

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C1 : MODÉLISATION DES SYSTÈMES PLURITECHNIQUES COMPLEXES

TD 2 - Modélisation multiphysique des systèmes complexes (C1-2)

Compétences

- **Analyser**
 - Analyser le besoin et les exigences
 - Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle
 - Identifier la structure d'un système asservi.
 - Analyser les performances et les écarts
- **Modéliser**
 - Identifier les performances à prévoir ou à évaluer.
 - Identifier les paramètres d'un modèle.
 - Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.
 - Compléter un modèle multiphysique.
 - Associer un modèle aux composants des chaînes fonctionnelles.
 - Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
 - Modéliser un système par schéma-blocs.
 - Simplifier un modèle.
 - Préciser les limites de validité d'un modèle.
- **Expérimenter**
 - Identifier les grandeurs physiques d'effort et de flux.
 - Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement.
- **Communiquer**
 - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.
- **Concevoir**
 - Proposer une architecture fonctionnelle et organique.

Exercice 1 : Exosquelette : assistance au maniement de charges

Source : Central TSI2017

1 Présentation du système

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer

considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue (figure 1). Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



FIGURE 1 – Maniement de charge

L'exosquelette (figure 2) est constitué :

- d'un support de charge transportée 4;
- de deux moteurs de l'articulation de la hanche;
- de deux cuisses 2 et 2';
- de deux moteurs de genou;
- de deux jambes 1 et 1';
- de deux articulations de cheville, non motorisées;
- de deux pieds 3 et 3'.

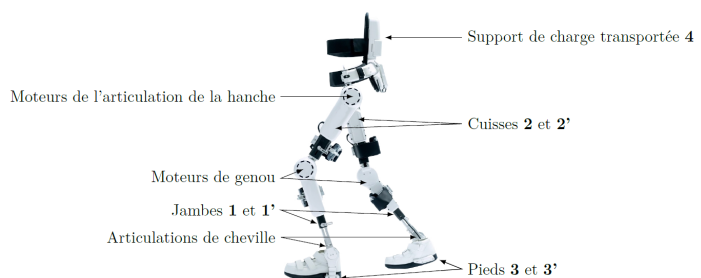


FIGURE 2 – Constituants de l'exosquelette

Les actionneurs équipant chaque axe (genoux et hanches) de l'exosquelette sont des moteurs synchrones de type « brushless » couplés à des réducteurs de vitesse de type « Harmonic Drive ». Chaque moteur est alimenté par une carte de positionnement incluant un onduleur triphasé, la source d'énergie étant un pack de batteries de tension nominale égale à 36 V. La carte de positionnement exploite les signaux des capteurs à effet Hall intégrés dans le moteur ainsi que ceux d'un codeur incrémental monté sur l'axe moteur, elle comprend trois asservissements :

- un asservissement de courant qui correspond à un asservissement de couple;
- un asservissement de vitesse avec un correcteur proportionnel et intégral;
- un asservissement de position offrant des fonctions d'anticipation de vitesse.

Les moteurs au niveau de l'articulation de la hanche permettent de modifier l'inclinaison de la charge afin d'éviter un basculement autour de son axe de tangage. Une centrale inertielle est utilisée à cet effet. Un modèle multiphysique de l'exosquelette est représenté figure 3.

Ce sujet se concentre essentiellement sur le dimensionnement et le pilotage des moteurs des genoux. Il est proposé les deux études suivantes :

- Effectuer une analyse structurelle du système et de la modélisation proposée;
- validation de l'architecture de la chaîne fonctionnelle réalisant l'exigence fonctionnelle « gérer le mouvement vertical »;

2 Analyse structurelle du système

Q 1 : A l'aide de la description précédente proposer une analyse structurelle de l'axe du genoux sous la forme d'une chaîne fonctionnelle.

Q 2 : Sur la modélisation multiphysique, repérer les parties acausales et les parties causales. Pour cela on surli-gnera en rouge ce qui représente la modélisation causale et en bleu ce qui représente la modélisation acausale.

Q 3 : Décrire en quelques phrases ce modèle et ce qu'il permet de représenter.

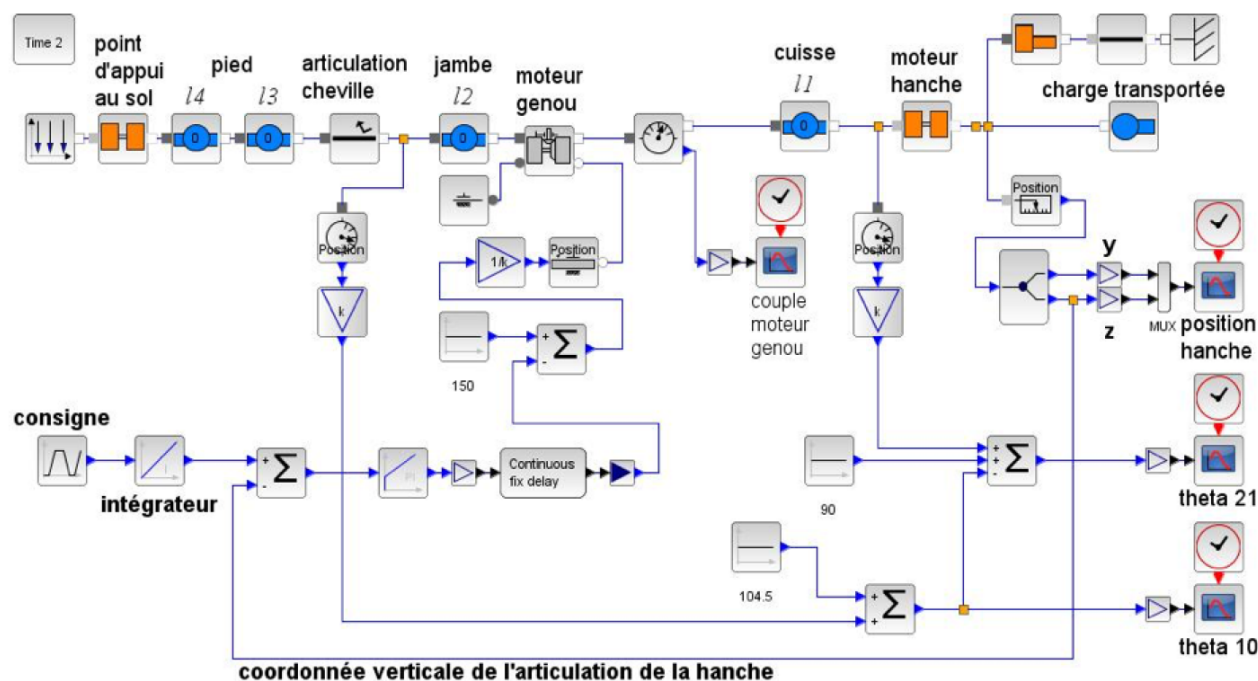


FIGURE 3 – Modèle multiphysique de l'exosquelette

3 Exigence fonctionnelle « gérer le mouvement vertical »



Objectif 1 :

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges (tableau 9).

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse étudié précédemment, cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée figure 4 montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.

Exigences	Critères d'appréciation	Niveau
Gérer le mouvement vertical	Précision statique de la boucle d'asservissement de position :	
	erreur de position	< 1%
	erreur de trainage	< 1%
	erreur d'accélération	< 1%

TABLE 1 – Extrait du cahier des charges associé à l'exigence « Gérer le mouvement vertical »

Selon le cahier des charges, pour assurer une bonne synchronisation des axes, l'exigence de précision statique suite à une entrée de type échelon, de type rampe ou de type accélération doit être inférieure à 1%.

Le premier modèle défini figure 5 est adopté pour chaque axe.

Notations

Le correcteur de l'asservissement de vitesse est de la forme $C_{\Omega}(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$. T_i est réglé afin de compenser le pôle dominant pour la situation correspondant à l'inertie moyenne, $T_i = \frac{J}{f}$. Le correcteur prend alors la forme :

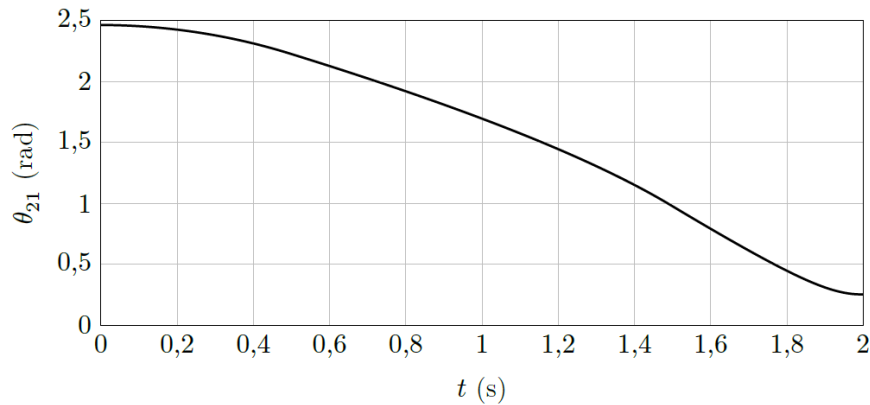


FIGURE 4 – Évolution de la consigne moteur

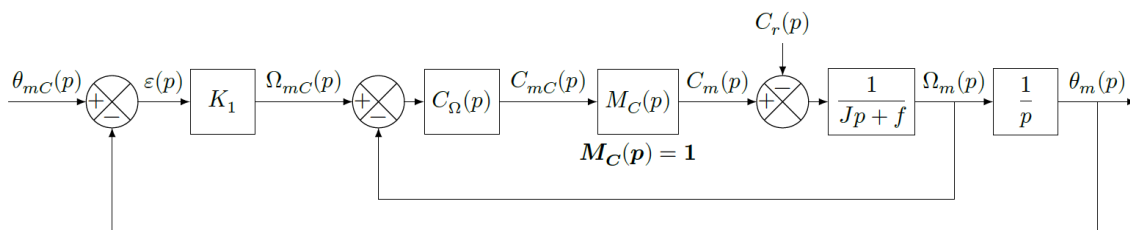


FIGURE 5 – Premier modèle

$\theta_{mC}(p)$	consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_{mC}(t)$ en rad)
$\theta_m(p)$	position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_m(t)$ en rad)
$C_{mC}(p)$	consigne de couple moteur (variable temporelle : $C_{mC}(t)$ en N.m)
$C_m(p)$	couple moteur (variable temporelle : $C_m(t)$ en N.m)
$C_r(p)$	couple résistant perturbateur (variable temporelle : $C_r(t)$ en N.m)
K_1	gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en s^{-1})
$\Omega_{mC}(p)$	consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_{mC}(t)$ en $rad.s^{-1}$)
$\Omega_m(p)$	vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_m(t)$ en $rad.s^{-1}$)
$C_\Omega(p)$	correcteur de l'asservissement de vitesse
$M_C(p)$	modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles : $M_C(p) = 1$
J	moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur
f	coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement

TABLE 2 – Définition des grandeurs

$$C_\Omega(p) = K_2 \left(\frac{Jp + f}{Jp} \right)$$

Le premier modèle de la figure 5 permet de constater que :

- l'écart est défini par la variable $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$;

- l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$.

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart $\varepsilon(t)$ est égal à l'erreur $\mu(t)$.

La précision statique du système est définie par les paramètres suivants :

- $\varepsilon_p = \varepsilon(t)$ suite à une entrée de type échelon unitaire $\theta_{mC}(t) = u(t)$, $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$, appelée erreur de position;
- $\varepsilon_v = \varepsilon(t)$ suite à une entrée de type rampe unitaire $\theta_{mC}(t) = u(t)$, $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p^2}$, appelée erreur de trainage;
- $\varepsilon_a = \varepsilon(t)$ suite à une entrée de type accélération $\theta_{mC}(t) = u(t)$, $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p^3}$, appelée erreur en accélération.

Hypothèse

Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude $C_r(p) = 0$.

Q 4 : Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté figure 3 et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Q 5 : Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Q 6 : Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

Q 7 : Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de trainage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en trainage.

Q 8 : Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse (figure 12) est adopté avec $H_\Omega(p) = \frac{1}{1+Tp}$ et $T = 33 \text{ ms}$.

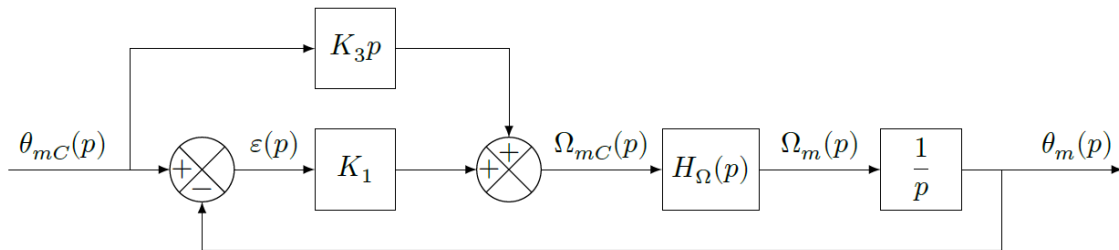


FIGURE 6 – Second modèle

Q 9 : Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Le second modèle avec anticipation de la figure 6 n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

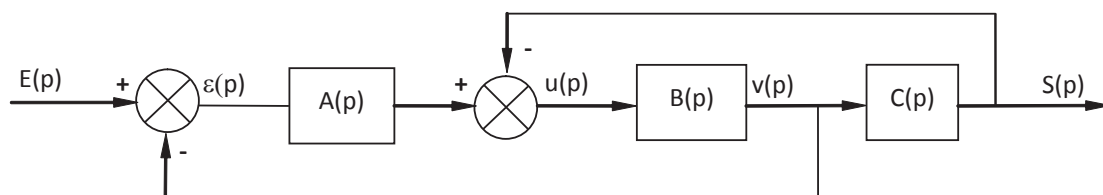
Q 10 : Exprimer l'erreur de trainage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Q 11 : Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

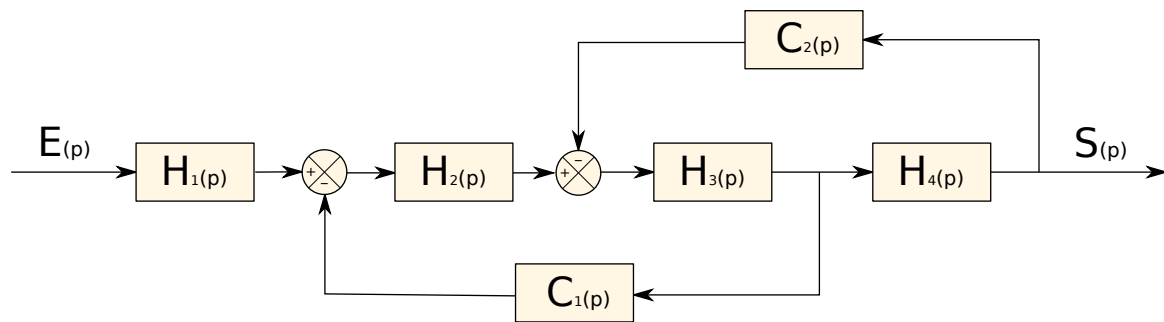
Exercice 2 : Fonction de transfert associée à un schéma bloc

1 Fonction de transfert associée à un schéma bloc

Q 12 : Donner l'expression de la transmittance $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ du système défini par le schéma-bloc suivant :

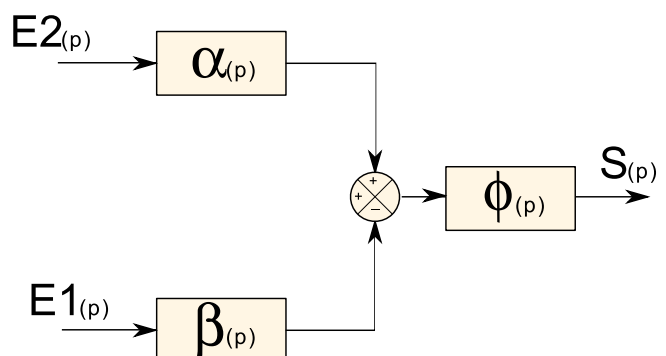
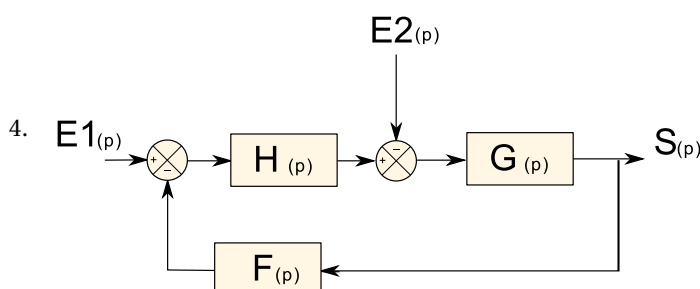
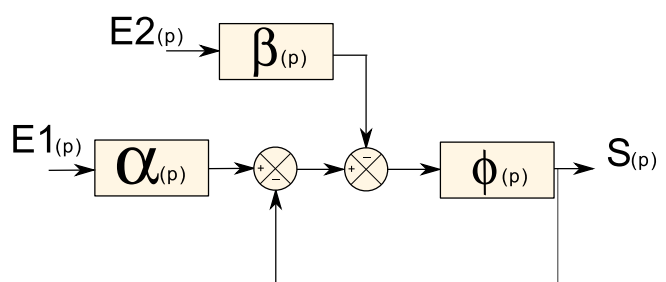
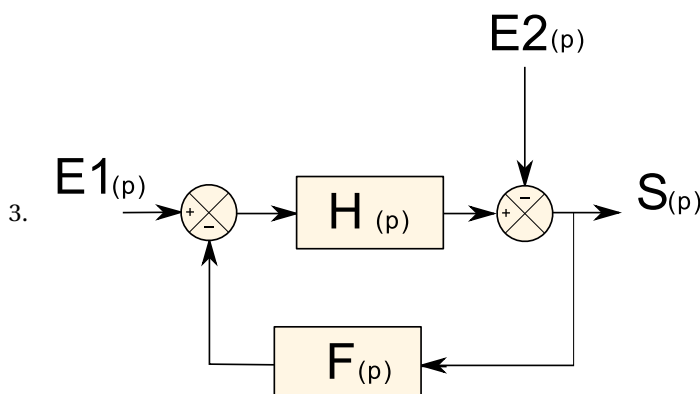
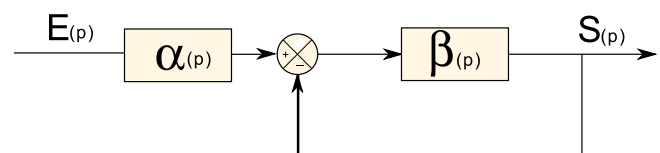
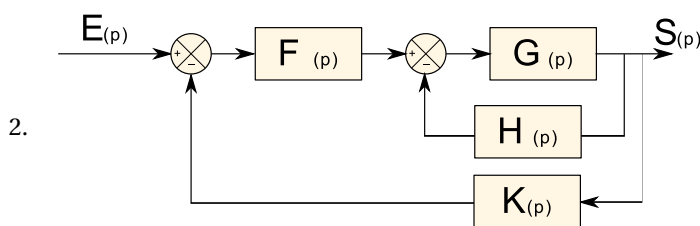
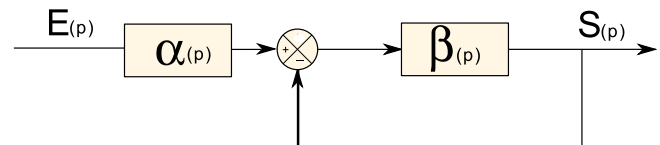
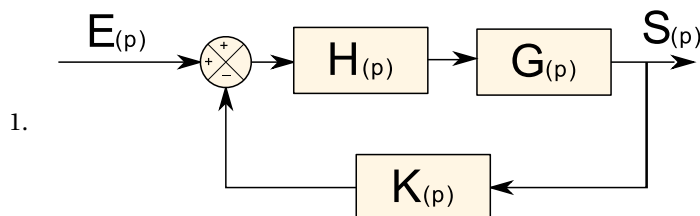


Q 13 : Donner l'expression de la transmittance $H(p)$ du système défini par le schéma-bloc suivant :



Exercice 3 : Manipulation de schema blocs

Pour chacune des figures ci-dessous trouver les expressions des fonctions $\alpha(p)$, $\beta(p)$ et $\phi(p)$ en fonction de $H(p)$, $G(p)$... par manipulation des blocs.

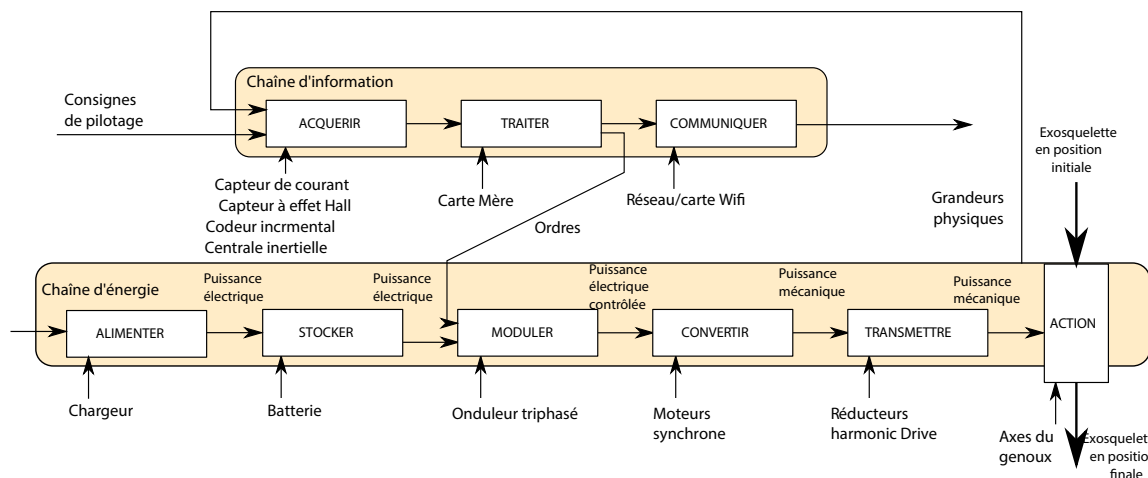


Corrigé

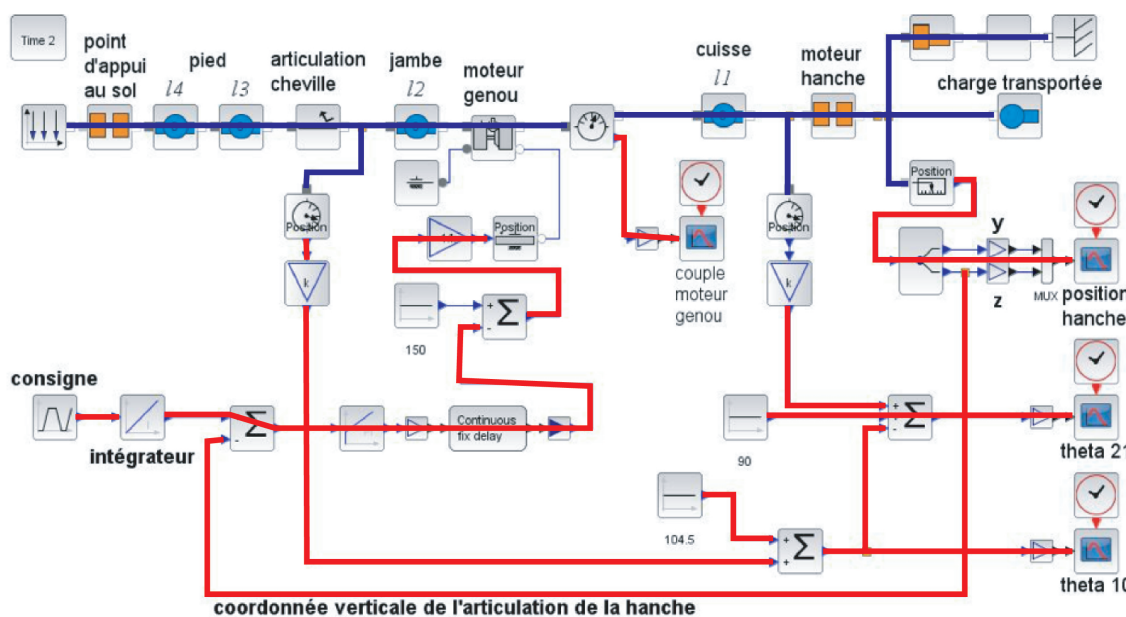
Exercice 1 : Exosquelette : assistance au maniement de charges

Exosquelette : assistance au maniement de charges

Q 1 : A l'aide de la description précédente proposer une analyse structurale de l'axe du genoux sous la forme d'une chaîne fonctionnelle.



Q 2 : Sur la modélisation multiphysique, repérer les parties acausale des parties causales. Pour cela on surlignera en rouge ce qui représente la modélisation causale et en bleu ce qui représente la modélisation a causale.



Q 3 : Décrire en quelques phrases ce modèle et ce qu'il permet de représenter.

Ce modèle permet de représenter le comportement mécanique de l'exosquelette ainsi que son asservissement. Le comportement mécanique du système est représenté par une modélisation acausale. On observe la présence de différents blocs représentant les différentes articulation par des liaison pivot. Ici seul les axes du genou et de la hanche sont motorisés. La partie causale permet de modéliser l'asservissement du système. On impose une consigne en position au niveau du genoux pour réaliser l'asservissement pour la rotation autour de l'axe de la hanche.

Q 4 : Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté figure 3 et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

D'après le modèle multiphysique :

- la mesure est la « coordonnée verticale de l'articulation de la hanche » donc en mètres (m),
- la « consigne » est en entrée d'un intégrateur avant d'être comparée à la hauteur, il s'agit donc de la vitesse de déplacement vertical de la hanche (m/s).

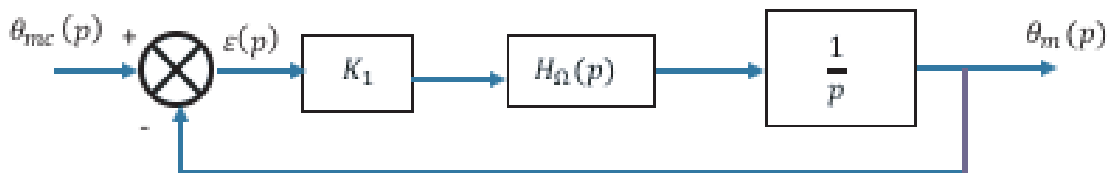
Q 5 : Exprimer $H_{\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Avec perturbation nulle et retour unitaire, on écrit directement :

$$H_{\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)} = \frac{C_{\Omega}(p) \cdot M_c(p) \cdot \frac{1}{Jp+f}}{1 + C_{\Omega}(p) \cdot M_c(p) \cdot \frac{1}{Jp+f}} = \frac{\frac{K_2}{Jp}}{1 + \frac{K_2}{Jp}} = \frac{1}{1 + \frac{J}{K_2}p}$$

Q 6 : Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mc}(p)$, $H_{\Omega}(p)$, K_1 et p .

On remplace la boucle de vitesse réduite $a H_{\Omega}(p)$ dans la question précédente, dans le schéma bloc de la figure donné dans le sujet et on obtient la structure suivante :



$$\varepsilon(p) = \theta_{mc}(p) - \theta_m(p) = \theta_{mc}(p) - K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p} \cdot \varepsilon(p)$$

$$\text{On en déduit alors l'expression de } \varepsilon(p) : \varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} \cdot \theta_{mc}(p)$$

Q 7 : Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

$$\varepsilon_p = p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} = 0$$

Résultat logique avec l'intégrateur (classe 1) et l'absence de perturbation de couple.

Erreur de traînage : L'entrée est une rampe unitaire ($1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) soit $\theta_{mc}(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\varepsilon_v = p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + K_1 \cdot H_{\Omega}(p)} = \frac{1}{K_1}$$

Système de classe 1, erreur de traînage finie, inversement proportionnelle à l'action proportionnelle de K_1 .

CONCLUSION : Pour satisfaire la condition « erreur de traînage < 1% » imposée par le cahier des charges, il faut fixer K_1 tel que $K_1 = \frac{1}{\varepsilon_v} = \frac{1}{0.01} = 100$

Q 8 : Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

$$\varepsilon_a = p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot p} = +\infty$$

Résultat attendu pour un système de classe 1, le cahier des charges n'est pas respecté sur ce critère.

Q 9 : Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mc}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Pour l'expression de $\varepsilon(p)$, on utilise le modèle fourni dans l'énoncé et $H_{\Omega}(p) = \frac{1}{1+Tp}$

$$\varepsilon(p) = \theta_{mc}(p) - \theta_m(p) = \theta_{mc}(p) - (K_1 \cdot \varepsilon(p) + K_3 \cdot p \cdot \theta_{mc}(p)) \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1-K_3 \cdot H_{\Omega}(p)}{1+K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} \cdot \theta_{mc}(p) = \frac{1-\frac{K_3}{1+Tp}}{1+\frac{K_1}{(1+Tp) \cdot p}} \cdot \theta_{mc}(p) = \frac{(1+Tp-K_3)}{Tp^2+p+K_1} \cdot p \cdot \theta_{mc}(p)$$

Q 10 : Exprimer l'erreur de trainage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

$$\varepsilon_v = p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{Tp^2+p+K_1} = \frac{1-K_3}{K_1}$$

On souhaite une erreur de trainage nulle donc $1-K_3=0$ d'où $K_3=1$

Q 11 : Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

On remplace K_1 et K_3 par leurs valeurs numériques, respectivement 100 et 1, l'erreur est alors :

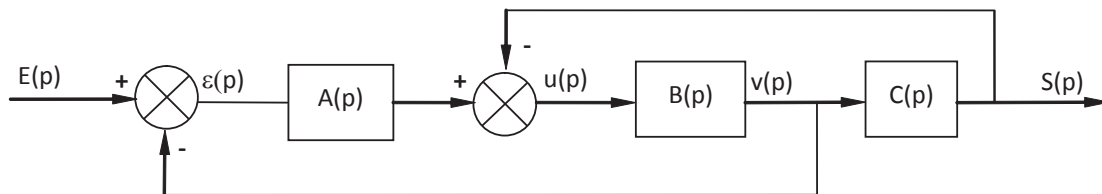
$$\varepsilon(p) = \frac{Tp}{Tp^2+p+100} \cdot p \cdot \theta_{mc}(p)$$

$$\varepsilon_a = p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T}{Tp^2+p+100} = \frac{T}{100} = 33 \cdot 10^{-5}$$

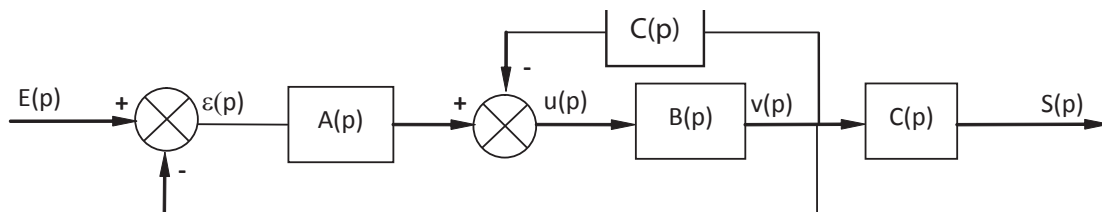
Les erreurs de trainage et en accélération sont désormais compatibles avec le cahier des charges.

Exercice 2 : Fonction de transfert associée à un schéma bloc

Q 12 :

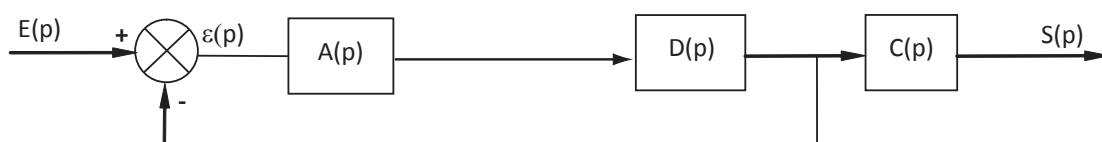


On peut déjà transformer le schéma bloc avec la règle concernant les points de prélèvement.



Puis on calcule la fonction de transfert $D(p)$ correspondant à une FTBF.

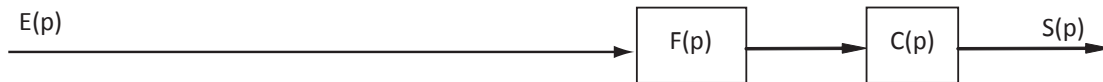
$$D(p) = \frac{B(p)}{1+B(p)C(p)}$$



Enfin on calcule la fonction de transfert $F(p)$ correspondant à une FTBF.

$$F(p) = \frac{A(p)D(p)}{1 + A(p)D(p)} = \frac{A(p) \frac{B(p)}{1+B(p)C(p)}}{1 + A(p) \frac{B(p)}{1+B(p)C(p)}}$$

$$= \frac{A(p)B(p)}{1 + B(p)C(p) + A(p)B(p)}$$

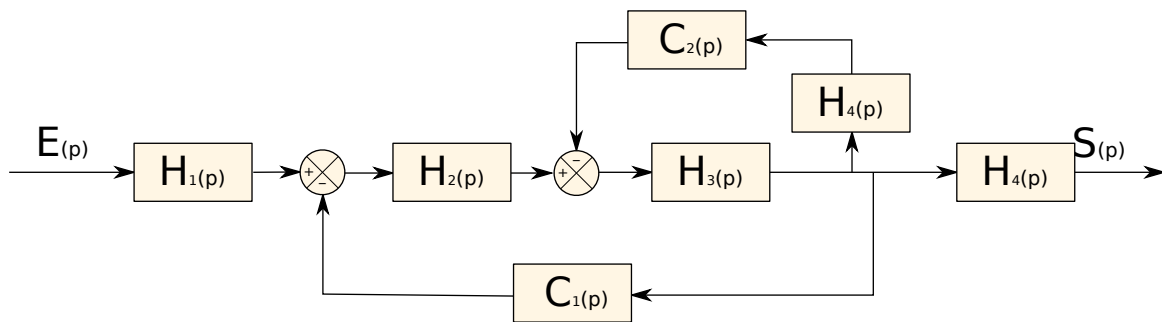


Enfin on obtient,

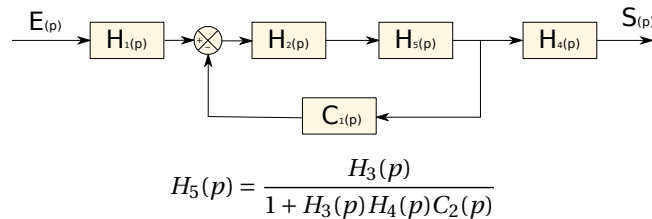
$$F(p) = \frac{C(p)A(p)B(p)}{1 + B(p)C(p) + A(p)B(p)}$$

Q 13 :

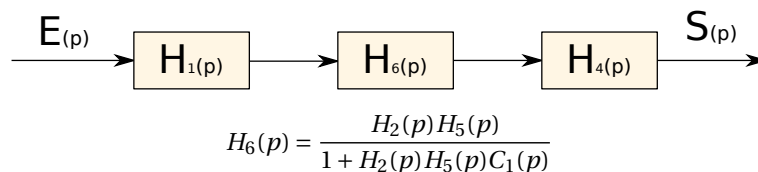
On peut commencer par déplacer le bloc $H_4(p)$ au delà du point de prélèvement.



On peut alors simplifier la première boucle (intérieure) :



On peut alors calculer la seconde boucle :



Au final, il ne reste que des blocs en série. La fonction de transfert sera donc :

$$H(p) = H_1(p)H_6(p)H_4(p)$$

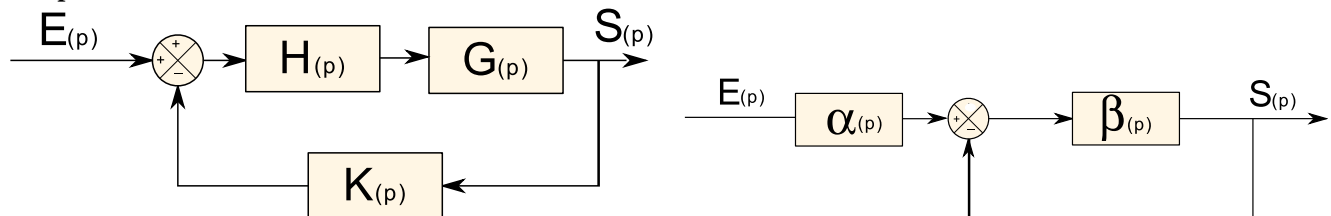
$$= H_1(p)H_4(p) \frac{H_2(p) \frac{H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)C_2(p)}}{1 + H_2(p) \frac{H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)C_2(p)} C_1(p)}$$

Au final :

$$H(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)C_2(p) + H_2(p)H_3(p)C_1(p)}$$

Exercice 3 : Manipulation de schéma blocs

1. Exemple (a)



En partant du deuxième schéma bloc, nous trouvons,

$$\alpha(p) = \frac{1}{K(p)} \quad (1)$$

Et

$$\alpha(p)\beta(p) = H(p)G(p)$$

d'où

$$\beta(p) = H(p)G(p)K(p) \quad (2)$$

2.

$$\alpha(p) = \frac{1}{K(p)} \quad (3)$$

$$\beta(p) = \frac{K(p)F(p)G(p)}{1 + H(p)G(p)} \quad (4)$$

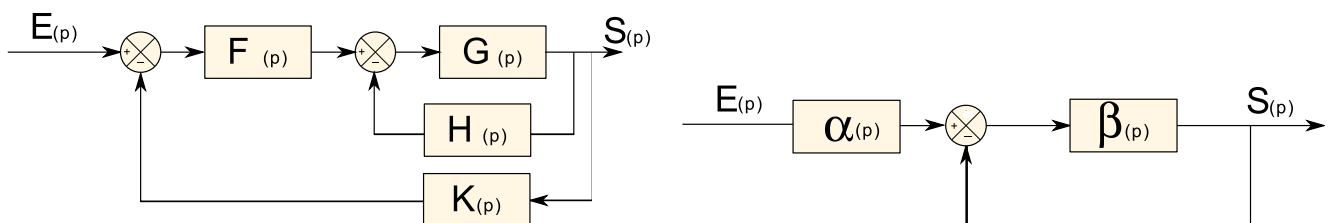


FIGURE 7 – Exemple 2

3.

$$\alpha(p) = \frac{1}{F(p)} \quad (5)$$

$$\phi(p) = H(p)F(p) \quad (6)$$

$$\beta(p) = \frac{1}{H(p)F(p)} \quad (7)$$

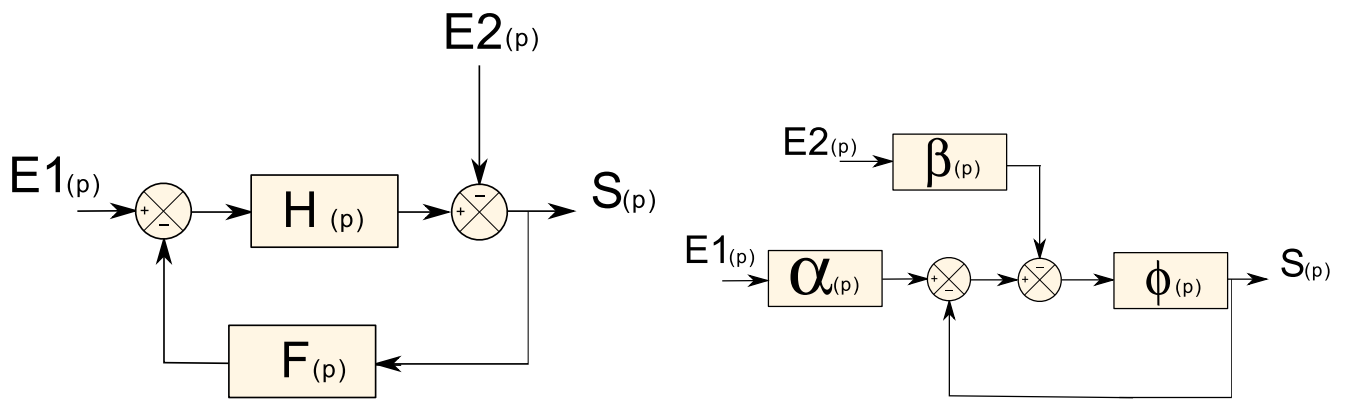


FIGURE 8 – Exemple 3

4.

$$\alpha(p) = -\frac{1}{H(p)F(p)} \quad (8)$$

$$\beta(p) = \frac{-1}{F(p)} \quad (9)$$

$$\phi(p) = H(p)F(p)G(p) \quad (10)$$

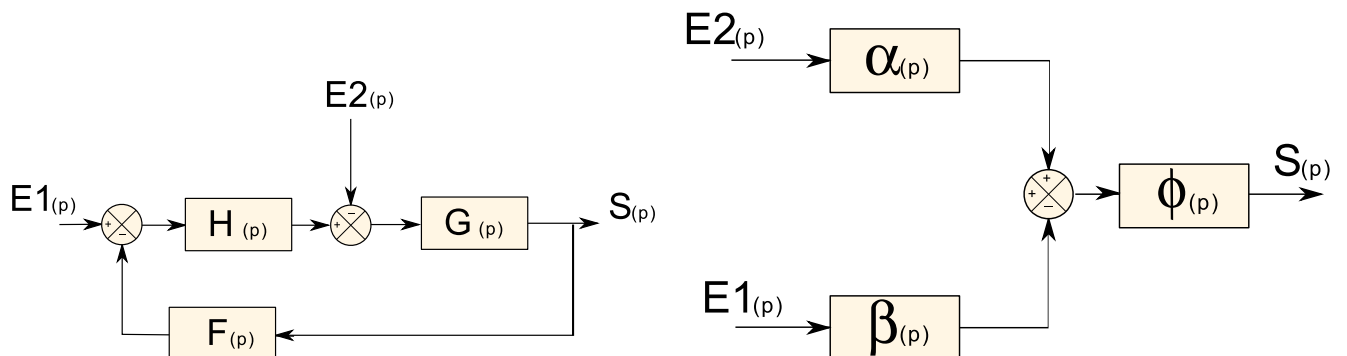


FIGURE 9 – Exemple 4