :

$$\frac{1}{R_NC} + \frac{R_L}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_N = -\frac{R_1R_3}{R_2} = -\frac{L}{R_LC}}$$

Piège

Contrairement au circuit R-L-C série, R_N ne doit pas simplement compenser R_L. Sa valeur dépend aussi de l'inductance L et de la capacité C.

3. On suppose que la condition d'oscillation établie à la question précédente est vérifiée. L'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique** s'écrit :

$$\frac{d^2 i_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0$$

On identifie donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1+\frac{R_L}{R_N}}$. Sachant que $R_N = -\frac{L}{R_L C}$, on a $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{C}{L}R_L^2}$.
Cela permet de choisir C tel que :

$$C = \frac{1}{L\left[(2\pi f_0)^2 + \frac{R_L^2}{L^2}\right]}$$

A.N. : $C = 1.0\,\mu\text{F}$

Pour mémoire

On remarque que le terme dû à la **résistance interne** de la bobine vaut $\frac{R_L^2}{L^2} = 1\,\text{Hz}^2 \ll (2\pi f_0)^2$ et ne modifie que le **7e chiffre significatif** de la valeur du condensateur. Il est donc possible de faire l'approximation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ce qui n'aurait pas été le cas en basse fréquence. De plus, cela permet de modifier légèrement R_N si besoin, sans changer la fréquence des oscillations.

En réalité, pour que les oscillations démarrent, il faut un système légèrement instable :

$$R_N = -\frac{R_1 R_3}{R_2} \lesssim -\frac{L}{R_L C}$$

A.N. : $R_N \lesssim -1\,\text{M}\Omega$

Les oscillations naissent alors avec une **enveloppe exponentielle**, avant de s'arrêter de croître dès que la saturation de l'ALI est atteinte car le système redevient stable. On suppose $v_{cc} = 15\,\text{V}$.
On a $v_{\max} = v_{\lim_+} = -\frac{R_N}{R_3 - R_N} v_{cc}$, d'où :

$$R_3 = -\frac{R_N v_{cc}}{v_{max}} + R_N$$

A.N. : Pour $R_N \simeq -1\,\text{M}\Omega$, on a $R_3 = 500\,\text{k}\Omega$

On choisit ensuite les résistances R_2 et R_1 tel qu'on aie un système légèrement instable, c'est à dire $\frac{R_1}{R_2}$ légèrement supérieur à $\frac{1}{2}$. On a le choix !

A.N. : On peut choisir par exemple : $R_1 = 30\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 62\,\text{k}\Omega$

⊕ Petit plus

On ne peut pas acheter une résistance de n'importe quelle valeur ! En effet, la production s'organise selon des *séries géométriques*. On trouve uniquement des résistances dont la valeur vaut $R = \sqrt[n]{10^m}.10^p$ avec $n = 3, 6, 12, 24, \ldots 192$ la série de la résistance, $p \in [10^{-2}, 10^9]$ la décade et $m \in [1, n]$ le rang. Plus n est grand, plus la **précision** est importante, et plus la résistance est **chère** !