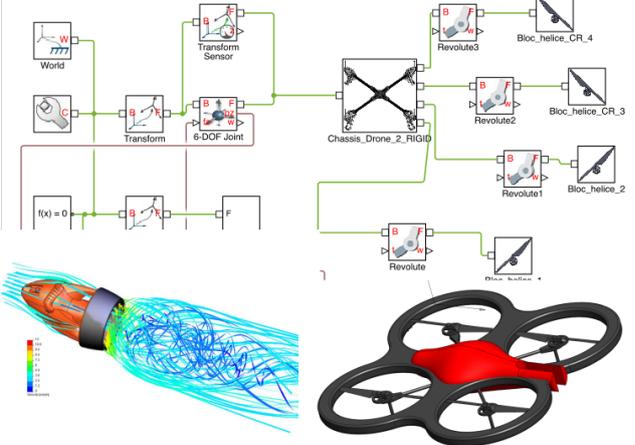


LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C1 : MODÉLISATION DES SYSTÈMES PLURITECHNIQUES COMPLEXES

TD 1 - Modélisation multiphysique architecturale des systèmes complexes (C1-1)

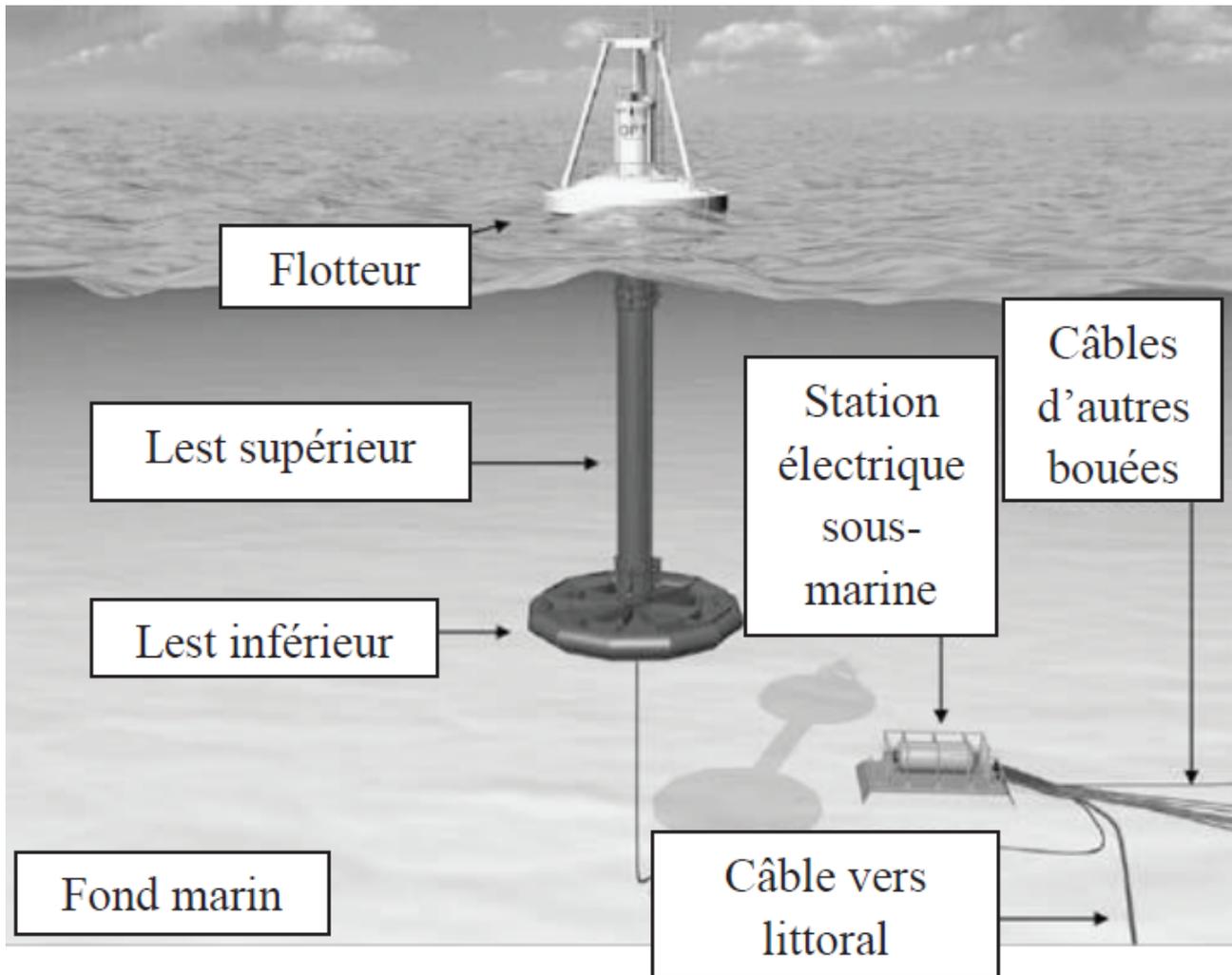
Compétences

- **Analyser**
 - Analyser le besoin et les exigences
 - Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle
 - Justifier le choix des constituants dédiés aux fonctions d'un système.
 - Caractériser un constituant de la chaîne de puissance.
 - Analyser les performances et les écarts
- **Modéliser**
 - Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
 - Identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un modèle.
- **Expérimenter**
 - Repérer les constituants réalisant les principales fonctions des chaînes fonctionnelles.
 - Justifier le choix d'un capteur ou d'un appareil de mesure vis-à-vis de la grandeur physique à mesurer.
- **Communiquer**
 - Rechercher et traiter des informations
 - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.
- **Concevoir**
 - Proposer une architecture fonctionnelle et organique.

Exercice 1 : Etude d'une Bouée houlomotrice

Source : Xavier Pessoles - CCINP PSI 2016

L'énergie produite à partir de la houle est appelée houlomotrice (ou énergie des vagues). Cette énergie est le plus souvent transformée en énergie électrique.



Le système de conversion d'énergie est schématisé sur la figure suivante.

Le vérin hydraulique est entraîné par le mouvement relatif de translation entre le flotteur et le lest. La translation du piston par rapport au cylindre du vérin est donc également paramétrée par le déplacement $z(t)$ par rapport à la position d'équilibre. La section utile du piston est notée S_p . Les pressions dans les chambres supérieure et inférieure du vérin sont notées respectivement P_1 et P_2 .

Un réservoir accumulateur haute pression (a) et un réservoir accumulateur basse pression (b) permettent de maintenir les pressions P_a (pression d'admission du moteur hydraulique) et P_b (pression de refoulement du moteur hydraulique) quasi-constantes en régime établi.

Un ensemble de clapets anti-retour permet de générer un débit volumique unidirectionnel $Q_m(t)$ vers le moteur hydraulique, quel que soit le sens de déplacement du piston. Les pertes induites par ce circuit redresseur seront négligées. On pourra alors considérer en régime établi, et en première approximation, les relations suivantes entre les pressions dans les réservoirs et dans les chambres du vérin : $P_a = \max(P_1, P_2)$ et $P_b = \min(P_1, P_2)$.

Q 1 : Compléter les zones en pointillés du schéma hydraulique en dessinant les clapets anti-retour conformément à la description précédente.

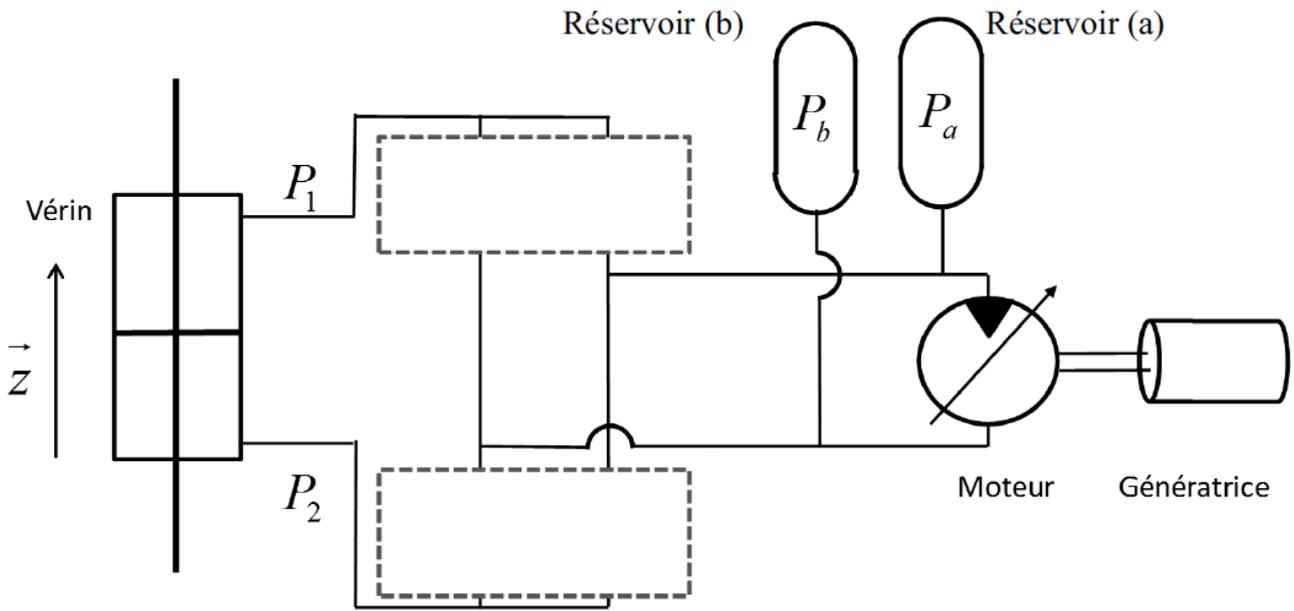
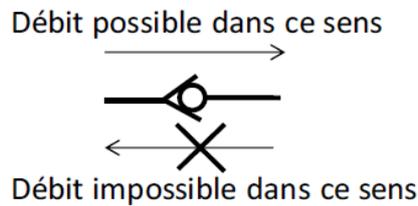


Schéma et principe des clapets anti-retour :



Exercice 2 : Véhicule à trois roues Clever

Source : Xavier Pessoles - Banque PT 2013 SIA On s'intéresse au véhicule à 3 roues Clever.



Le groupe motopropulseur est placé à l'arrière du véhicule. À l'avant, l'habitacle repose sur une roue de moto et pivote par rapport au bloc arrière autour d'une liaison pilotée angulairement par le biais de deux vérins hydrauliques. L'inclinaison est contrôlée par un ordinateur de bord en fonction de l'angle au volant et de la vitesse.

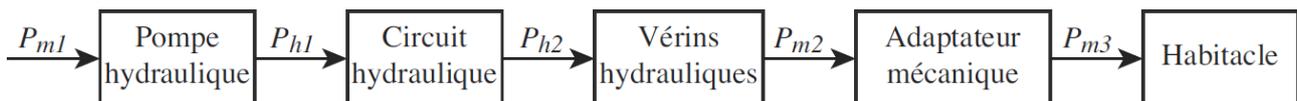


Le système d'inclinaison de l'habitacle est assuré par un système constitué :

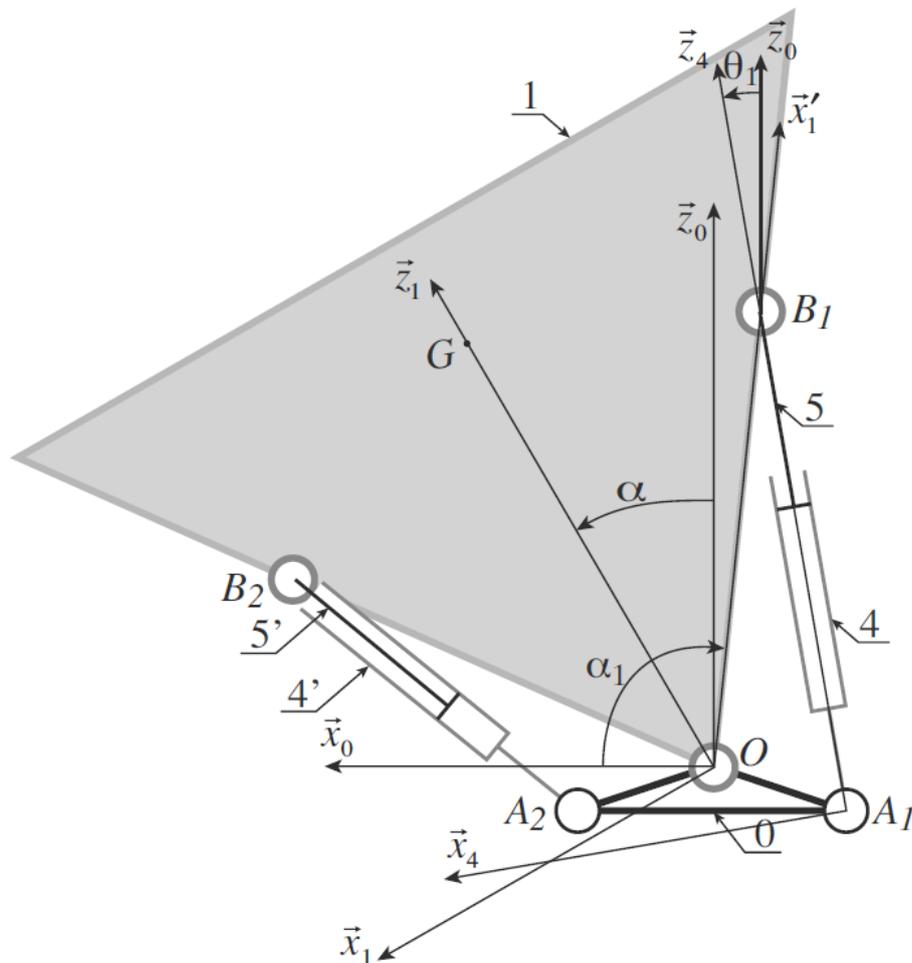
- d'un calculateur qui détermine le mouvement et la position à donner à l'habitacle en fonction des conditions d'utilisation;
- d'un système hydro-mécanique de transmission de puissance et d'adaptation de mouvement;
- d'un système de contrôle de l'inclinaison de l'habitacle.

La chaîne de transmission de puissance et d'adaptation de mouvement est composée :

- d'une pompe à engrenages actionnée par le moteur à gaz via un système de poulies/courroie;
- d'un circuit hydraulique;
- de 2 vérins hydrauliques simple effet;
- d'un système mécanique d'adaptation de mouvement afin de transformer le mouvement de translation des tiges des vérins en rotation de l'habitacle.



P_{mi} : puissance mécanique P_{hi} : puissance hydraulique



Les deux vérins hydrauliques transforment la puissance hydraulique venant du servo-distributeur afin d'incliner l'habitacle. Ceux-ci sont disposées entre l'habitacle et le châssis du module arrière de propulsion. Le calculateur autorise ou non, l'alimentation en huile de l'un des vérins provoquant la sortie de tige, pendant que l'huile s'évacue de l'autre vérin. Ainsi l'habitacle s'incline du coté opposée au vérin alimenté. Lorsque l'habitacle est en position centrale, les tiges de vérins ont en position médiane.

Le circuit hydraulique est composé de 6 modules :

- une pompe à engrenages entraînée par le moteur à gaz;
- un clapet anti-retour et une valve de décharge tarée pour s'enclencher à 160 bar et se remettre en position fermée à 100 bar;
- un accumulateur oléopneumatique de volume nominal 1.4 L;
- un limiteur de pression;
- un servo-distributeur à effet proportionnel 4/3 à centre fermé;
- deux vérins simple effet, de diamètre 32 mm pour chaque piston et de 200 mm de course.

Q 2 : Compléter le câblage du circuit hydraulique à partir du signe «*», ainsi que le schéma du servo-distributeur.

Q 3 : En considérant les conditions initiales évoquées, expliquer, en commençant à l'instant de démarrage de la pompe, le comportement du circuit hydraulique en précisant clairement les différentes phases de fonctionnement. Quel est l'utilité de la temporisation ? On souhaite remplacer cette temporisation par un capteur. Préciser la grandeur qu'il devra mesurer. Donner un avantage et un inconvénient du remplacement de la temporisation par ce capteur.

Exercice 3 : Analyse fonctionnelle d'un tapis de course

Source : PTSI B 2011

1 Présentation du système

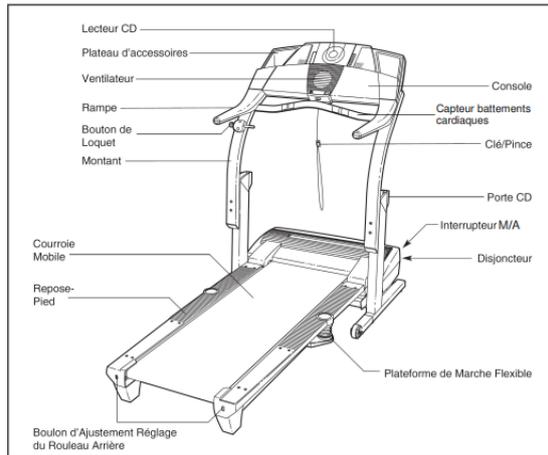
a) Description du système

Le tapis de course est un système complet de fitness à domicile. Il permet de courir quand à l'extérieur les conditions atmosphériques sont particulièrement difficiles, quand on a peu de temps à disposition ou plus simplement quand on en a envie.

Il intègre des programmes d'entraînements spécifiques :

- 6 programmes préenregistrés simulant des profils de courses différents ;
- 4 programmes de contrôle de la fréquence cardiaque ;
- 2 programmes personnalisables : vitesse du tapis (de 1 à 19 km/h) et inclinaison ;
- 1 programme de test de forme.

- L'utilisateur court sur un tapis qui est entraîné dans le sens inverse de la course. La vitesse de déplacement du tapis est réglable pour permettre au coureur de rester sur place.
- Ce tapis de course propose un large choix de mode de fonctionnement.
- L'utilisateur peut choisir les modes à l'aide d'un écran tactile sur lequel s'affiche le mode choisi ainsi que les informations de vitesse et de temps et de fréquence cardiaque.
- La fréquence cardiaque est mesurée à l'aide d'un capteur optique présent sur l'appareil.
- L'utilisateur peut mettre en fonctionnement le dispositif à l'aide d'un interrupteur.
- Un calculateur permet de traiter l'ensemble des informations.



b) Cahier des charges et exigences

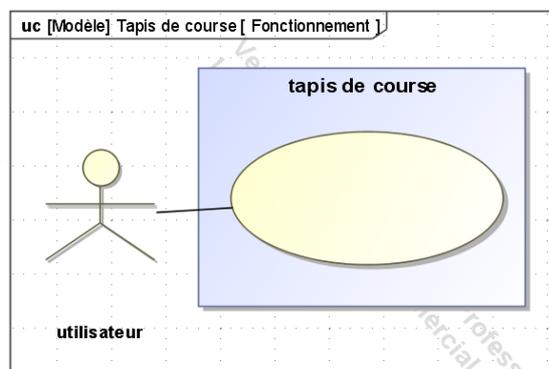
Afin d'aboutir à la rédaction du cahier des charges, on souhaite dans un premier temps effectuer une analyse des exigences du système tapis de course.

Q 4 : Compléter le diagramme d'exigences partiel proposé sur le document réponse. Vous justifierez la nature du lien « satisfy ».

2 Étude comportementale

a) Cas d'utilisation

Q 5 : Proposer un diagramme de cas d'utilisation le plus simple possible, décrivant le besoin premier satisfait par le tapis de course.



Afin de compléter ce premier diagramme, on décide de l'enrichir en ajoutant des cas d'utilisation secondaires, pour lesquels des relations d'inclusion, d'extension ou de généralisation sont considérées.

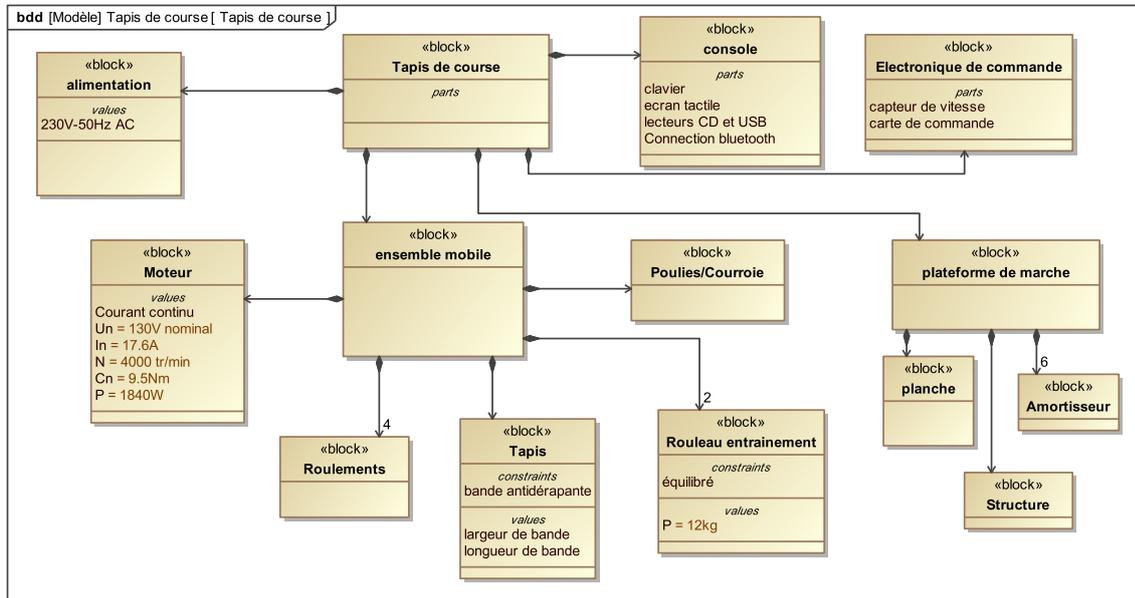
Un diagramme des cas d'utilisation ébauché est proposé.

Q 6 : Compléter le diagramme précédent faisant apparaître deux cas d'utilisation secondaires.

3 Etude structurale

a) Diagramme de définition des blocs

Le concepteur doit préciser quels sont les moyens techniques qu'il va mettre en œuvre pour que le tapis de course fonctionne suivant les exigences du cahier des charges. Le diagramme de définition de blocs permet de présenter les différents composants choisis.



4 Analyse et validation des caractéristiques de la chaîne fonctionnelle.

a) Présentation de la chaîne fonctionnelle

Les caractéristiques du moteur d'entraînement du tapis de course sont données en annexe.

b) Modélisation de la chaîne fonctionnelle

Q 7 : Proposer le modèle fonctionnel « chaîne d'énergie / chaîne d'information » du tapis de course. Compléter pour cela la chaîne fonctionnelle donnée sur le document réponse.

c) Validation des données mécaniques

Q 8 : A l'aide de l'annexe sur la motorisation, donner la vitesse maximale du moteur (ω_m^{max}) en rad/s .

Q 9 : Donner la relation entre $V^{max}(15/0)$ et N_m^{max} . Faire l'application numérique et vérifier que le moteur permette d'atteindre la vitesse maximale donnée dans le cahier des charges (exigence 1.3.2).

Q 10 : Donner la relation entre la vitesse de rotation du moteur en tr/min (N_m) et la vitesse de défilement du tapis $V(15/0)$ en km/h . Déterminer alors à quelle vitesse le moteur doit tourner (en tr/min) pour atteindre différentes vitesses cibles. (On complètera le tableau du document réponse.)

On note J_m l'inertie équivalente de toute la chaîne de transmission mécanique ramenée à l'arbre du moteur avec $J_m = 4 \times 10^{-2} kg.m^2$.

On rappelle l'expression du théorème du moment dynamique ramené à l'arbre moteur reliant $\omega_m(t)$ au couple moteur noté C_m :

$$J_m \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) \quad (1)$$

Q 11 : Rappeler l'unité de C_m et vérifier sa dimension physique avec l'équation 1.

Q 12 : A l'aide de la documentation technique du moteur donnée en annexe, donner l'accélération maximale angulaire pouvant être atteinte par la chaîne de transmission.

- On note 0 le sol dont le référentiel associé est supposé galiléen.
- On note $V(15/0)$ la norme de la vitesse de défilement du tapis de course (ou courroie d'enroulement 15) par rapport au sol.
- La courroie mobile 15 s'enroule sans glisser sur le rouleau avant 7 qui a pour rayon $R_{r7} = 24,5\text{mm}$.
- On note ω_{70} la vitesse de rotation du rouleau 7 par rapport au sol exprimée en rad/s .
- Le relation entre $V(15/0)$ et ω_{70} est donnée par

$$V(15/0) = R_{r7} \cdot \omega_{70}$$

- Le moteur à courant continu entraîne en rotation la poulie motrice notée 21 qui a pour rayon $R_{p21} = 27\text{mm}$. Sa vitesse de rotation exprimée en rad/s est notée ω_m .
- Le moteur est piloté par un hacheur. Un capteur de vitesse est présent sur l'axe du moteur. Il s'agit d'une génératrice tachymétrique qui fournit au calculateur une tension proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor.
- Un système de transmission de mouvement par poulie-courroie (20) permet de transmettre la puissance au tapis de course. On a la relation entre ω_{70} et ω_m :

$$\frac{\omega_{70}}{\omega_m} = K_r = \frac{R_{p21}}{R_{r7}}$$

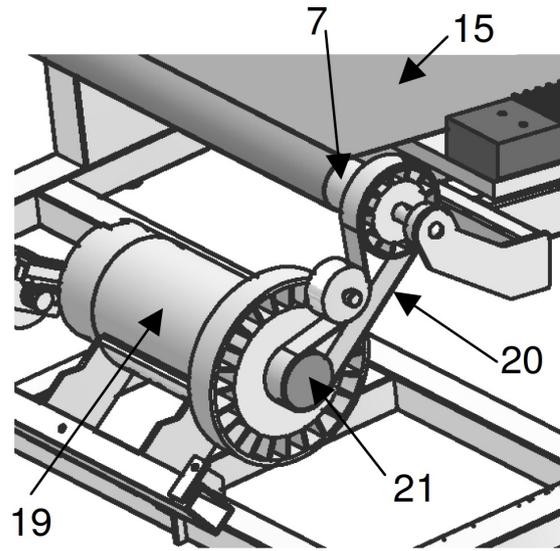


FIGURE 1 – Détail de la chaîne de transmission de puissance mécanique

Le tapis de course démarre avec une rampe en vitesse à accélération constante. Sachant que l'accélération maximale de défilement du tapis de course ne doit pas dépasser l'accélération maximale physiologique de $0,2 \cdot g$ avec $g = 9,81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q 13 : Donner la relation entre l'accélération linéaire du tapis $a(15/0)$ (en m/s^2) et l'accélération angulaire du moteur $\frac{d\omega_m}{dt}$. Donner l'accélération maximale atteignable avec la motorisation et comparer la à celle limitée par les facteurs physiologiques. Déterminer alors l'accélération angulaire maximale à choisir. On la notera a_{max} .

Q 14 : Donner la relation entre l'accélération de défilement du tapis $a(15/0)$ et sa vitesse ($V(15/0)$). En déduire la durée d'accélération notée t_a qu'il faut pour atteindre la vitesse défilement du tapis de 12km/h .

La figure 2 donne le profil de vitesse souhaité pour un entraînement d'une heure ($t_f = 1\text{heure}$) à 12km/h .

Q 15 : Exprimer le nombre de tours effectué par le moteur sur un cycle d'entraînement.

Cette donnée peut être utile pour donner une estimation de la durée de vie probable du système.

5 Modélisation du comportement du moteur

Le moteur utilisé est un moteur électrique à courant continu. Son comportement peut être modélisé par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + R \cdot i_m(t)$;
- $C_m(t) = K_t \cdot i_m(t)$;
- $e(t) = K_e \omega_m(t)$.

avec

- $u_m(t)$: tension d'induit en V;
- $i_m(t)$: courant d'induit en A;
- $e(t)$: force contre-électromotrice en V;
- R : résistance d'induit;
- K_t : la constante de couple en $\text{Nm} \cdot \text{A}^{-1}$;
- K_e : constante de force contre-électromotrice en $\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$. Dans la suite, on considèrera $K_t = K_e$.

Q 16 : En utilisant les équations du moteur électrique fournies et l'équation 1, en déduire l'équation différentielle liant la vitesse angulaire du moteur $\omega_m(t)$ à J_m , K_t et $u_m(t)$ que l'on mettra sous la forme de l'équation 2. Où A et B sont des constantes à déterminer.

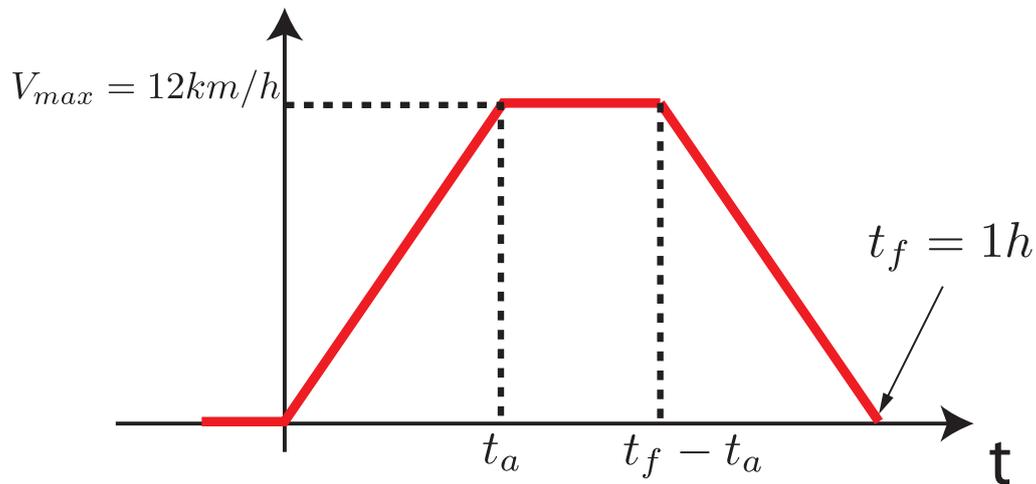


FIGURE 2 – Profil de vitesse de défilement atteint par le tapis.

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} + A\omega_m(t) = B u_m(t). \quad (2)$$

On donne $J_{eq} = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

On notera $\Omega_m(p)$ la transformée de Laplace de $\omega_m(t)$ et de façon général $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$.

Q 17 : En supposant les conditions initiales nulles passer l'équation 2 dans le domaine de Laplace.

Q 18 : Donner l'expression de la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ et la mettre sous forme canonique.

On alimente le moteur avec un échelon d'amplitude $U_{max} = 180 \text{ V}$.

Q 19 : Donner l'expression de $u_m(t)$ puis celle de $U_m(p)$.

Q 20 : Donner l'expression de $\Omega_m(p)$.

Q 21 : Rappeler les théorèmes de la valeur initiale et finale.

Q 22 : Estimer la vitesse de rotation du moteur, puis la vitesse de défilement du tapis, à $t \rightarrow \infty$ en fonction de A , B , U_{max} et R_{p21} .

Q 23 : Estimer l'accélération angulaire du moteur, puis l'accélération de défilement du tapis, à $t \rightarrow 0$ en fonction de A , B , U_{max} et R_{p21} .

6 Annexes

a) Données de la motorisation du tapis de course

On donne les caractéristiques du moteur utilisé pour l'entraînement du tapis de course.

Grandeur	Valeur
Vitesse maximal sans chargement	$N_m^{max} = 4000 \text{ tr/min}$
Couple maximale	$C_m^{max} = 9,5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$



b) Transformées de Laplace usuelles

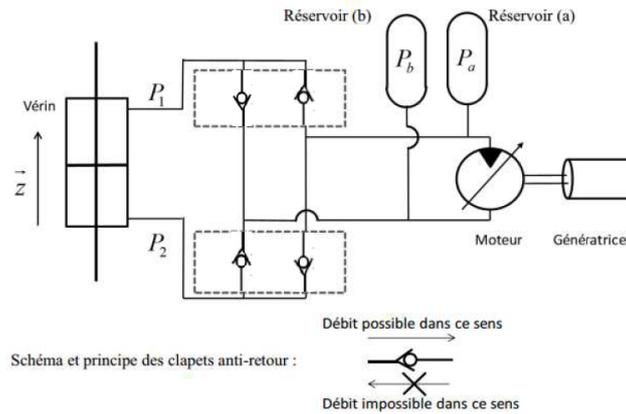
Pour rappel : $u(t)$ est la fonction échelon unitaire.

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$	$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$K u(t)$	$\frac{K}{p}$	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$K t u(t)$	$\frac{K}{p^2}$	$\sinh(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p + a}$	$\cosh(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} t^n u(t)$	$\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$	$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	1	$K \delta(t)$	K

Corrigé

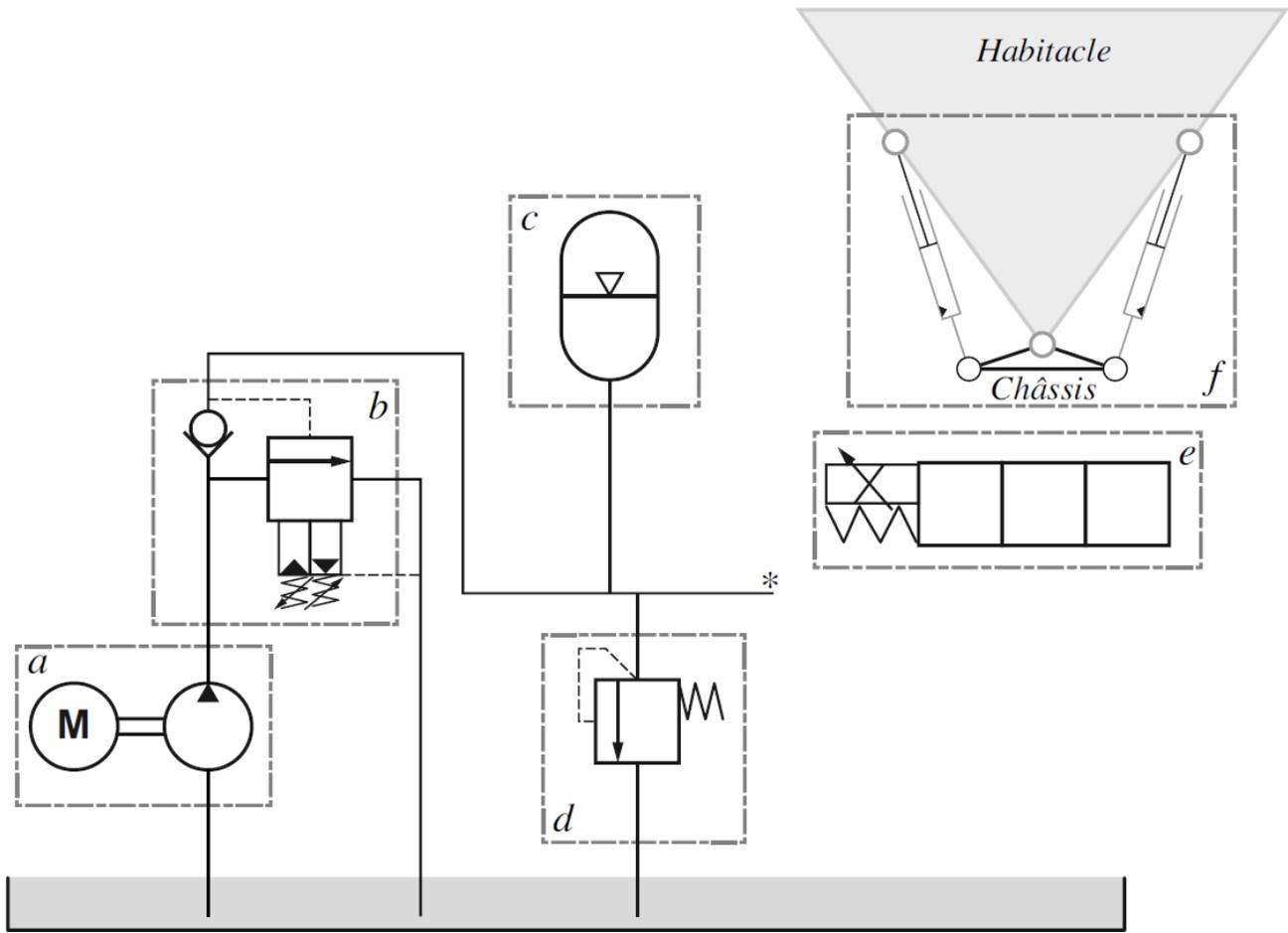
Exercice 1 : Etude d'une Bouée houlomotrice

Q 1 : Compléter les zones en pointillés du schéma hydraulique en dessinant les clapets anti-retour conformément à la description précédente.



Exercice 2 : Véhicule à trois roues Clever

Q 2 : Compléter le câblage du circuit hydraulique à partir du signe « * », ainsi que le schéma du servo-distributeur.



Au démarrage du véhicule, la valve de décharge du module (b) est fermée. Le distributeur à effet proportionnel(e) est en position médiane, les vérins sont donc immobiles. La commande des vérins est initialement bloquée par une temporisation.

Q 3 : En considérant les conditions initiales évoquées, expliquer, en commençant à l'instant de démarrage de la pompe, le comportement du circuit hydraulique en précisant clairement les différentes phases de fonctionnement. Quel est l'utilité de la temporisation ? On souhaite remplacer cette temporisation par un capteur. Préciser la grandeur qu'il devra mesurer. Donner un avantage et un inconvénient du remplacement de la temporisation par ce capteur.

Démarrage de la pompe et montée en pression du circuit avec remplissage de l'accumulateur (c).

À la fin de la temporisation le distributeur peut être commandé et ainsi alimenter les vérins.

Si la pression augmente trop, alors le limiteur de pression (d) renvoie une partie du fluide vers le réservoir et si c'est insuffisant alors (b) permet une décharge du circuit (ouverture vers le réservoir jusqu'à atteindre le niveau bas réglé).

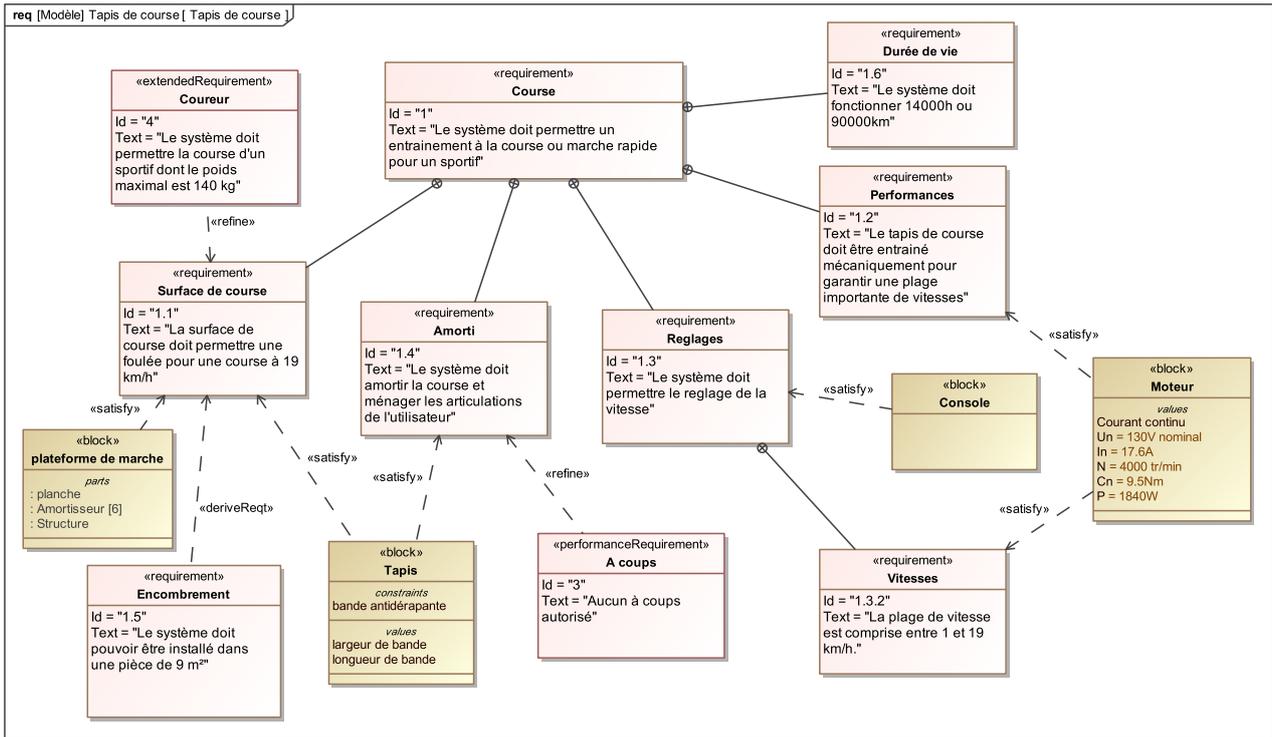
La temporisation permet d'attendre qu'un niveau de pression suffisant dans le circuit soit atteint.

Pour remplacer la temporisation on peut mesurer la pression dans le circuit ou plus simplement détecter le niveau de pression satisfaisant pour le fonctionnement à l'aide d'un pressostat.

La solution utilisant un capteur de pression est plus sûre que la temporisation qui pourrait autoriser la commande du distributeur alors que la pression dans le circuit est encore insuffisante.

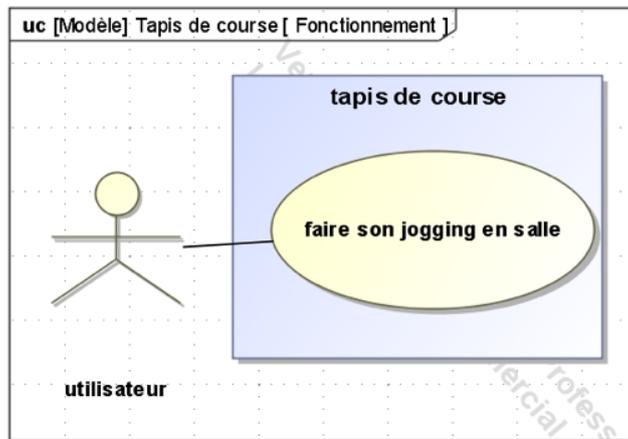
Exercice 3 : Analyse fonctionnelle d'un tapis de course

Q 4 : Compléter le diagramme d'exigences partiel proposé sur le document réponse. Vous justifierez la nature du lien « satisfy ».

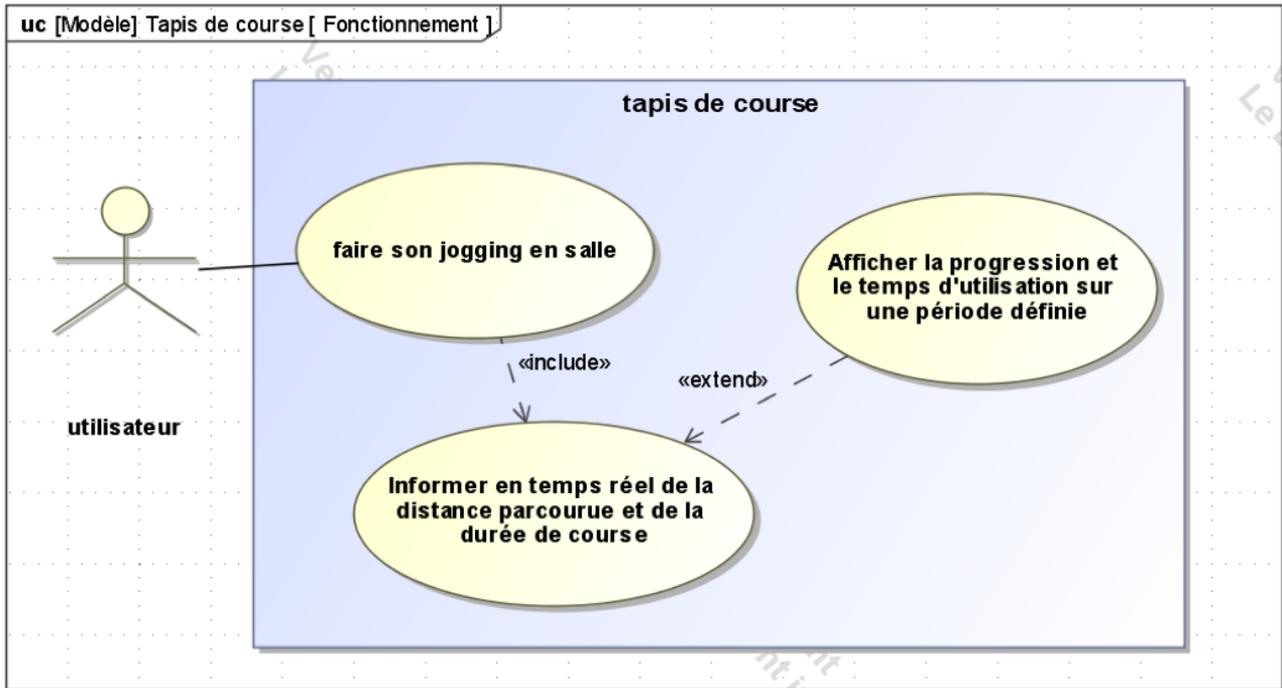


Le lien "satisfy" est lié à un block qui correspond à un composant.

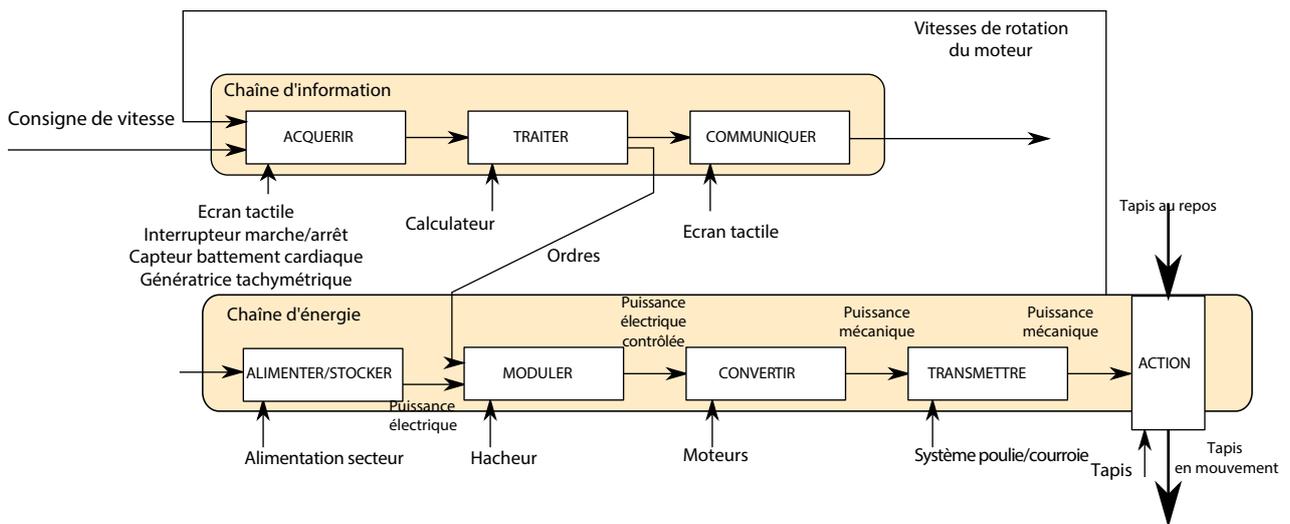
Q 5 : Proposer un diagramme de cas d'utilisation le plus simple possible, décrivant le besoin premier satisfait par le tapis de course.



Q 6 : Compléter le diagramme précédent faisant apparaître deux cas d'utilisation secondaires.



Q 7 : Proposer le modèle fonctionnel « chaîne d'énergie / chaîne d'information » du tapis de course. Compléter pour cela la chaîne fonctionnelle donnée sur le document réponse.



Q 8 : A l'aide de l'annexe sur la motorisation, donner la vitesse maximale du moteur (ω_m^{max}) en rad/s.
L'annexe donne $N_m^{max} = 4000 \text{ tr/min}$

$$\omega_m^{max} = N_m^{max} \cdot \frac{2\pi}{60} \approx 419 \text{ rad/s}$$

Q 9 : Donner la relation entre $V^{max}(15/0)$ et N_m^{max} . Faire l'application numérique et vérifier que le moteur permette d'atteindre la vitesse maximale donnée dans le cahier des charges (exigence 1.3.2).
On obtient alors

$$V^{max}(15/0) = R_{r7} \cdot \omega_{70}^{max} = R_{p21} \cdot \omega_m^{max} = R_{p21} \cdot N_m^{max} \cdot \frac{2\pi}{60}$$

L'application numérique donne :

$$V^{max}(15/0) = 11,3 \text{ m/s} = 40,7 \text{ km/h}$$

Le moteur permet donc largement d'atteindre une vitesse de 19 km/h

Q 10 : Donner la relation entre la vitesse de rotation du moteur en tr/min (N_m) et la vitesse de défilement du tapis $V(15/0)$ en km/h . Déterminer alors à quelle vitesse le moteur doit tourner (en tr/min) pour atteindre différentes vitesses cibles. (On complètera le tableau du document réponse.)

$$N_m = \frac{60}{2\pi} \omega_m = \frac{60}{2\pi} \frac{V(15/0)}{R_{p21}}$$

si $V(15/0)$ est exprimé en km/h on obtient alors pour l'application numérique :

$$N_m = \frac{60}{2\pi} \frac{V(15/0)}{3,6 \times 27 \times 10^{-3}}$$

$V(15/0)$ en km/h	N_m en $tour/min$
9	884,2
10	982,4
12	1178,9
15	1473,7
17	1670,1
19	1866,6

Q 11 : Rappeler l'unité de C_m et vérifier sa dimension physique avec l'équation 1.

C_m s'exprime en $N \cdot m$

L'équation de la dynamique permet de vérifier l'homogénéité :

$$[C_m] = [J_m] \cdot [\omega_m] \cdot [dt]^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot rad \cdot s^{-1} \cdot s^{-1}$$

Sachant qu'un $N = 1 kg \cdot m \cdot s^{-2}$ on vérifie bien l'homogénéité.

Q 12 : A l'aide de la documentation technique du moteur donnée en annexe, donner l'accélération maximale angulaire pouvant être atteinte par la chaîne de transmission.

$$\frac{d\omega_m(t)^{max}}{dt} = \frac{C_m^{max}}{J_m}$$

L'application numérique donne :

$$\frac{d\omega_m(t)^{max}}{dt} = \frac{9,5}{4 \times 10^{-2}} = 237,5 rad/s^2$$

Q 13 : Donner la relation entre l'accélération linéaire du tapis $a(15/0)$ (en m/s^2) et l'accélération angulaire du moteur $\frac{d\omega_m}{dt}$. Donner l'accélération maximale atteignable avec la motorisation et comparer la à celle limitée par les facteurs physiologiques. Déterminer alors l'accélération angulaire maximale à choisir. On la notera a_{max} .

On connaît la relation entre $V(15/0)$ et ω_m : $V(15/0) = R_{p21} \cdot \omega_m$. On en déduit :

$$a(15/0) = \frac{dV(15/0)}{dt} = R_{p21} \cdot \frac{d\omega_m}{dt}$$

- maximale avec la motorisation : $a_{max1}(15/0) = R_{p21} \cdot \frac{\omega_m^{max}}{dt} = 6,41 m \cdot s^{-2}$

- maximale limitée par les facteurs physiologiques : $a_{max1}(15/0) = 0,2 \cdot g = 1,962 m \cdot s^{-2}$.

Le facteur limitant est lié facteurs physiologiques, on choisit donc $a_{max1}(15/0) = 1,96 m \cdot s^{-2}$

Q 14 : Donner la relation entre l'accélération de défilement du tapis $a(15/0)$ et sa vitesse ($V(15/0)$). En déduire la durée d'accélération notée t_a qu'il faut pour atteindre la vitesse défilement du tapis de $12 km/h$.

$$\begin{aligned}
 a(15/0) &= \frac{dV(15/0)}{dt} \\
 &\Leftrightarrow \\
 dV(15/0) &= a(15/0) dt \\
 &\Rightarrow \\
 \int_{t=0}^{t_f} dV(15/0) &= \int_{t=0}^{t_f} a(15/0) dt \\
 &\Leftrightarrow \\
 V(15/0)(t_f) - 0 &= a(15/0) \cdot t_f
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$t_f = \frac{V(15/0)(t_f)}{a(15/0)_{max}} \approx 1,7s$$

Q 15 : Exprimer le nombre de tours effectué par le moteur sur un cycle d'entraînement.

On a une relation linéaire entre $V(15/0)$ et ω_m : $V(15/0) = R_{p21} \cdot \omega_m = R_{p21} \cdot \frac{d\theta_m}{dt}$

On peut calculer $\theta_m(t_f)$ avec la relation suivante :

$$\int_{t=0}^{t_f} d\theta_m = \int_{t=0}^{t_f} \omega_m dt = \int_{t=0}^{t_f} \frac{V(15/0)}{R_{p21}} dt$$

Or $\int_{t=0}^{t_f} V(15/0) dt$ est l'aire sous la courbe donné sur la figure du trapèze.

On trouve donc :

$$\int_{t=0}^{t_f} d\theta_m = \theta_m(t_f) = \frac{V_{max}(t_f - t_a)}{R_{p21}} \approx 4,44 \times 10^5 \text{ rad} = 70725 \text{ tours.}$$

Q 16 : En utilisant les équations du moteur électrique fournies et l'équation 1, en déduire l'équation différentielle liant la vitesse angulaire du moteur $\omega_m(t)$ à J_m , K_t et $u_m(t)$ que l'on mettra sous la forme de l'équation 2. Où **A et **B** sont des constantes à déterminer.**

Les équations donnent :

$$\begin{aligned}
 C(t) = K_t \cdot i(t) &= K_t \left(\frac{u(t) - e(t)}{R} \right) = \frac{K_t}{R} \cdot U(t) - \frac{K_t \cdot K_e}{R} \cdot \omega_M(t) \\
 &\Leftrightarrow \\
 J_{eq} \cdot \dot{\omega}_M + \frac{K_t K_e}{R} \omega_M(t) &= \frac{K_t}{R} \cdot U(t) \\
 &\Leftrightarrow \\
 \dot{\omega}_M + \frac{K_t K_e}{R J_{eq}} \omega_M(t) &= \frac{K_t}{R J_{eq}} \cdot U(t)
 \end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_M(t) + \frac{K_t K_e}{R J_{eq}} \omega_M(t) = \frac{K_t}{R J_{eq}} U(t)$$

Q 17 : En supposant les conditions initiales nulles passer l'équation 2 dans le domaine de Laplace.

Avec les conditions initiales nulles et en utilisant les propriétés de linéarité et les théorème de dérivation, on obtient :

$$p \cdot \Omega_m(p) + A \Omega_m(p) = B U_m(p).$$

Q 18 : Donner l'expression de la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ et la mettre sous forme canonique.

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{B}{p + A} = \frac{B/A}{1 + \frac{p}{A}}$$

Q 19 : Donner l'expression de $u_m(t)$ puis celle de $U_m(p)$.

A l'aide du tableau des transformées de Laplace fourni en annexe :

$$u_m(t) = U_{max} \cdot u(t)$$

$$U_m(p) = \frac{U_{max}}{p}$$

Q 20 : Donner l'expression de $\Omega_m(p)$.

$$\Omega_m(p) = H_m(p) \cdot U_m(p) = \frac{B/A}{1 + \frac{p}{A}} \cdot \frac{U_{max}}{p}$$

Q 21 : Rappeler les théorèmes de la valeur initiale et finale.

Théorème de la valeur finale : Si le système est stable,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p).$$

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p).$$

Q 22 : Estimer la vitesse de rotation du moteur, puis la vitesse de défilement du tapis, à $t \rightarrow \infty$ en fonction de A , B , U_{max} et R_{p21} .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Omega_m(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{B/A}{1 + \frac{p}{A}} \cdot \frac{U_{max}}{p} = \frac{B \cdot U_{max}}{A}$$

La vitesse de défilement du tapis est donnée par :

$$V(15/0)^\infty = \omega_m^\infty \cdot R_{p21} = \frac{R_{p21} B \cdot U_{max}}{A}$$

Q 23 : Estimer l'accélération angulaire du moteur, puis l'accélération de défilement du tapis, à $t \rightarrow 0$ en fonction de A , B , U_{max} et R_{p21} .

En combinant les théorèmes aux limites et le théorème de dérivation

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_m(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \Omega_m(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \frac{B/A}{1 + \frac{p}{A}} \cdot \frac{U_{max}}{p} = B \cdot U_{max} \end{aligned}$$

On trouve également :

$$\frac{dV(15/0)}{dt} \Big|_{t=0} = R_{p21} B \cdot U_{max}$$