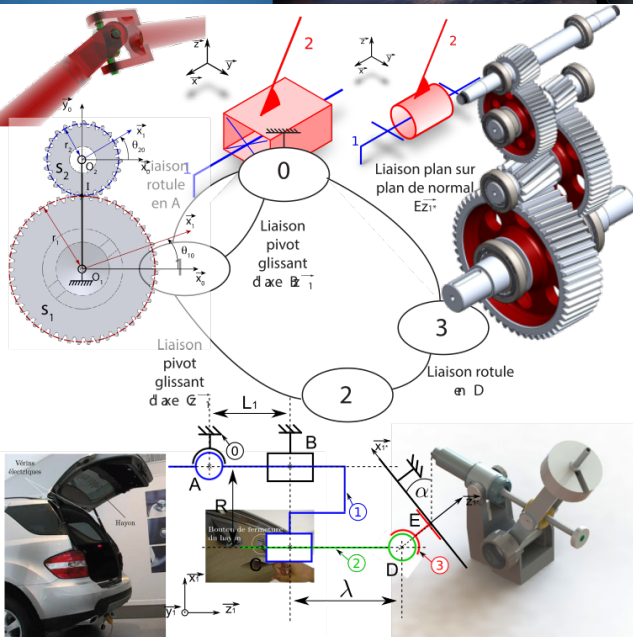
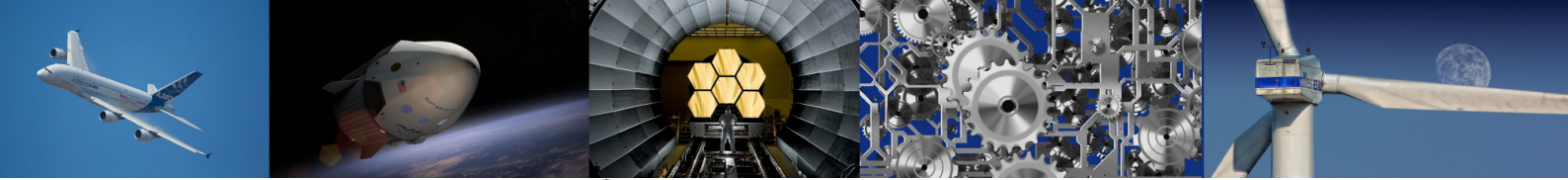




LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C3 : MODÉLISATION DES CHAÎNES DE SOLIDE : LOIS
ENTRÉES/SORTIES ET CONTRAINTES GÉOMÉTRIQUES

TD 6 - Théorie des mécanismes (C3-1)

Compétences

- **Analyser**
 - Isoler un système et justifier l'isolement.
 - Définir les éléments influents du milieu extérieur.
- **Modéliser**
 - Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.
 - Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.
 - Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.
 - Modéliser une action mécanique.
 - Simplifier un modèle de mécanisme.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
 - Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
- **Communiquer**
 - Lire et décoder un document technique.
 - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

Exercice 1 : Etude d'un pont roulant

L'objectif de cette étude est d'analyser la structure de la liaison glissière d'un pont roulant par rapport à la piste de roulement.

Le pont 1 repose sur la voie 0 par quatre modules à galets fixés aux extrémités de sa structure (voir figure 1).

- **Le module avant gauche [(G1) + (G2) + (G3)] est un module galet porteur moteur avec guidage**
 - Le galet porteur moteur (G1), en liaison sphère plan (ponctuelle) de normale $(A_1, \vec{z})$ avec le rail (0), est entraîné par un groupe motoréducteur à courant continu avec dynamo tachymétrique.
 - Les deux galets suiveurs (G2) et (G3), respectivement en liaison sphère plan (ponctuelle) de normale $(A_2, -\vec{y})$ et $(A_3, \vec{y})$ avec le rail (0), assurent le guidage latéral du pont.
- **Le module avant droit (G4) est un module galet porteur moteur** Le galet porteur moteur (G4), en liaison sphère plan (ponctuelle) de normale $(A_4, \vec{z})$ avec le rail (0), est entraîné par un groupe motoréducteur à courant continu avec dynamo tachymétrique.
- **Le module arrière gauche [(G5) + (G6) + (G7)] est un module galet porteur suiveur avec guidage**
 - Le galet porteur suiveur (G5) est en liaison sphère plan (ponctuelle) de normale $(A_5, \vec{z})$ avec le rail (0).

- Les deux galets suiveurs (G6) et (G7), respectivement en liaison sphère plan (ponctuelle) de normales $(A_6, -\vec{y})$ et $(A_7, \vec{y})$ avec le rail (0), assurent le guidage latéral du pont.
- **Le module arrière droit (G8) est un module galet porteur suiveur** Le galet porteur suiveur (G8) est en liaison sphère plan (ponctuelle) de normale $(A_8, \vec{z})$ avec le rail (0).

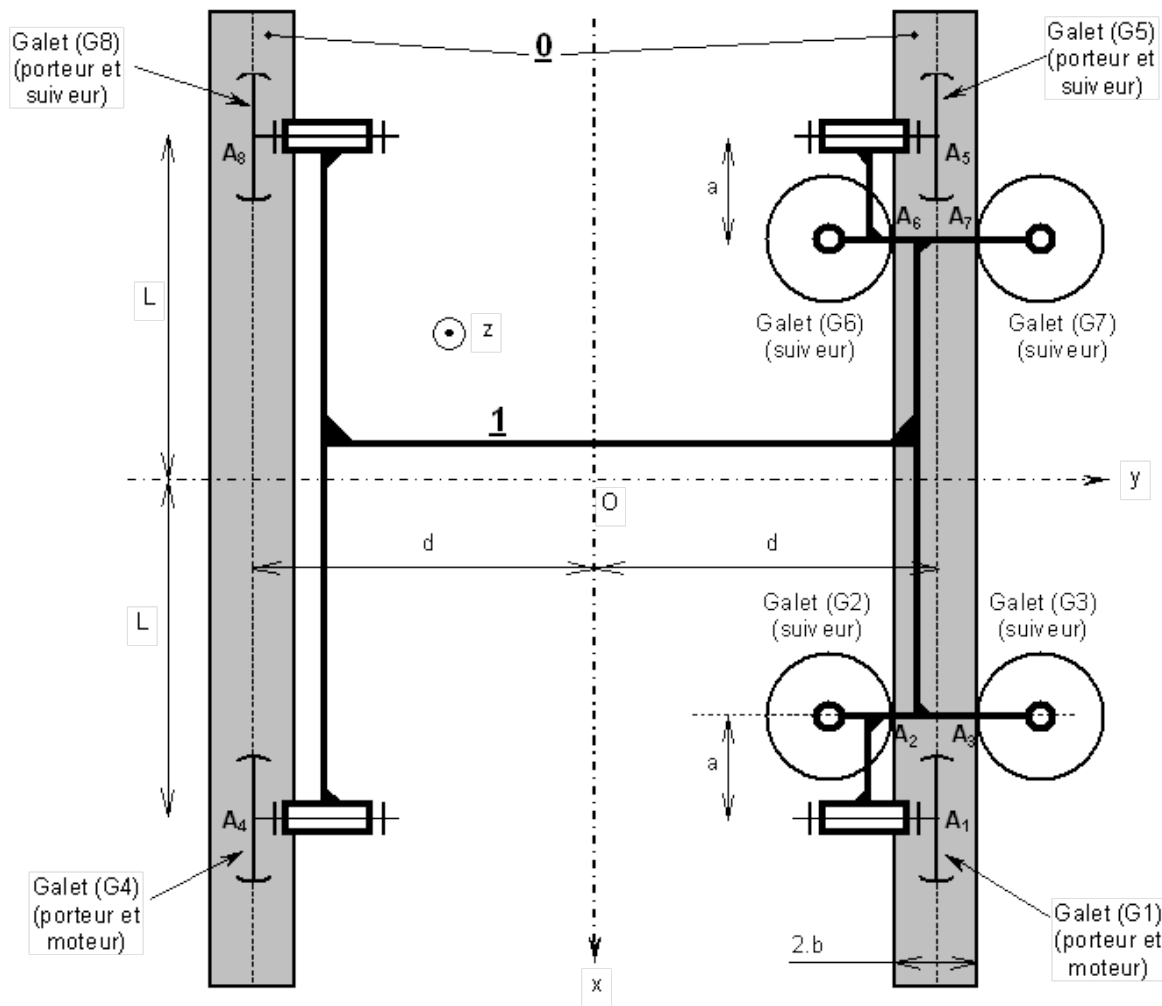


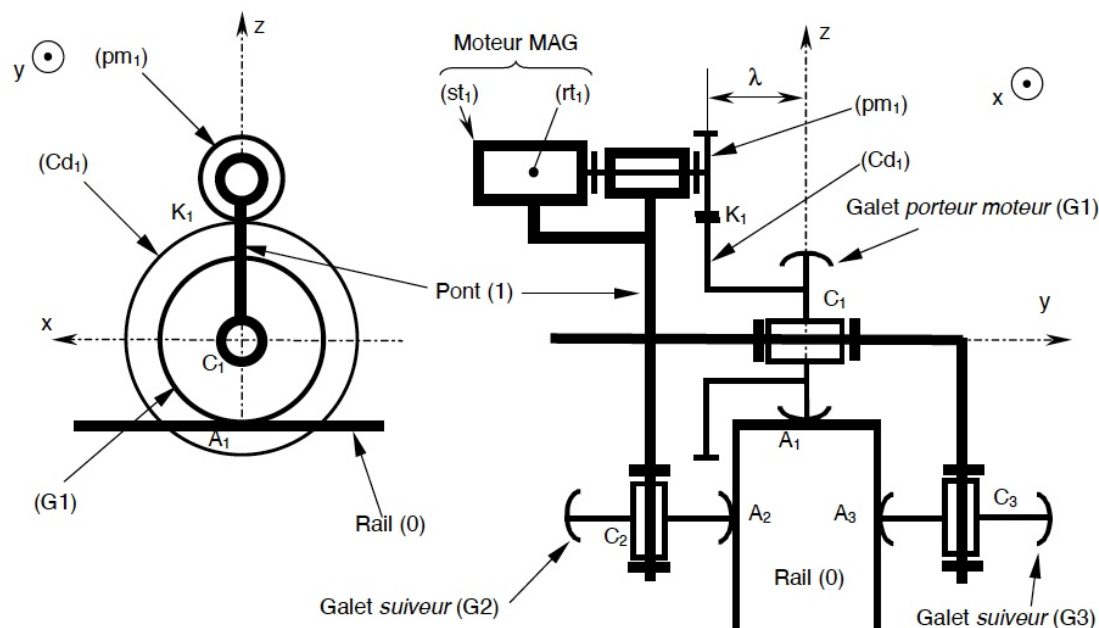
FIGURE 1 – la structure cinématique du guidage du pont 1 par rapport à la voie 0 (vue du dessus)

Les points A_i de contact entre les rails et les galets (G_i) sont repérés par rapport au point O comme suit :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OA_1} &= L \vec{x} + d \vec{y} + c \vec{z} \\
 \overrightarrow{OA_2} &= (L - a) \vec{x} + (d - b) \vec{y} \\
 \overrightarrow{OA_3} &= (L - a) \vec{x} + (d + b) \vec{y} \\
 \overrightarrow{OA_4} &= L \vec{x} - d \vec{y} + c \vec{z} \\
 \overrightarrow{OA_5} &= -L \vec{x} + d \vec{y} + c \vec{z} \\
 \overrightarrow{OA_6} &= (-L + a) \vec{x} + (d - b) \vec{y} \\
 \overrightarrow{OA_7} &= (-L + a) \vec{x} + (d + b) \vec{y} \\
 \overrightarrow{OA_8} &= -L \vec{x} - d \vec{y} + c \vec{z}
 \end{aligned}$$

Questions

On se propose de déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison glissière équivalente entre la voie de roulement (0) et le pont (1) et, pour cela :



Q 1 : Établir le graphe des liaisons limité aux dix solides suivants : (0), (1) et les huit galets (Gi).

Q 2 : Montrer, par la méthode de votre choix, que la liaison équivalente entre (0) et (1) incluant les huit galets est une liaison glissière de direction $\vec{x}$.

Q 3 : En utilisant la « méthode statique », déterminer le degré d'hyperstatisme de cette liaison glissière équivalente entre le pont (0) et la voie (1).

Q 4 : Justifier alors la nécessité du réglage de position par rapport au pont (1) de certains galets; recopier sur votre copie et compléter le tableau ci-dessous en indiquant les galets qui devront être réglables (notés R) ou fixes (notés F) par rapport au pont, sachant que les galets (G1), (G4) et (G7) sont supposés fixes.

Galet	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
Fixe/Réglable	F			F			F	

Exercice 2 : Autofocus d'un appareil photo Réflex

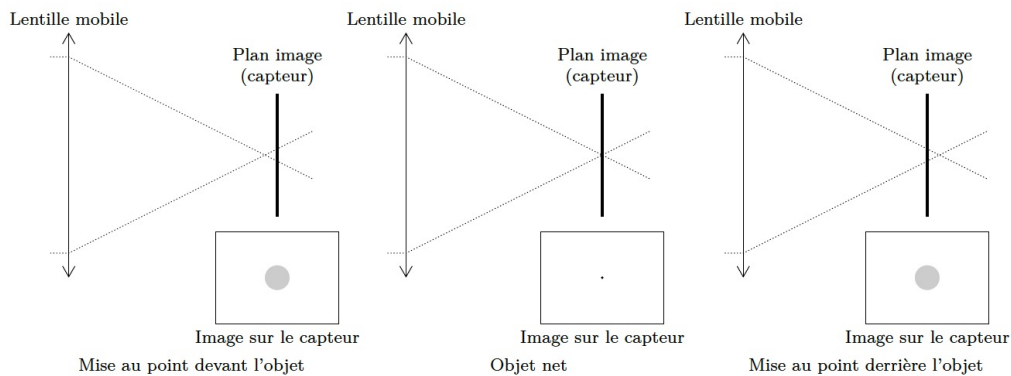
Source : Central TSI2019

1 Contexte

L'autofocus (AF) est le terme anglais pour désigner la mise au point automatique. C'est une fonction qui permet la mise au point automatique de certains systèmes optiques comme les appareils photo, leur permettant de régler la netteté de l'image. Cette mise au point est réalisée grâce à l'association d'un moteur et d'un objet photographique. Le principe consiste à déplacer une lentille afin que les rayons de l'image à photographier convergent sur le capteur. Si ce n'est pas le cas, l'image sera floue. Sur la figure 2, la lentille est bien positionnée uniquement sur le schéma du milieu : les rayons convergent parfaitement sur le capteur.



FIGURE 2 – Boitier et objectif photographiques

FIGURE 3 – Principe de la mise au point (source : <http://www.pierretoscani.com/autofocus.html>)

2 Étude des contraintes sur le positionnement



Objectif 1 :

Étudier l'hyperstatisme du mécanisme de déplacement de la lentille dans le but qu'il soit isostatique pour limiter l'impact des frottements.

La modèle du mécanisme de déplacement de la lentille mobile est donné sur la figure 7.

On notera les distances $\overrightarrow{DB} = a\vec{x}_0 + b\vec{z}_0$ et $\overrightarrow{DE} = c\vec{x}_0 + d\vec{z}_0$.

Les torseurs cinématiques des différentes liaisons sont :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(1/0)} \right\}_C = \begin{Bmatrix} \omega_{1/0} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}, \left\{ \mathcal{V}_{(3/0)} \right\}_B = \begin{Bmatrix} \omega_{3/0} \vec{z}_0 \\ p\omega_{3/0} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}, \left\{ \mathcal{V}_{(2/0)} \right\}_E = \begin{Bmatrix} \omega_{2/0} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix},$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{(3/2)} \right\}_D = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{R_0}, \left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_F = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_1 \vec{z}_0 \end{Bmatrix},$$

Q 5 : Écrire les fermeture cinématiques des chaînes 0 – 1 – 2 au point C et 0 – 2 – 3 au point D.

Q 6 : Écrire les douze équations associées aux fermetures précédentes et les mettre sous la forme de matrice donnée ci-dessous, en remplaçant les points d'interrogation

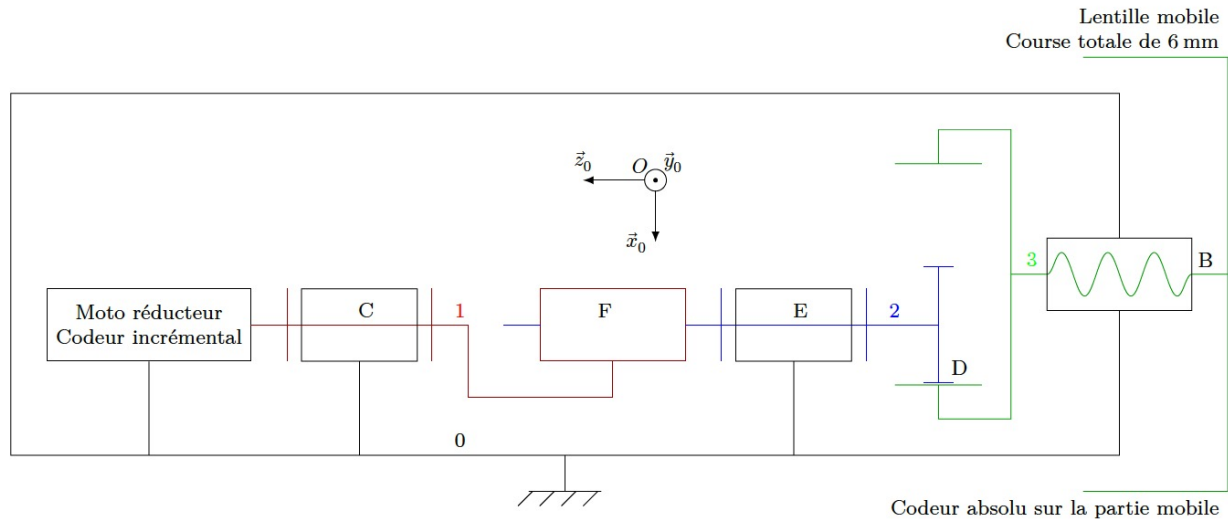


FIGURE 4 – Architecture du dispositif de déplacement de la lentille

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 ? & 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & ? & ? & 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 \\
 0 & 0 & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{10} \\ V_1 \\ \omega_{20} \\ \omega_{30} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ V_x \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q 7 : Sans calculs, mais avec justification, donner le rang de la matrice. En déduire, la mobilité du modèle du mécanisme.

Q 8 : Calculer le degré d'hyperstatisme du modèle du mécanisme.

L'analyse des lignes de zéros de la matrice permet de déterminer les contraintes géométriques du mécanisme liées à l'hyperstatisme.

Q 9 : Proposer un nouveau modèle pour les deux liaisons pivots afin de rendre le modèle du mécanisme isostatique.

Exercice 3 : Etude d'une grue porte conteneur

Source : Central PSI 2013

1 Présentation générale

Le transport des marchandises (hydrocarbures, charbon, agroalimentaire, ciment, matériaux de construction, biens de consommation. . .) à travers le monde est incontournable dans l'économie moderne. Excepté les matières premières, ces marchandises sont envoyées par conteneurs. Au port de Marseille (premier port français), 950 000 conteneurs transitent chaque année, soit 9 millions de tonnes de marchandises et 1 300 navires.

Les conteneurs sont des boîtes standardisées, d'une masse maximale de 40 tonnes, permettant de transporter des marchandises du fournisseur au client par navire, train, camion, voire par avion, sans déballer la marchandise.

Les navires « post-panamax » sont les plus gros navires de transport et peuvent embarquer jusqu'à 13 000 conteneurs.



FIGURE 5 – Cargo porte-conteneurs et grues de chargement-déchargement

Pour rejoindre sa destination finale, un conteneur changera plusieurs fois de navire. Il sera déchargé puis rechargé par des grues dans des plateformes portuaires, véritables « hubs » du réseau maritime.

Le temps d'immobilisation des navires à quai est donc un paramètre important du coût du transport. Ainsi les deux prestations principales attendues pour la grue sont la sécurité des hommes et des marchandises et la cadence de transfert. La figure 2 et le tableau 1 donnent les caractéristiques du cahier des charges partiel de la phase de déchargement.

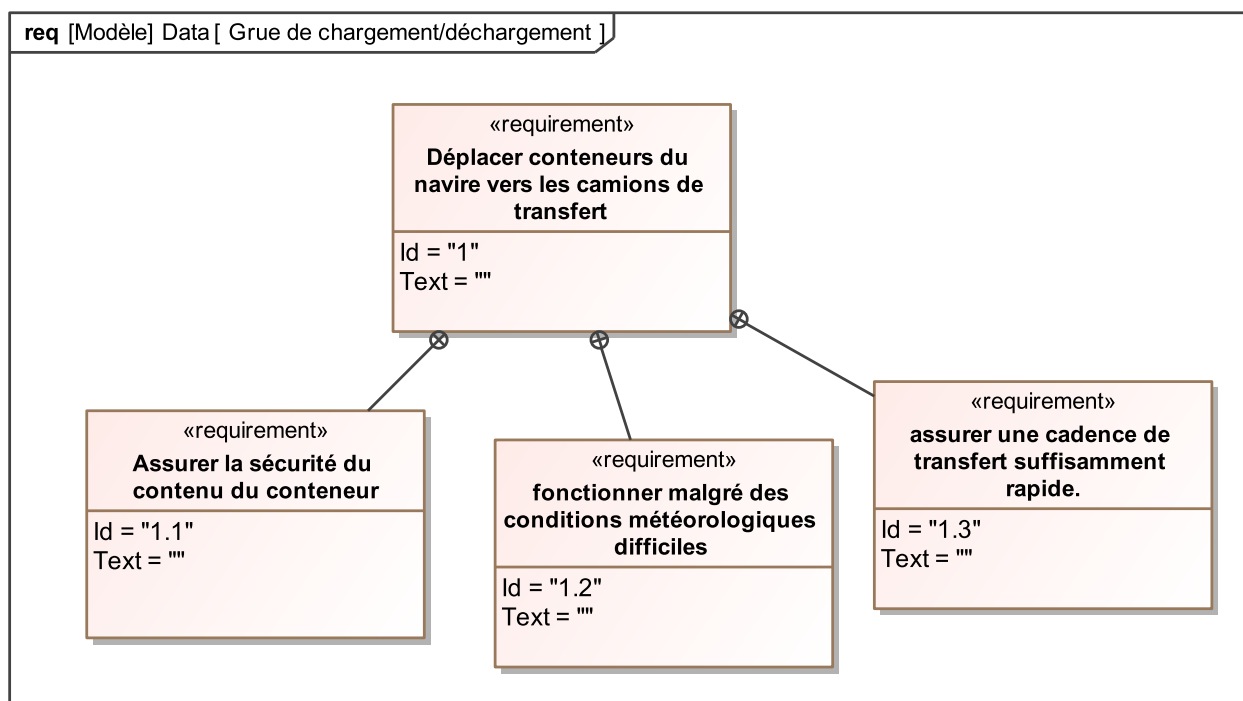


FIGURE 6 – Diagramme partiel des exigences

Le mouvement de translation des grues est guidé par 32 galets posés sur deux rails. Les 4 pieds disposent chacun de 8 galets de diamètre $d_g = 0,8$ m, entraînés par 4 moteurs asynchrones, par l'intermédiaire d'un réducteur de rapport. L'architecture cinématique de chaque pied est donnée figure 4 et chacun des moteurs entraîne 2 galets (figures 7 et 8).

Exigences	Expression	Critère	Niveau
1	Déplacer les conteneurs du navire vers les camions de transfert	Masse maximale du conteneur	40 tonnes
		Altitude des conteneurs sur le navire par rapport au quai	-13m à 40m
		Longueur $\times$ largeur du navire	400 m $\times$ 50 m
		Précision du positionnement du conteneur	10cm
1.1	Assurer la sécurité du contenu du conteneur	Accélération maximale du conteneur (verticale $\times$ horizontale)	$1g \times 0,5g$
1.2	Fonctionner malgré des conditions météorologiques difficiles	Stabilité du portique	Aucun renversement
		Plage de vitesse de vent autorisant les activités portuaires de déchargement	0 à 120km/h
		Vitesse maximale du vent mesurée au cours des 100 dernières années	300km/h
1.3	Assurer une cadence de transfert suffisamment rapide	Cadence	2min par conteneur en moyenne

TABLE 1 – Cahier des charges partiel de la grue de chargement/déchargement

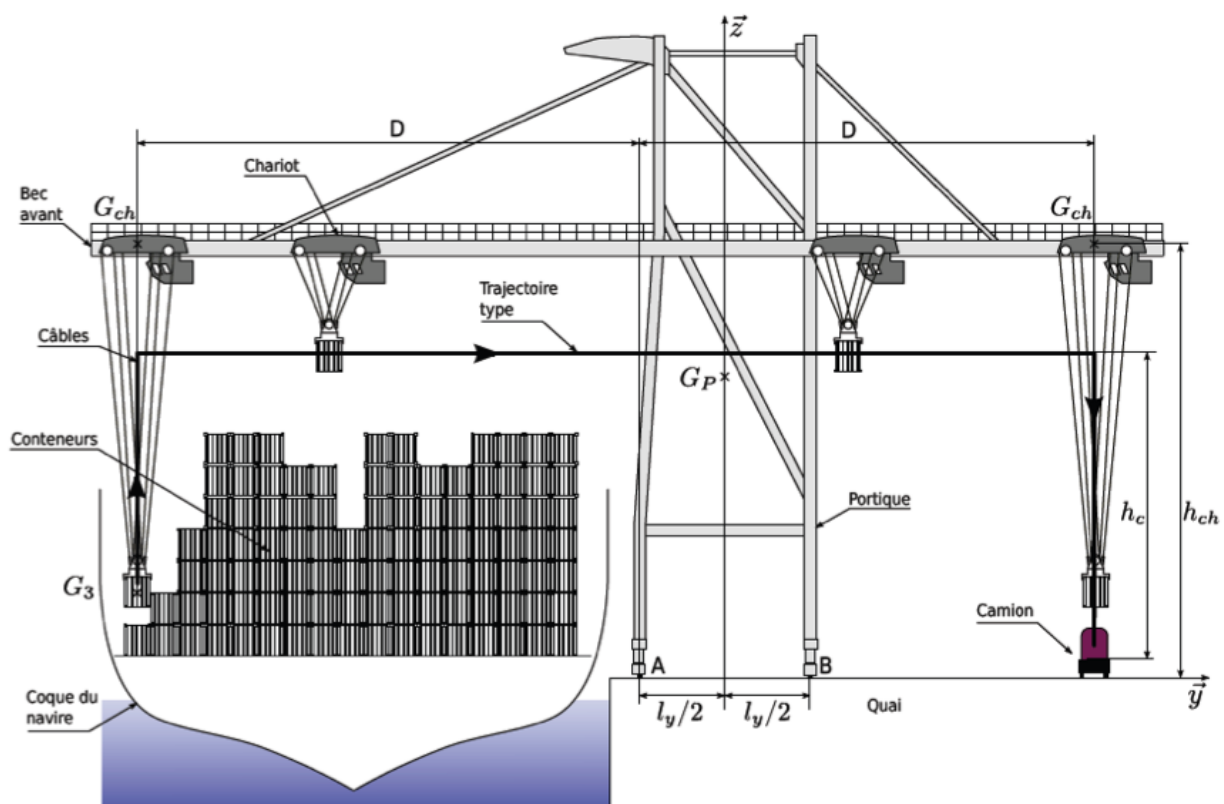
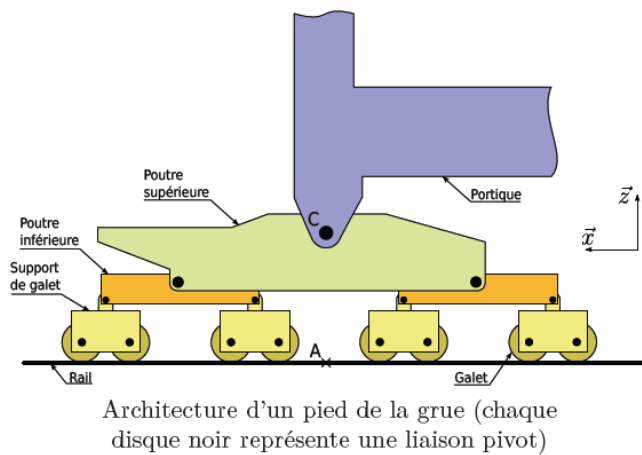


FIGURE 7 – Grue de déchargement des conteneurs



Photographie du pied de grue (le tambour supérieur permet l'enroulement du câble d'alimentation 20 000 V)

FIGURE 8 – pied de grue

2 Stabilité du portique sur ses appuis



Objectif 2 :

Évaluer le risque de basculement lorsque le portique est soumis au vent et lors du levage d'un conteneur.

La forme très élancée du portique présente des risques de basculement lors de la manipulation des conteneurs les plus lourds et par grand vent. Il s'agit de lever ces risques. Le centre de gravité du portique seul est noté G_P , le centre de gravité du chariot G_{ch} et le centre de gravité de l'ensemble {spreader et conteneur} G_3 . Soient $l_x = 17\text{ m}$, $l_y = 15\text{ m}$, $H = 32\text{ m}$ et $h = 25\text{ m}$ certaines longueurs précisées figure 9 et figure 7.

La grue doit pouvoir se déplacer normalement en translation dans une plage de vents de 0 à 120 kilomètres par heure. Elle ne doit jamais basculer (vitesse maximale du vent mesurée au cours des 100 dernières années : $300\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$).

La prise au vent latérale est très forte et sera modélisée par une force : $\vec{F}_{vent} = \frac{1}{2} \lambda V^2 \vec{x}$ appliquée en K (figure 9) avec $\lambda = 800\text{ N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$.

La liaison galets-rail supporte les 1080 tonnes du portique. En raison des pressions admissibles aux contacts, plusieurs galets sont nécessaires pour chaque pied. Les questions suivantes visent à élaborer un modèle statique d'un pied pour conclure sur le critère de non basculement de la grue.

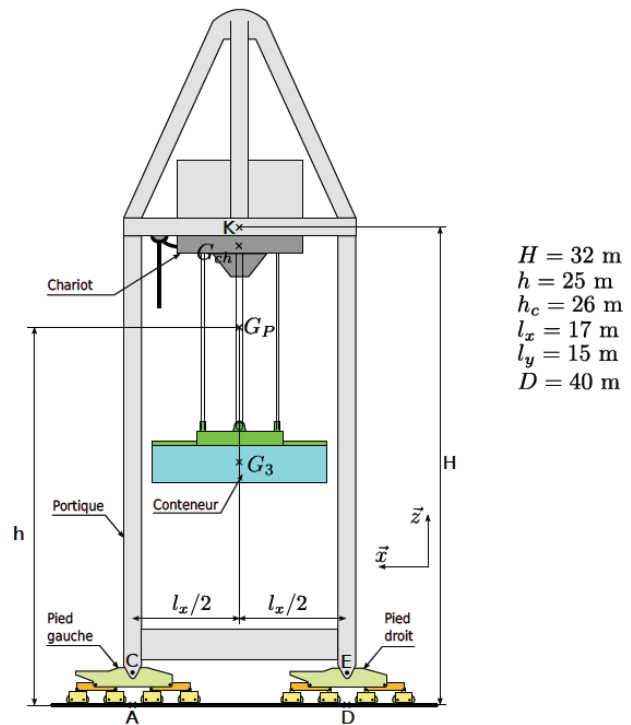


FIGURE 9 – Vue longitudinale du portique

Q 10 : Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle plan d'un seul pied, de la liaison portique/sol donné sur la figure 8. En déduire la répartition de la charge entre les 8 galets.

Q 11 : À partir de l'étude des mobilités du pied décrit figure 8, proposer une liaison équivalente à la liaison assurée par un pied entre le portique et le rail, dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ de la figure 8, en précisant ses caractéristiques géométriques.

Q 12 : Déterminer littéralement, dans le cadre d'une modélisation dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ de la figure 9, les efforts normaux du sol sur la grue transmis par les pieds « gauche » et « droit », lorsque la grue est soumise au vent. (Hypothèses : le mouvement suivant $\vec{z}$ du conteneur ne sera pas considéré; le chariot et le portique sont immobiles; la masse des poutres supérieure, inférieure et des supports de galets est négligeable devant M_p .)

Q 13 : En déduire la valeur (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) de la vitesse de vent V_1 pour laquelle la grue bascule. En déduire la valeur (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) de la vitesse de vent V_2 pour laquelle la grue glisse, en considérant au contact roue/rail un modèle de frottement sec de coefficient $f = 0,2$.

Q 14 : Lorsque le chariot est en bout de bec avant (voir figure 7, la distance D vaut 40 m) et que la charge maximale est levée à l'accélération maximale γ_{lm} , déterminer littéralement, dans le cadre d'un problème plan (dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ de la figure 7), les efforts dans les contacts rails/portique, modélisés par des liaisons sphère-plan en A et B. Donner la condition de non basculement de la grue. Cette condition est-elle vérifiée?

Q 15 : Vérifier si les deux derniers critères de l'exigence 1.2 du cahier des charges sont validés, et proposer le cas

échéant des solutions techniques.

Exercice 4 : Modélisation d'un train d'atterrissage d'hélicoptère

Source : Banque PT SIA 2014

1 Présentation

Parmi les hélicoptères lourds de dernière génération, le NH90 (NATO Helicopter) est un hélicoptère biturbine européen de transport militaire de la classe des 10 tonnes conçu entre la France, l'Allemagne, l'Italie et les Pays Bas, rejoints par le Portugal en juin 2001 et la Belgique en 2006. Le NH90 se décline en 2 versions : TTH (transport tactique) et NFH (lutte anti-surface et anti-sous-marine). Les quatre groupes industriels, Agusta- Westland (Italie), Eurocopter (France), Eurocopter Deutschland et Fokker-Stork (Pays-Bas) ont constitué une coentreprise sous le nom de NHIndustries.

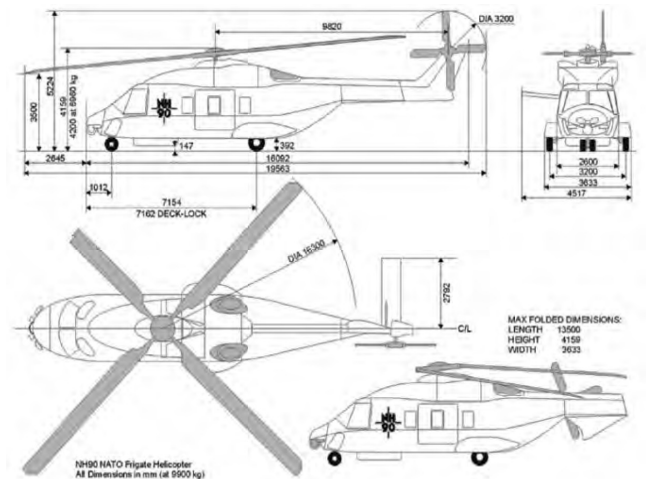


FIGURE 10 – NH90 NFH (© : MARINE NATIONALE)

2 Description structurelle du train d'atterrissage

La solution apportée par Fokker-Stork, au besoin exprimé, est fondée sur un train à roues munies d'amortisseurs. En effet les atterrisseurs à patins munis de dispositifs amortisseurs ne sont pas adaptés à des appareils qui dépassent les 4 tonnes et des vitesses d'impact supérieures à environ $1,4m/s$.

Le train principal constitué de deux roues simples est installé dans le fuselage central et le train auxiliaire constitué de deux roues jumelées de direction dans la partie avant du fuselage (figure ci-contre). Des caissons permettent d'escamoter les trains d'atterrissage lors du vol.



Appontage NH90 NFH (© : NHIndustrie)

Une jambe du train principal est constituée de (figure 11) :

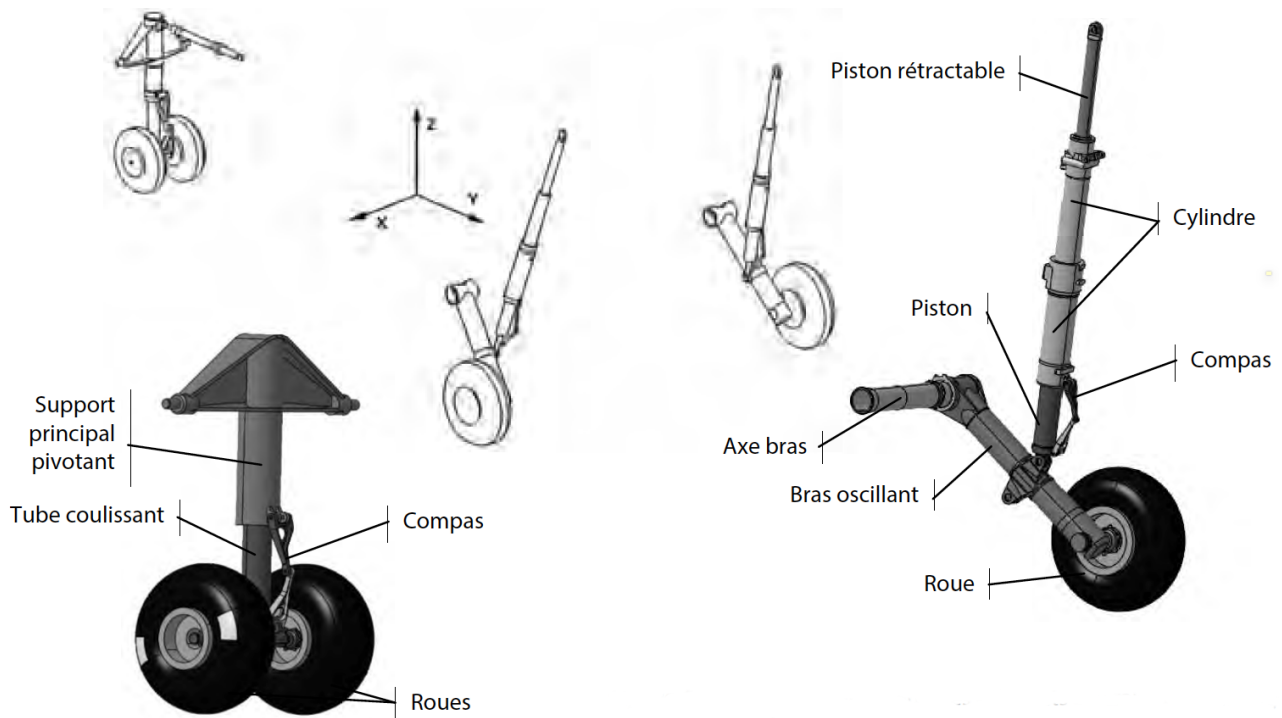


FIGURE 11 – Maquette numérique des éléments du train d'atterrissage (© : Gino Vanheers - KHBO)

- une roue avec un pneumatique,
- un bras oscillant,
- un vérin amortisseur : piston - cylindre,
- un triangle anti-vrillage ou compas,
- un vérin de rétraction : piston rétractable - cylindre.

Le train auxiliaire situé à l'avant est constitué de (figure 11) :

- deux roues jumelées,
- un tube coulissant amortisseur,
- un triangle anti-vrillage ou compas,
- un support principal pivotant autour de l'axe vertical.

Q 16 : À partir du schéma cinématique de la structure d'une jambe du train principal de la figure 12, donner le degré de mobilité de cet ensemble en distinguant degré utile et degré interne. Calculer alors, à partir de ce degré de mobilité, le degré d'hyperstatisme en précisant bien les hypothèses validant la ou les relations que vous utilisez.

Q 17 : Préciser, en argumentant votre réponse, la nature et la direction des degrés de liberté qu'il serait nécessaire de relâcher pour rendre le modèle proposé isostatique.

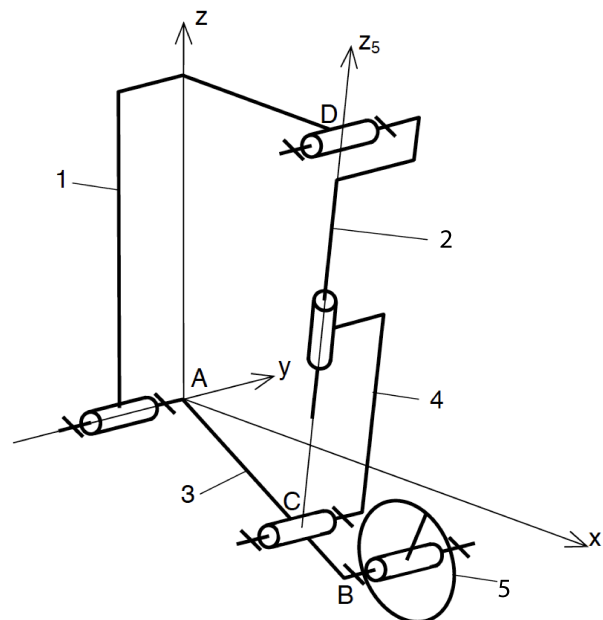


FIGURE 12 – Schéma cinématique d'une jambe du train principal

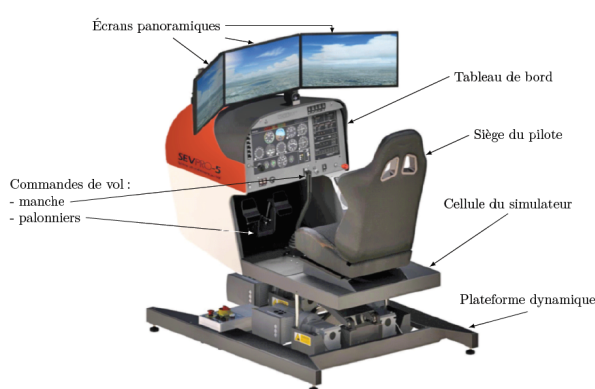
Exercice 5 : Simulateur de vol

Source : CENTRAL PSI 2017

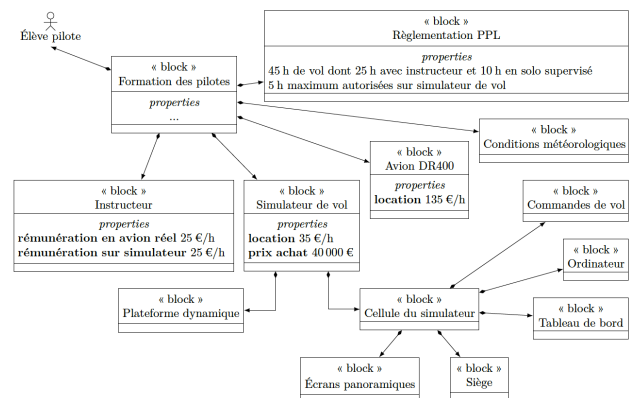
1 Simulateur de vol pour la formation de pilotes en aéroclub

a) Contexte et étude préliminaire

On s'intéresse ici à l'étude d'un simulateur de vol de tourisme permettant d'assister la formation des pilotes privés.



(a) Simulateur de vol à plateforme dynamique



(b) Contexte économique de la formation des pilotes

FIGURE 13

b) Architecture et conception de la plateforme dynamique



Objectif 3 :

Justifier l'utilisation de vérins à gaz et de réducteurs irréversibles au sein de la plateforme dynamique.

La plateforme dynamique (figure 15 (a)) permet de mouvoir la cellule du simulateur (3). Elle est composée de trois servomoteurs identiques qui sont constitués d'une machine électrique, d'un codeur incrémental et d'un variateur de vitesse intégré (figure 15 (b)). Afin d'améliorer la compacité du système ainsi que son entretien, le constructeur a choisi d'utiliser des machines synchrones pour les chaînes de motorisation. Les machines synchrones utilisées sont à aimants permanents et à stators bobinés. Chaque machine électrique entraîne un réducteur de type roue et vis sans fin *irréversible*, qui transmet l'énergie à un dispositif bielle-manivelle. Chacune des trois bielles est reliée à la cellule du simulateur (3) par un guidage sphérique. La cellule du simulateur (3) est reliée à un bras oscillant (6) par l'intermédiaire d'un joint de Cardan. Le bras oscillant (6) est relié au bâti (0) à l'aide d'une liaison modélisable par une liaison pivot d'axe $(E, \vec{z}_0)$. Deux vérins à gaz {corps (8) + tige (9)} relient le bras oscillant (6) au bâti afin de compenser les effets de la gravité et faciliter l'action des motorisations. Sur le modèle plan de la figure C, les deux vérins à gaz sont modélisés par une seule liaison glissière de direction $\vec{y}_{8,9}$ entre la tige (9) et le corps (8), ainsi qu'un ressort de compression (non représenté) entre ces deux mêmes solides, qui exerce un effort sur (8) et sur (9).

Les liaisons et paramètres géométriques sont les suivants (figures 15(a) et 16) :

- la liaison pivot d'axe $(E, \vec{z}_0 = \vec{z}_6)$ entre le bras oscillant (6) et le bâti (0) est paramétrée par l'angle $\theta_{60} = (\vec{x}_0, \vec{x}_6) = (\vec{y}_0, \vec{y}_6)$;
- $\vec{EC} = L \cdot \vec{x}_6$;
- le joint de Cardan entre la cellule du simulateur (3) et le bras oscillant (6) est modélisable par une liaison sphérique à doigt de centre C, interdisant la rotation autour de $(C, \vec{y}_3)$. Les mouvements de (3) par rapport

à (6) sont paramétrés par les angles θ_{x36} et θ_{z36} comme indiqué sur la figure 14.

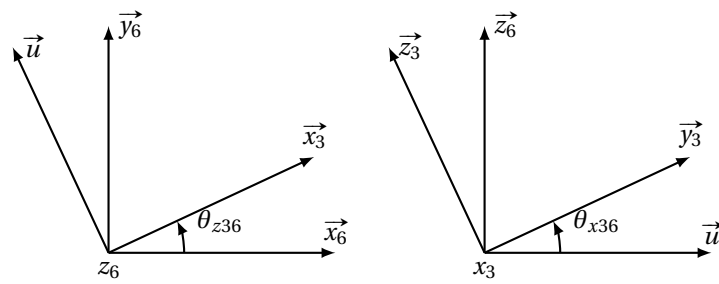
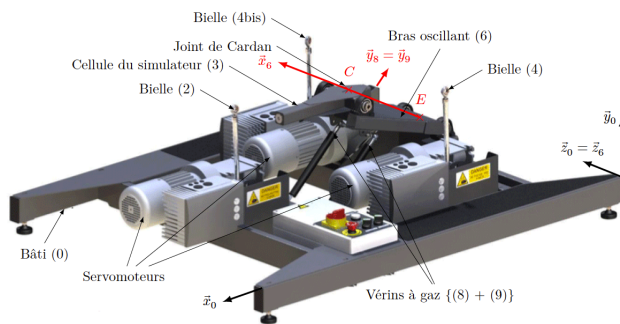
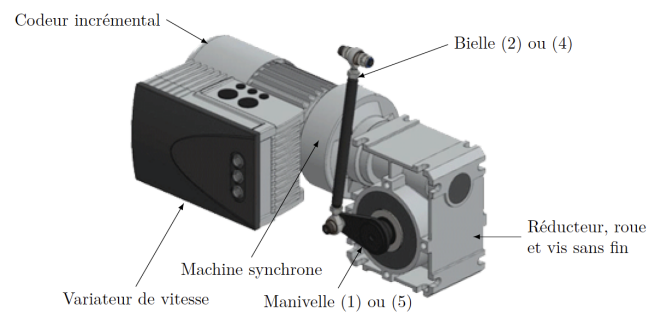


FIGURE 14 – Rotations de (3) par rapport à (6)



(a) Plateforme dynamique



(b) Servomoteur

FIGURE 15

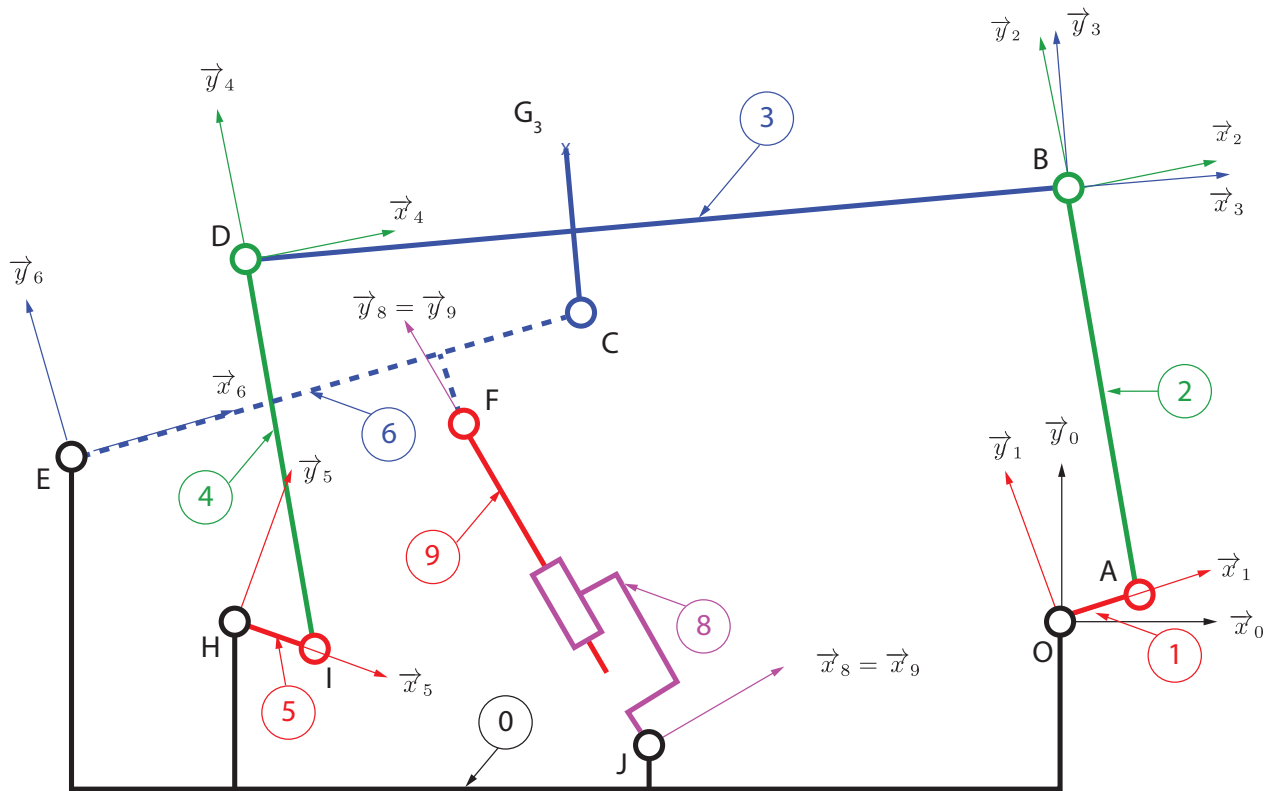
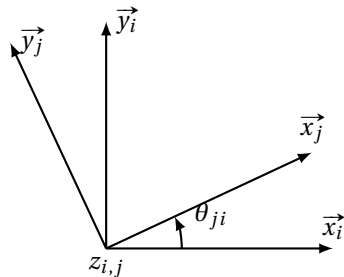


FIGURE 16 – Schéma cinématique de la plateforme dynamique en modélisation plane

Définition des angles de rotation de j/i **Dimensions**

- $AB = ID = l$;
- $\overrightarrow{EF} = d_{61} \cdot \vec{x}_6 - h_6 \cdot \vec{y}_6$; $\overrightarrow{EC} = L \cdot \vec{x}_6$;
- $HI = OA = r$;
- $\overrightarrow{JF} = \lambda \cdot \vec{y}_{8,9}$;
- $\overrightarrow{DC} = d_{31} \cdot \vec{x}_3 - h_3 \cdot \vec{y}_3$; $\overrightarrow{CB} = d_{32} \cdot \vec{x}_3 + h_3 \cdot \vec{y}_3$;
- $\overrightarrow{EH} = d_{01} \cdot \vec{x}_0 - h_{01} \cdot \vec{y}_0$; $\overrightarrow{EO} = d_{02} \cdot \vec{x}_0 - h_{01} \cdot \vec{y}_0$;
- $\overrightarrow{EJ} = d_{03} \cdot \vec{x}_0 - h_{02} \cdot \vec{y}_0$;
- $DB = HO = d = d_{32} + d_{31} = d_{02} - d_{01}$.

FIGURE 17 – Repérage et paramétrage du mouvement de tangage

c) Dimensionnement et justification de l'utilisation des vérins à gaz

Les deux vérins à gaz se comportent comme des ressorts de compression et ont pour fonction de positionner verticalement le point C de la cellule du simulateur (3) à une position d'équilibre moyenne définie par l'angle $\theta_{60\text{ moy}}$, lorsque les biellettes (2), (4) et (4bis) ne sont pas liées respectivement aux manivelles (1), (5) et (5bis). Dans cette situation et en utilisant le paramétrage de la figure 16 :

- $\theta_{30} = 0^\circ$ et $\overrightarrow{GC}$ est vertical;
- l'action mécanique de (3) sur (6) est modélisée par un glisseur en C de résultante $-m_3 \cdot g \cdot \vec{y}_0$, avec m_3 la masse de l'ensemble {cellule du simulateur + pilote} et g l'accélération de la pesanteur;
- l'action mécanique des deux tiges (9) sur (6) est modélisée par un seul glisseur en F de résultante $Y_{96} \cdot \vec{y}_9$;
- l'action mécanique de la pesanteur sur (6) est négligeable vis-à-vis des actions mécaniques précédentes.

Afin de dimensionner les vérins à gaz, il est nécessaire de déterminer en particulier l'effort qu'ils doivent fournir dans la position d'équilibre moyenne.

Q 1 : Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle plan du système de la figure 16 et conclure sur la possibilité de déterminer l'ensemble des actions mécaniques du modèle considéré.

Q 2 : Donner l'expression littérale de l'effort Y_{96} que doit fournir la paire de vérins à gaz en fonction de g , m_3 ,

$\theta_{60\text{moy}}$, θ_{96} et des paramètres géométriques. Préciser le théorème et la projection utilisés.

Q 3 : Compte tenu de la masse importante de l'ensemble {cellule du simulateur + pilote}, justifier l'intérêt d'utiliser les deux vérins à gaz du point de vue des couples que doivent fournir les moteurs utilisés au voisinage de la position d'équilibre moyenne. En outre, justifier d'un point de vue énergétique l'intérêt d'avoir choisi des réducteurs irréversibles lorsque le système n'est pas en mouvement.

Exercice 6 : Hélicoptère

Source : Ecole de l'air 2005

1 Dispositif de réglage de l'incidence des pales d'hélicoptère

Un hélicoptère crée sa portance grâce au mouvement de rotation du rotor principal entraîné à l'aide de la turbine. Pour permettre à l'hélicoptère de se déplacer suivant les différentes directions, les pales prennent, suivant un axe radial, une incidence qui varie au cours de la rotation du rotor. Le dispositif qui transmet les consignes du pilote et qui permet d'imposer cette variation est le plateau de pas cyclique dont l'orientation est fixée par l'intermédiaire de plusieurs vérins hydrauliques. La figure ci-contre présente le mécanisme complet. Sur ce schéma n'est pas représenté le mécanisme permettant l'entraînement en rotation suivant un axe vertical des solides 4, 5, 6 et 8 qui ne fera pas l'objet de l'étude. Les 3 figures ci-dessous présentent 3 configurations du dispositif de réglage de l'incidence des pales.

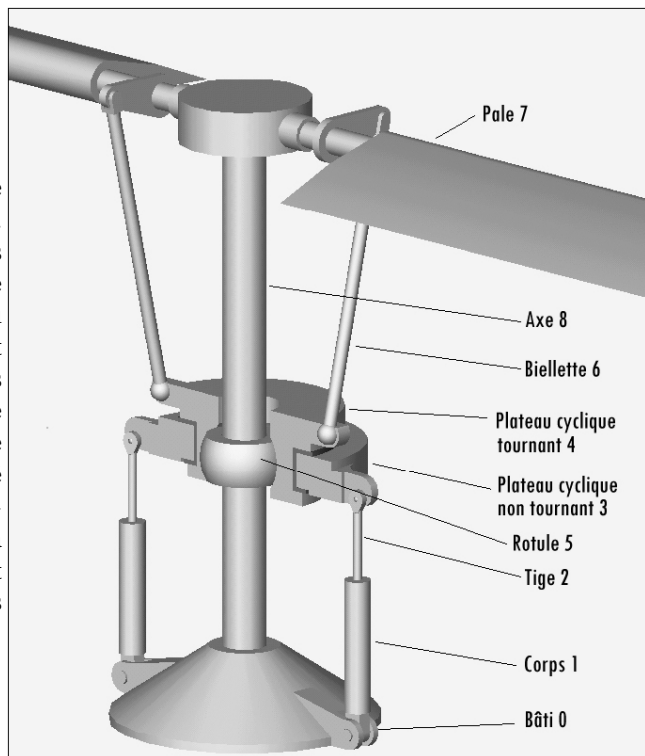
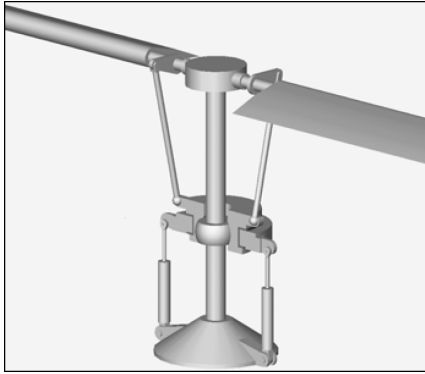
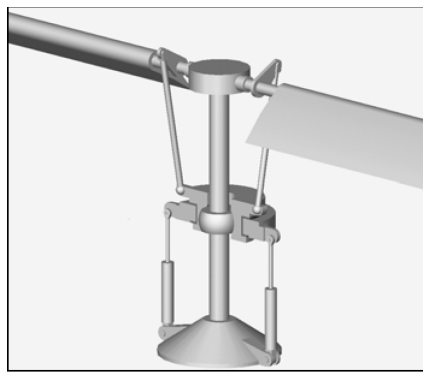


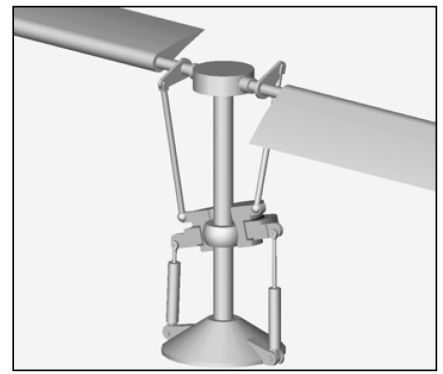
FIGURE 18



Hélicoptère à l'arrêt Les pales sont en position horizontale (incidence nulle).



Hélicoptère en vol stationnaire. Les pales présentent la même incidence.



Hélicoptère en déplacement Les pales ne présentent pas la même incidence.

On se propose de construire une modélisation simplifiée et d'étudier les lois entrées-sorties des sous blocs fonctionnels qui constituent le dispositif de réglage de l'incidence cyclique des pales.

a) Etude spatiale du système complet.

La figure 18 fait apparaître 13 solides (NB : l'indice ' fait référence aux pièces de la partie gauche).

- Bâti 0,
- Corps 1 et 1' (en liaison pivot avec le bâti 0),
- Tige 2 et 2' (en liaison avec le corps du vérin, respectivement 1 et 1', et en liaison rotule avec le plateau cyclique non tournant 3),
- Plateau cyclique non tournant 3 (en liaison pivot avec le plateau tournant 4),
- Plateau cyclique tournant 4,
- Rotule 5,
- Bielles 6 et 6' (montées en liaison rotule à chacune de leur extrémité),
- Pales 7 et 7' (en liaison pivot avec l'axe rotor 8),
- Axe rotor 8 (en liaison pivot avec le bâti 0).

Un dispositif extérieur bloque, au niveau de la liaison rotule entre le plateau cyclique 4 et la rotule 5, la rotation suivant l'axe du rotor. La liaison équivalente entre le plateau cyclique tournant 4 et l'axe rotor 8 peut être modélisée par une liaison non normalisée à 3 degrés de liberté (une translation suivant l'axe du rotor, et deux rotations perpendiculaires à cet axe).

Q 4 : En supprimant le solide 5 (en le considérant fixe par rapport au solide 8), construire le graphe de structure du mécanisme présenté figure 18, en faisant apparaître sur chaque arc le nombre de degrés de liberté de la liaison considérée.

Q 5 : Le mécanisme ainsi modélisé est isostatique. Sans calcul, à l'aide de la formule de mobilité, identifier l'indice de mobilité cinématique qui définit le nombre de paramètres indépendants permettant de fixer de manière unique la position de chacune des pièces. Décrire succinctement, les différents mouvements correspondants à l'indice trouvé.

Remarque 1 :

Remarque : L'indice de mobilité élevé interdit une étude cinématique du mécanisme complet, étant donné la lourdeur des calculs. On se propose d'étudier un mécanisme plan (objet de la deuxième partie), dont le fonctionnement permet d'appréhender le dispositif spatial.

b) Étude du bloc orientation du plateau cyclique

On suppose connaître les vitesses de déplacement des tiges des vérins hydrauliques. Dans cette deuxième partie, on cherche les mouvements correspondants, du plateau cyclique non tournant 3. Afin de simplifier l'étude, on construit un modèle plan de ce dispositif, constitué des solides suivants :

- Bâti 0 : lié au corps de l'hélicoptère.
- Plateau 3 en liaison linéaire annulaire (sphère - cylindre) d'axe avec le bâti 0.

- Un premier vérin permet d'actionner le dispositif :
 - Corps 1 en liaison pivot d'axe $(G, \vec{z})$ avec le bâti 0.
 - Corps 1 en liaison pivot glissant d'axe $(G, \vec{y}_1)$ avec la tige 2.
 - Tige 2 en liaison pivot d'axe $(F, \vec{z})$ avec le plateau 3.

Données :

- $\beta = (\vec{y}, \vec{y}_1)$,
- $\vec{OG} = g \cdot \vec{x}$,
- $\vec{OF} = g \cdot \vec{x} + f(t) \cdot \vec{y}_1$,
- $\vec{OE} = e(t) \cdot \vec{y}$

Les variations de l'angle β étant faibles, on pourra faire l'approximation que $\beta = 0$, ce qui caractérise la position de référence. Toute l'étude cinématique sera effectuée autour de la position de référence, ce qui conduit à confondre $\vec{y}$ et $\vec{y}_1$.

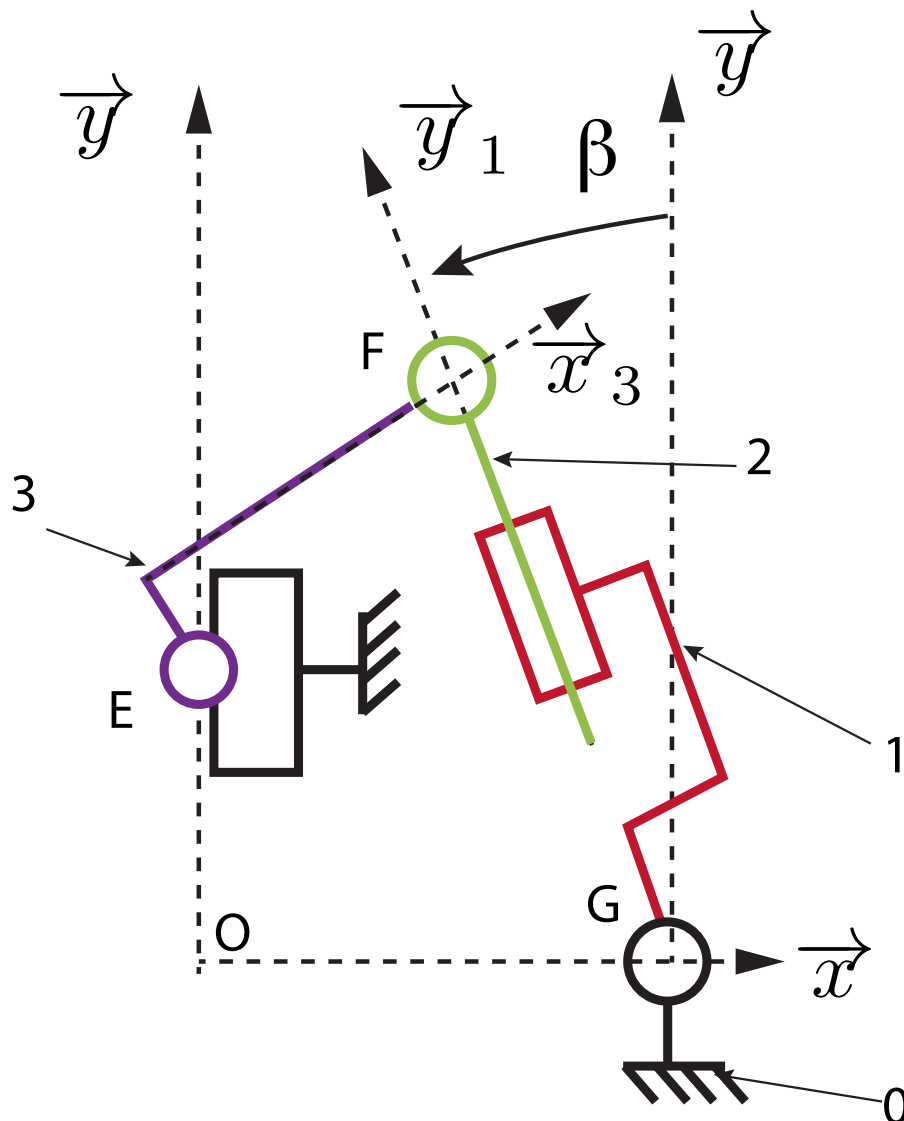


FIGURE 19 – Schéma cinématique du dispositif décrit ci-dessus, dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$

- Q 6 :** Écrire les torseurs cinématiques des différentes liaisons, dans le cadre d'une modélisation plane.
- Q 7 :** Écrire la fermeture cinématique au point O, pour la position de référence.
- Q 8 :** En déduire l'indice de mobilité cinématique, qui définit le nombre de paramètres indépendants permettant de fixer de manière unique la position de chacune des pièces.
- Q 9 :** Expliquer la nécessité d'utiliser deux vérins.
- On rajoute un deuxième vérin :

- Corps 1' en liaison pivot d'axe $(G', \vec{z})$ avec le bâti 0.
- Corps 1' en liaison pivot glissant d'axe $(G', \vec{y}_1')$ avec la tige 2'.
- Tige 2' en liaison pivot d'axe $(F', \vec{z})$ avec la pièce 3.

Données :

NB : l'indice ' caractérise la partie située à gauche de l'axe $(O, \vec{y})$.

- $\vec{OG}' = -g \cdot \vec{x}$,
- $\vec{OF}' = -g \cdot \vec{x} + f'(t) \cdot \vec{y}_1'$.

Q 10 : Construire le schéma cinématique du dispositif avec deux vérins.

Q 11 : Ecrire, au point O et pour la position de référence, les fermetures cinématiques du dispositif complet en tenant compte des deux vérins.

Q 12 : En déduire l'indice de mobilité du mécanisme complet. Commenter la valeur trouvée.

Q 13 : On étudie la loi entrée-sortie du point de vue cinématique autour de la position de référence et on fixe :

$$\vec{V}(M \in 2/1) \cdot \vec{y} = +v$$

$$\vec{V}(M \in 2'/1') \cdot \vec{y} = -v$$

Déterminer $\vec{V}(E \in 3/0)$ et $\vec{\Omega}(3/0)$. Quel est le mouvement de 3 par rapport à 0, dans ce cas?

Q 14 : Montrer que l'étude statique est possible dans le cadre d'une modélisation plane.

Q 15 : Les pales du rotor principal appliquent par l'intermédiaire de biellettes et du plateau des actions mécaniques sur le solide 3 que l'on modélise par :

$$\{\mathcal{T}_{(ext \rightarrow 3)}\}_E = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ext} = F_x \cdot \vec{x} + F_y \cdot \vec{y} \\ \vec{\mathcal{M}}_{E(ext \rightarrow 3)} = M_E \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$

Déterminer l'effort exercé par chacun des vérins que l'on notera :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{(fluide \rightarrow 2)}\}_G &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\ \{\mathcal{T}_{(fluide \rightarrow 2')}\}_G &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{2'} = F_2' \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Exercice 7 : ROBOVOLC

Source : XENS 2017

1 présentation

Le projet ROBOVOLC est de concevoir un robot mobile pour l'exploration volcanique. Ce robot doit être capable de :

- s'approcher d'un cratère actif;
- collecter des échantillons rocheux issus de rejets éruptifs;
- collecter des échantillons gazeux;
- collecter d'autres données physiques et chimiques.

La mobilité sur terrain accidenté est obtenue, en plus de par la motorisation indépendante des roues, par l'utilisation d'un châssis articulé. Celui-ci a une structure tubulaire avec des articulations passives (non actionnées) permettant à ROBOVOLC de s'adapter à toute surface non plane. Une illustration des cinq mouvements indépendants permis par les articulations est donnée sur la Figure 2.

Le terrain volcanique est en pratique très accidenté, avec la présence d'obstacles (roches) et de fortes pentes (Figure 1). Par conséquent, le système de locomotion de ROBOVOLC doit être adapté à ce type de terrain.

L'objectif de cette partie est de valider les performances d'agilité et de franchissement d'obstacle du système sur des terrains non structurés avec difficultés topologiques (pentes, obstacles). On souhaite vérifier les critères suivants du cahier des charges :

Critère	Valeur
Masse maximale des composants modulaires	200kg
Pente maximale du sol	40°
Hauteur maximale d'un obstacle	400mm



FIGURE 20 – ROBOVOLC

châssis au repos 	mouvement 1 : rotation de l'essieu avant au- tour de l'axe longitudinal 	mouvement 2 : rotation de l'essieu central autour de l'axe longitudinal
mouvement 3 : rotation de l'essieu arrière autour de l'axe longitudinal 	mouvement 4 : rotation de l'arbre avant au- tour de l'axe transversal 	mouvement 5 : rotation de l'arbre arrière autour de l'axe transversal

TABLE 2 – Illustration des mouvements de déformation du châssis

2 Modélisation

Le châssis est composé de cinq parties orientables les unes par rapport aux autres (Figure 21) :

- l'essieu avant, noté EAV, reliant les roues avant 1 et 2 ;
- l'essieu central, noté EC, reliant les roues centrales 3 et 4 ;
- l'essieu arrière, noté EAR, reliant les roues arrière 5 et 6 ;
- l'arbre avant, noté AAV, connectant les essieux EAV et EC ;
- l'arbre arrière, noté AAR, connectant les essieux EC et EAR.

L'empattement entre deux essieux successifs est noté a , et la distance entre deux roues d'un même essieu est notée $2e$.

Les différentes parties sont reliées entre elles par des articulations possédant une raideur en rotation imposée. Par la suite, on supposera cette raideur négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu. Un schéma cinématique de la plateforme (châssis+roues) est présenté sur la Figure 3.

Les deux articulations EC-AAV et EC-AAR, situées à une distance longitudinale $\pm b$ de l'essieu EC, autorisent une rotation selon les directions $\vec{x}$ et $\vec{y}$; elles sont modélisées par des liaisons rotule à doigt de centres respectifs B et C.

Les deux articulations EAV-AAV et EAR-AAR autorisent une rotation selon la direction $\vec{x}$ seulement; elles sont modélisées par des liaisons pivot d'axe $(O, \vec{x})$.

D'autre part, les six liaisons essieu-roue sont modélisées par des liaisons pivot d'axe $(A, \vec{y})$ (roues avant), $(O, \vec{y})$ (roues centrales) ou $(D, \vec{y})$ (roues arrière).

De plus, le contact de chaque roue i avec le sol est modélisé en première approche par une liaison ponctuelle de normale $(P_i, \vec{z})$.

On considère que les liaisons sont parfaites sans frottements.

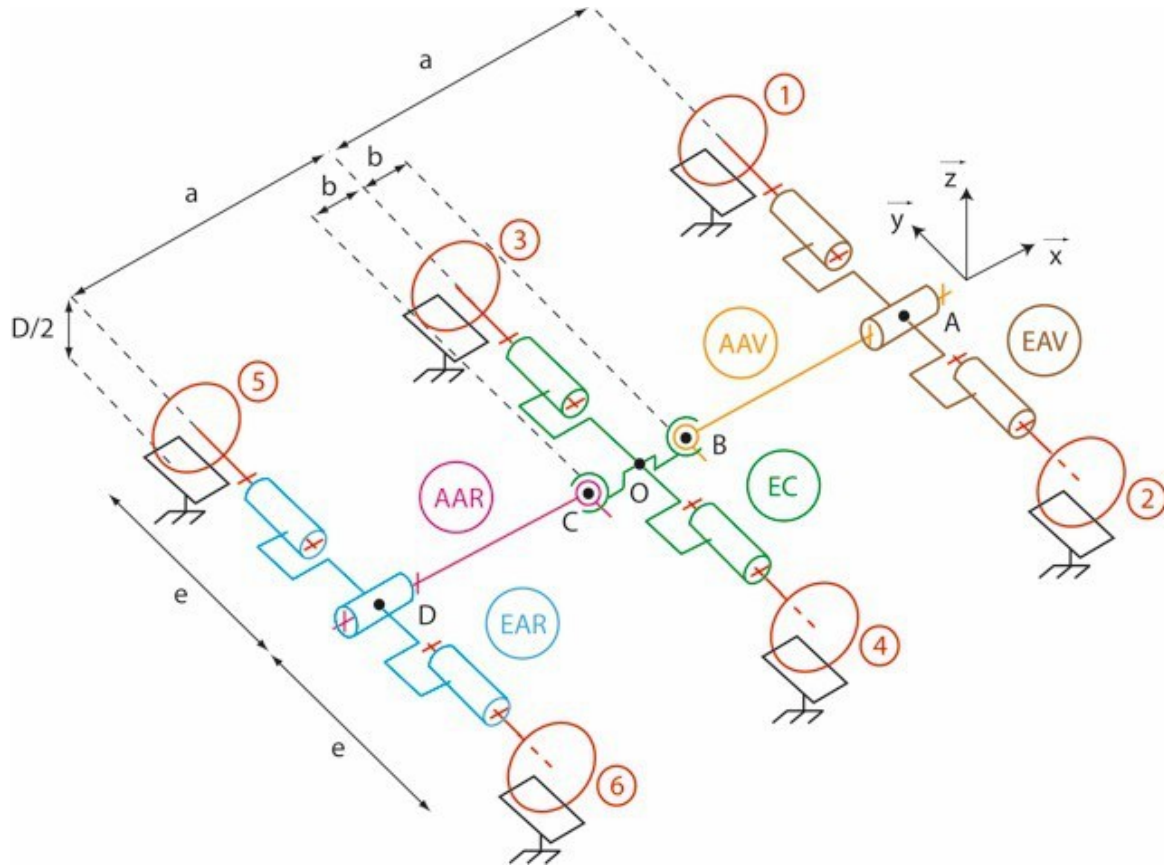


FIGURE 21 – Schéma cinématique

On considère dans cette première partie que le sol est horizontal (comme sur la figure 21).

Q 16 : Tracer le graphe de structure du système.

Q 17 : Déterminer le nombre d'inconnues cinématiques, le nombre cyclomatique, puis le nombre d'équations à écrire. Conclure

Q 18 : Déterminer le nombre d'inconnues de liaison, Préciser le nombre d'équations d'équilibre que l'on peut écrire.

On isole la roue R_i . On note C_i le centre de la liaison pivot et I_i le point de contact avec le sol (avec $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

On note :

- $\vec{P}_{AV} = -P_{AV} \cdot \vec{z}$ le poids de la partie avant que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre AAV.
- $\vec{P}_{AR} = -P_{AR} \cdot \vec{z}$ le poids de la partie arrière que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre AAR.
- $\vec{P}_C = -P_C \cdot \vec{z}$ le poids de la partie centrale que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre EC en O.

Les couples moteurs sont nuls.

Q 19 : Écrire le système d'équation relatif à l'équilibre de la roue R_i . Conclure On isole maintenant l'essieu avant (respectivement l'essieu arrière)

Q 20 : Écrire les équations de l'équilibre.

On isole maintenant l'arbre avant AAV (respectivement l'arbre arrière AAR).

Q 21 : Écrire les équations de l'équilibre.

Q 22 : Terminons, en écrivant le dernier équilibre sur *EC* et conclure sur l'hyperstaticité et les mobilités.

Exercice 8 : Echelle pivotante automatique

Source : CCP PSI 2007

1 Échelle Pivotante Automatique

On donne ci-dessous ma modélisation d'un système d'échelle pivotante automatique de pompier.

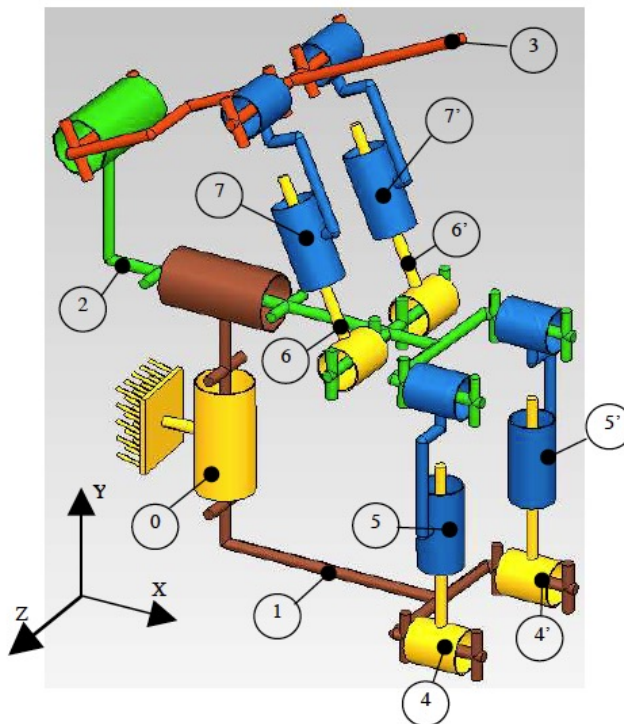


FIGURE 22 – Échelle Pivotante Automatique

Q 23 : Tracer le graphe des liaisons.

Q 24 : Déterminer le degré d'hyperstaticité du mécanisme.

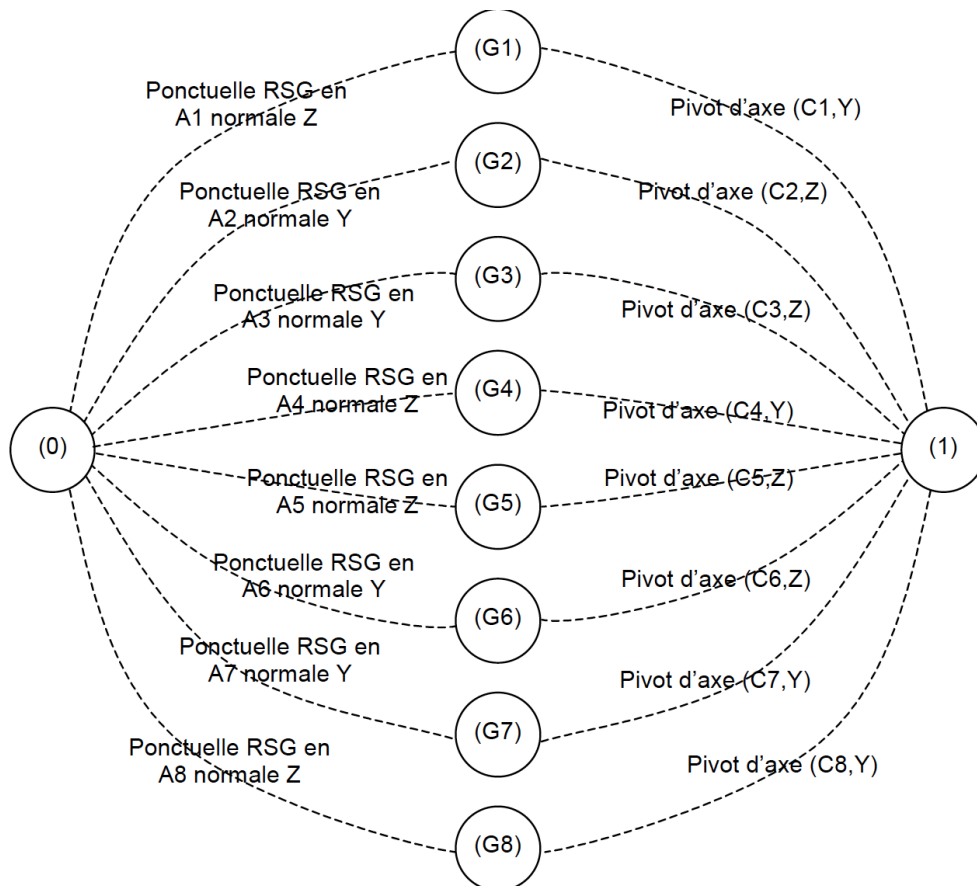
Q 25 : Proposez des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.

Corrigé

Exercice 1 : Etude d'un pont roulant

1 Corrigé : Pont roulant

Q 1 : Établir le graphe des liaisons limité aux dix solides suivants : (0), (1) et les huit galets (Gi).



Q 2 : Montrer, par la méthode de votre choix, que la liaison équivalente entre (0) et (1) incluant les huit galets est une liaison glissière de direction $\vec{x}$.

Pour déterminer la liaison équivalente, on procède en deux temps :

- on cherche tout d'abord la liaison équivalente à la mise en série de la liaison ponctuelle entre la voie de roulement (0) et le galet (Gi) et de la liaison série entre ce même galet (Gi) et le pont (1)
- on cherche ensuite la liaison équivalente à la mise en parallèle de toutes ces liaisons équivalentes entre la voie de roulement (0) et le pont (1)

1. Recherche de la liaison équivalente à la mise en série d'une liaison ponctuelle et d'une liaison pivot

Le torseur cinématique de la liaison ponctuelle entre le galet (G1) et le rail (0) est :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(G1/0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} & v_{10} \\ r_{10} & 0 \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$$

$\forall P \in (A_1, \vec{z})$

Le torseur cinématique de la liaison ponctuelle entre le galet (G1) et le pont (1) est :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(G_1/1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\forall P \in (C_1, \vec{y})} \quad \left(-, \vec{y}, - \right)$$

On $(C_1, \vec{y}) \cap (A_1, \vec{z}) = C_1$

Par composition des mouvements,

$$\left\{ \mathcal{V}_{(1/0)} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(1/G_1)} \right\} - \left\{ \mathcal{V}_{(G_1/1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} - q_{11} & v_{10} \\ r_{10} & 0 \end{array} \right\}_{C_1} \quad \left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \right)$$

La liaison équivalente est donc une ponctuelle (sphère – plan) de normale $(C_1, \vec{z})$.

Cette démarche pourrait se faire pour les sept autres galets et on trouverait huit ponctuelles.

2. Recherche de la liaison équivalente à la mise en parallèle de huit liaisons ponctuelles

- Méthode cinématique (non conseillée ici) : Il faut résoudre le système de 48 équations scalaires (!!!) suivant :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(1^{G_1}/0)} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(1^{G_2}/0)} \right\} = \dots = \left\{ \mathcal{V}_{(1^{G_8}/0)} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(1^{eq}/0)} \right\}$$

- Méthode statique (conseillée ici ... mais il faut récupérer à la page suivante les expressions des torseurs)

Déterminons la liaison équivalente (0) / (1) via les huit galets : les liaisons étant en parallèle, on peut en conclure que

$$\sum_{k=1}^8 \left\{ \mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)} \right\}^{G_k} = \left\{ \mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)} \right\}^{eq}$$

Il y a 8 galets or pour passer d'une liaison sphère/plan à une liaison glissière, il faudrait passer d'une inconnue statique à 5. En théorie on aurait besoin d'utiliser que 5 galets. Il y a donc 3 galets redondant qui correspondrait au degré d'hyperstatisme de 3.

Il faudrait donc utiliser 4 combinaisons de galets pour passer d'une liaison sphère/plan à une liaison glissière.

On peut utiliser démontrer une combinaison puis généraliser le résultat pour 3 autres combinaison ponctuelle à

Commençons par raisonner sur les galets G_1 et G_4 , avec les torseurs :

- pour la liaison ponctuelle (0) – (1) via (G_1) :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)} \right\}^{G_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{01}^1 & 0 \end{array} \right\}_{\forall P \in (A_1, \vec{z})} \quad \left(-, -, \vec{z} \right)$$

- pour la liaison ponctuelle (0) – (1) via (G_4) :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)} \right\}^{G_4} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{01}^4 & 0 \end{array} \right\}_{\forall P \in (A_4, \vec{z})} \quad \left(-, -, \vec{z} \right)$$

Il faut déplacer un des deux torseurs pour pouvoir les sommer. On peut déplacement $\left\{ \mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)} \right\}^{G_4}$ en A_1 :

$$\vec{M}(A_1)(0 \rightarrow 1) = \vec{M}(A_4)(0 \rightarrow 1) + \vec{A_1 A_4} \wedge \vec{R}^{G_4}(0 \rightarrow 1) = -2d \vec{y} \wedge Z_{01}^4 \vec{z} = -2d Z_{01}^4 \vec{x}$$

$$\left\{ \mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)} \right\}^{eq-G_1-G_4} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -2d Z_{01}^4 \\ 0 & 0 \\ Z_{01}^1 + Z_{01}^4 & 0 \end{array} \right\}_{\forall P \in (A_1, \vec{z})} \quad \left(-, -, \vec{z} \right)$$

On remarque qu'en combinant ces deux galets on ajoute une composante en moment selon $(A_1, \vec{x})$. Ainsi on peut en déduire qu'en faisant le même raisonnement, on ajoute :

- une composante en moment selon $(A_1, \vec{y})$ en combinant avec le galet G_5 ;
- une composante en résultante selon $\vec{y}$ en combinant avec le galet G_6 ;
- une composante en moment selon $(A_1, \vec{z})$ en combinant avec le galet G_2 ;

On obtient bien alors un torseur de liaison équivalent de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)}\}^{eq-G_1-G_4-G_5-G_6-G_2} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -2dZ_{01}^4 \\ Y_{01}^{eq} & M_{01}^{eq} \\ Z_{01}^1 + Z_{01}^4 & N_{01}^{eq} \end{array} \right\}_{A_1} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Q 3 : En utilisant la « méthode statique », déterminer le degré d'hyperstatisme de cette liaison glissière équivalente entre le pont (0) et la voie (1).

Méthode Statique		Méthode cinématique	
Contact parfait	Adhérence	Contact parfait	Adhérence
$I_s = 5 \times 8 + 1 \times 8 = 48$ $E_s = 9 \times 6 = 54$ $m_c = 9$ $h = 48 - 54 + 9 = 3$	$I_s = 5 \times 8 + 2 \times 8 = 56$ $E_s = 9 \times 6 = 54$ $m_c = 1$ $h = 56 - 54 + 1 = 3$	$I_c = 8 \times 1 + 8 \times 5 = 48$ $E_c = 7 \times 6 = 42$ $m_c = 9$ $h = 42 - 48 + 9 = 3$	$I_c = 8 \times 1 + 8 \times 5 = 48$ $E_c = 7 \times 6 + 8 = 50$ $m_c = 1$ $h = 50 - 48 + 1 = 3$

Q 4 : Justifier alors la nécessité du réglage de position par rapport au pont (1) de certains galets; recopier sur votre copie et compléter le tableau ci-dessous en indiquant les galets qui devront être réglables (notés R) ou fixes (notés F) par rapport au pont, sachant que les galets (G1), (G4) et (G7) sont supposés fixes.

Le système étant hyperstatique de degré 3, il y a trois contraintes de montage géométrique dans le mécanisme : il est donc nécessaire de permettre le réglage de trois galets. On doit donc avoir :

- pour G5 et G8 : un fixe et un réglable;
- pour G2, G3 et G6 : un fixe et deux réglables;

Galet	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
Fixe/Réglable	F	F/R/R	R/F/R	F	F/R	R/R/F	F	R/F

Exercice 2 : Autofocus d'un appareil photo Réflex

Q 5 : Écrire les fermeture cinématiques des chaînes 0 – 1 – 2 au point C et 0 – 2 – 3 au point D.

- Cas de la chaîne 0-1-2 :

$$\{\mathcal{V}_{20}\} = \{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{10}\}$$

$$\{\mathcal{V}_{20}\} = {}_E \left\{ \begin{matrix} \omega_{20} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = {}_C \left\{ \begin{matrix} \omega_{20} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} ; \{\mathcal{V}_{21}\} = {}_F \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ V_1 \vec{z}_0 \end{matrix} \right\} = {}_C \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ V_1 \vec{z}_0 \end{matrix} \right\} ; \{\mathcal{V}_{10}\} = {}_C \left\{ \begin{matrix} \omega_{10} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$$

On obtient les 6 équations scalaires :

$0 = 0$	(1)
$0 = 0$	(2)
$\omega_{20} - \omega_{10} = 0$	(3)
$0 = 0$	(4)
$0 = 0$	(5)
$V_1 = 0$	(6)

- Cas de la chaîne 0-2-3 :

$$\{\mathcal{V}_{30}\} = \{\mathcal{V}_{32}\} + \{\mathcal{V}_{20}\}$$

$$\text{Or } \{\mathcal{V}_{30}\} = {}_B \left\{ \begin{matrix} \omega_{30} \vec{z}_0 \\ p\omega_{30} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\} = {}_D \left\{ \begin{matrix} \omega_{30} \vec{z}_0 \\ p\omega_{30} \vec{z}_0 - a\omega_{30} \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}$$

$$\{\mathcal{V}_{32}\} = {}_D \left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x}_0 + \omega_y \vec{y}_0 + \omega_z \vec{z}_0 \\ V_x \vec{x}_0 + V_z \vec{z}_0 \end{matrix} \right\} \text{ et } \{\mathcal{V}_{20}\} = {}_E \left\{ \begin{matrix} \omega_{20} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = {}_D \left\{ \begin{matrix} \omega_{20} \vec{z}_0 \\ -c\omega_{20} \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}$$

On obtient les 6 équations scalaires :

$\omega_x = 0$	(7)
$\omega_y = 0$	(8)
$\omega_{30} - \omega_z - \omega_{20} = 0$	(9)
$V_x = 0$	(10)
$-a\omega_{30} + c\omega_{20} = 0$	(11)
$p\omega_{30} - V_z = 0$	(12)

Q 6 : Écrire les douze équations associées aux fermetures précédentes et les mettre sous la forme de matrice donnée ci-dessous, en remplaçant les points d'interrogation

On réécrit le système des 12 équations à 9 inconnues dans l'ordre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{10} \\ V_1 \\ \omega_{20} \\ \omega_{30} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ V_x \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q 7 : Sans calculs, mais avec justification, donner le rang de la matrice. En déduire, la mobilité du modèle du mécanisme.

Ce système matriciel présente 8 lignes indépendantes avec 4 lignes de zéros; le rang de la matrice est donc $rg(A) = 12 - 4 = 8$

La mobilité du système est donnée par : $m = I_c - rg(A)$ avec I_c le nombre d'inconnues cinématiques. Ici on a $I_c = 9$, d'où $m = 1$.

Q 8 : Calculer le degré d'hyperstatisme du modèle du mécanisme.

Le degré d'hyperstatisme est donné par définition avec :

$$h = 6\gamma - I_c + m = 12 - 9 + 1 = 4$$

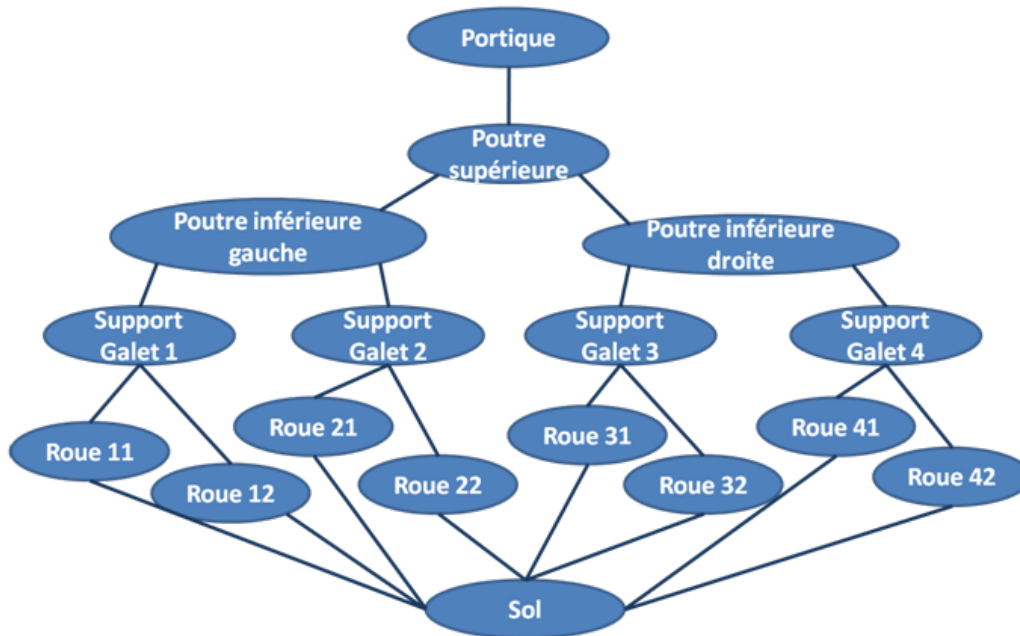
Q 9 : Proposer un nouveau modèle pour les deux liaisons pivots afin de rendre le modèle du mécanisme isostatique.

Il faut rajouter des mobilités en rotation sur $\vec{x}$ et sur $\vec{y}$ pour « enlever » les lignes de zéros. On remplace donc les pivots d'axe $(C, \vec{z}_0)$ et $(E, \vec{z}_0)$ par respectivement des rotules de centre C et E .

Exercice 3 : Etude d'une grue porte conteneur

2 Grue porte-conteneurs

Q 10 : Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle plan d'un seul pied, de la liaison portique/sol donné sur la figure 8. En déduire la répartition de la charge entre les 8 galets.



- D'après le graphe de liaisons ci-dessus, toutes les liaisons entre pièces sont des liaisons pivots de direction $(Mi, \vec{y})$ à part les liaisons entre le sol et les différentes roues qui sont assimilées à des liaisons ponctuelles sans frottement.
- On note p le nombre de pièces total; N_s : le nombre d'inconnues statiques (2 pour une pivot et 1 pour une ponctuelle).
- Ainsi il y a 15 liaisons pivots et 8 ponctuelles.
- Concernant les mobilités, on peut identifier :
 - 2 mobilités utiles :
 - > translation portique selon $\vec{x}$
 - > rotation portique/poutre supérieure autour de $(C, \vec{y})$
 - 8 mobilités internes : les rotations propres des roues /galet
- On peut appliquer la formule d'hyperstatisme :

$$h = N_s - 3 \cdot (p - 1) + m_c = 15 \times 2 + 8 \times 1 - 3 \times (17 - 1) + 2 + 8 = 38 - 48 + 10 = 0$$

Ainsi on trouve un modèle qui est isostatique.

De fait, les charges sont réparties de façon équilibrée.

Q 11 : À partir de l'étude des mobilités du pied décrit figure 8, proposer une liaison équivalente à la liaison assurée par un pied entre le portique et le rail, dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ de la figure 8, en précisant ses caractéristiques géométriques.

D'après la figure 8, la liaison entre le portique et le rail admet comme DDL les 2 mobilités utiles de la question précédente. Ainsi, dans le plan la liaison équivalente est une liaison ponctuelle de normale $(A, \vec{z})$.

Q 12 : Déterminer littéralement, dans le cadre d'une modélisation dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ de la figure 9, les efforts

normaux du sol sur la grue transmis par les pieds « gauche » et « droit », lorsque la grue est soumise au vent. (Hypothèses : le mouvement suivant $\vec{z}$ du conteneur ne sera pas considéré; le chariot et le portique sont immobiles; la masse des poutres supérieure, inférieure et des supports de galets est négligeable devant M_p .)

Par hypothèse :

- Tous les éléments sont immobiles
- Les masses des poutres supérieure, inférieure et des supports de galets est négligeable devant M_p .
- Le problème est supposé plan ($\vec{x}, \vec{z}$).

Ainsi on se place dans le cadre d'une étude de statique :

- Système isolé : {portique + poutres inf & sup + supports de galets + galets + chariot + spreader + conteneur}
- Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :
 - Poids : $M_c + M_s$ en G_3 ; M_{ch} en G_{ch} et M_p en G_p
 - Action du rail en A : ponctuelle de normale ($A, \vec{z}$) avec frottement ($Z_{fA} \vec{z} - X_{fA} \vec{x}$)
 - Action du rail en D : ponctuelle de normale ($D, \vec{z}$) avec frottement ($Z_{fD} \vec{z} - X_{fD} \vec{x}$)
 - Force du vent en K : $\vec{F}_V = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot V \cdot \vec{x}$
- Théorème du moment statique en A projeté sur $\vec{y}$ permet de déterminer Z_{fD} :
 - $-\left[\vec{AG}_3 \wedge (M_c + M_s) \cdot g \cdot \vec{z} + \vec{AG}_{ch} \wedge M_{ch} \cdot g \cdot \vec{z} + \vec{AG}_p \wedge M_p \cdot g \cdot \vec{z} \right] \cdot \vec{y} + \vec{AK} \wedge \vec{F}_V \cdot \vec{x} + \vec{AD} \wedge (Z_{fD} \vec{z} + X_{fD} \vec{x}) \cdot \vec{y}$
 - $\vec{AD} = -l_x \vec{x}$; $\vec{AG}_3 = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + ??? \vec{z}$; $\vec{AG}_{ch} = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + ??? \vec{z}$; $\vec{AG}_p = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + h \vec{z}$; $\vec{AK} = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + H \vec{z}$
 - Toutes les dimensions selon $\vec{z}$ n'intervenant pas dans le résultat final, il importe peu que certaines ne soient pas définies. Ainsi nous obtenons l'équation suivante :
 - $-(M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g \cdot \frac{l_x}{2} + H \cdot F_V + l_x \cdot Z_{fD} = 0$
 - On en déduit alors $Z_{fD} = \frac{1}{2} \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g - H \cdot \frac{F_V}{l_x}$
- Théorème de la résultante statique selon $\vec{z}$:
 - $Z_{fA} + Z_{fD} - (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g = 0$
 - Soit : $Z_{fA} = \frac{1}{2} \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g + H \cdot \frac{F_V}{l_x}$

Q 13 : En déduire la valeur (en $km \cdot h^{-1}$) de la vitesse de vent V_1 pour laquelle la grue bascule. En déduire la valeur (en $km \cdot h^{-1}$) de la vitesse de vent V_2 pour laquelle la grue glisse, en considérant au contact roue/rail un modèle de frottement sec de coefficient $f = 0,2$.

- Il y a basculement ssi, $Z_{fD} = 0 = \frac{1}{2} \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g - H \cdot \frac{F_V}{l_x}$, car d'après le sens du vent le basculement s'effectuera autour de A.

Soit la vitesse du vent minimale causant le basculement :

$$V = \frac{l_x \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g}{H \lambda} \Rightarrow V = 312 \text{ km/h } (> 300 \text{ km/h Cdcf})$$

NB : EN observant l'équation de Z_{fD} on peut remarquer que le cas le plus défavorable est celui sans conteneur. Dans ce cas la vitesse du vent vaudra :

$$V = 307 \text{ km/h } (> 300 \text{ km/h Cdcf})$$

- Pour étudier le glissement on se place à l'équilibre à la limite du glissement : $X_{fA} = f \cdot Z_{fA}$

D'après le Th. De la résultante selon $\vec{x}$ on trouve :

$$-X_{fA} - X_{fD} + F_V = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \lambda V_2 - f \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g = 0$$

Comme précédemment, on peut remarquer que le cas le plus défavorable est celui sans conteneur. Dans ce cas la vitesse du vent vaudra :

$$V_2 = \frac{2}{\lambda} \cdot f \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g \text{ soit } V_2 = 266 \text{ km/h } (> 120 \text{ km/h Cdcf})$$

Q 14 : Lorsque le chariot est en bout de bec avant (voir figure 3, la distance D vaut 40 m) et que la charge maximale est levée à l'accélération maximale γ_{lm} , déterminer littéralement, dans le cadre d'un problème plan (dans le plan ($\vec{x}, \vec{y}$) de la figure 7), les efforts dans les contacts rails/portique, modélisés par des liaisons sphère-plan en A et B. Donner la condition de non basculement de la grue. Cette condition est-elle vérifiée?

Soit $S_1 = \{\text{Portique} + \text{Chariot} + \text{Spreader} + \text{Conteneur}\}$ et $S = \{\text{Spreader} + \text{Conteneur}\}$

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- Poids ($M_c + M_s$ en G_3 , M_{ch} en G_{ch} et M_p en G_p)
- Action du rail en A ($Z_A \vec{z}$)
- Action du rail en B ($Z_B \vec{z}$)

S'il y a basculement, il aura lieu lors de la levée de la charge maxi (portique et chariot immobiles). On applique le Th du moment dyn. en A selon la direction $\vec{x}$.

$$\vec{\delta}_A(S/Rg) \cdot \vec{x} = (M_c + M_s) \vec{AG} \wedge \vec{\gamma} \quad (G \in S_1/Rg) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{AG} = h_G \vec{z} - D \vec{y} ; \vec{\gamma} (G \in S_1/Rg) = \gamma_{lm} \vec{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_A(S/Rg) \cdot \vec{x} = -(M_c + M_s) \cdot D \cdot \gamma_{lm}$$

$$\vec{M}_A(\text{poids}/Rg) \cdot \vec{x} = - \left[\vec{AG}_3 \wedge (M_c + M_s) \cdot g \cdot \vec{z} + \vec{AG}_{ch} \wedge M_{ch} \cdot g \cdot \vec{z} + \vec{AG}_p \wedge M_p \cdot g \cdot \vec{z} \right] \cdot \vec{x}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A(\text{poids}/Rg) \cdot \vec{x} = \left[(M_c + M_s) \cdot D + M_{ch} \cdot D - M_p \cdot \frac{l_y}{2} \right] \cdot g$$

$$\vec{M}_A(Z_A \vec{z}/Rg) \cdot \vec{x} = 0$$

$$\vec{M}_A(Z_B \vec{z}/Rg) \cdot \vec{x} = \vec{AB} \wedge Z_B \vec{z} \cdot \vec{x} = l_y \cdot Z_B$$

Ainsi on obtient l'équation suivante :

$$-(M_c + M_s) \cdot D \cdot \gamma_{lm} = \left[(M_c + M_s) \cdot D + M_{ch} \cdot D - M_p \cdot \frac{l_y}{2} \right] \cdot g + l_y \cdot Z_B$$

$$\text{Soit } Z_B = \frac{M_p \cdot \frac{l_y}{2} \cdot g - (M_c + M_s) \cdot D \cdot (g + \gamma_{lm}) - M_{ch} \cdot D \cdot g}{l_y} = 3216 \text{ kN} > 0$$

Le non basculement de la grue consiste à considérer $Z_B \geq 0$

En se plaçant au cas limite on trouve :

$$\gamma_{lm} = g \left[\frac{-M_{ch} \cdot D + M_p \cdot \frac{l_y}{2}}{(M_c + M_s) \cdot D} - 1 \right] = 24.7 \text{ m/s} \gg 0.5 \text{ m/s}$$

Q 15 : Vérifier si les deux derniers critères de l'exigence 1.2 du cahier des charges sont validés, et proposer le cas échéant des solutions techniques.

Le cahier des charges n'est pas respecté. Il existe un risque de glissement en cas de vent violent mais pas de basculement. Il faudra donc prévoir un système de blocage des roues.

Exercice 4 : Modélisation d'un train d'atterrissage d'hélicoptère

3 Train d'atterrissage d'hélicoptère

Q 16 : À partir du schéma cinématique de la structure d'une jambe du train principal de la figure 12 de l'annexe, donner le degré de mobilité de cet ensemble en distinguant degré utile et degré interne. Calculer alors, à partir de ce degré de mobilité, le degré d'hyperstatisme en précisant bien les hypothèses validant la ou les relations que vous utilisez.

Si, on considère tout l'ensemble, il possède 2 degrés de mobilité utiles :

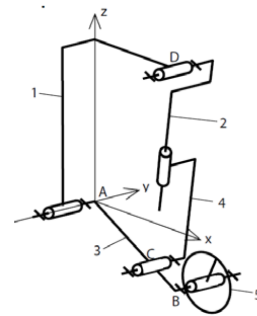
- ✓ la rotation de 5/3 suivant l'axe $(B, \vec{y})$ qui permet à la roue de tourner;
- ✓ le mouvement de translation de 4/2 suivant l'axe de la pivot glissant 4/2, qui permet au train d'atterrissage d'accoster le sol en réduisant les chocs (rôle du vérin amortisseur).

Par ailleurs, il n'y a aucun degré de mobilité interne au système.

Le degré d'hyperstatisme h = Nbre des inconnues des actions mécaniques – (Nbre d'équations issues du PFS – Nbre de mobilités totales).

- ✓ Nbre des inconnues des actions mécaniques = $5+5+5+5+4$ (4 liaisons pivot et une liaison pivot glissant) = 24
- ✓ Nbre d'équations issues du PFS: $6 \cdot (\text{Nbre pièces, bâti exclu}) = 6 \cdot 4 = 24$
- ✓ Nbre de mobilités totales = 2

Le système est donc hyperstatique d'ordre 2.



Q 17 : Préciser, en argumentant votre réponse, la nature et la direction des degrés de liberté qu'il serait nécessaire de relâcher pour rendre le modèle proposé isostatique.

Le système est hyperstatique d'ordre 2 à cause de la présence des liaisons pivots qui imposent des contraintes de parallélisme entre les axes des pivots. En effet, dans la chaîne fermée 1-2-4-3, les deux équations de fermeture cinématique sur les vitesses angulaires, sont de type " $0+0=0$ ". Elles signifient qu'il manque 2 mobilités en rotation suivant ces axes.

Par conséquent, pour rendre le système isostatique, il faut ajouter deux mobilités en rotation suivant des axes autres que des axes parallèles à la direction $\vec{y}$. Par exemple, on peut rendre le système isostatique, en remplaçant la liaison 1/3 par une liaison rotule de centre A. Rq: Cette solution n'introduit pas de mobilité interne. On peut également remplacer la liaison 1/2 par une liaison linéaire annulaire (sphère-cylindre) de centre D et d'axe $(D, \vec{y})$. On ajoute alors une mobilité interne (rotation possible suivant l'axe de la liaison pivot glissant).

Exercice 5 : Simulateur de vol

4 Étude d'un simulateur de vol

Q 1 : (Réservée aux 5/2) Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle plan du système de la figure 16 et conclure sur la possibilité de déterminer l'ensemble des actions mécaniques du modèle considéré.

Chaque liaison pivot d'axe de direction normale au plan considéré possède 2 inconnues statiques. Il y en a 9.

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & N_{ij} \\ Z_{ij} & 0 \end{Bmatrix}_P \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_{ij} & 0 \\ Y_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P$$

Pour la liaison glissière :

$$\{\mathcal{T}_{8 \rightarrow 9}\} = \begin{Bmatrix} X_{89} & L_{89} \\ 0 & N_{89} \\ Z_{89} & M_{89} \end{Bmatrix}_{F, R_8} \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_{89} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{89} \end{Bmatrix}_{F, R_8}$$

Pour la liaison sphérique à doigt :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 6}\} = \begin{Bmatrix} X_{36} & 0 \\ Y_{36} & N_{36} \\ Z_{36} & 0 \end{Bmatrix}_{C, R_3} \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_{36} & 0 \\ Y_{36} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C, R_3}$$

Soit un nombre d'inconnues statiques I_s de

$$I_s = (9 + 1 + 1) \times 2 = 22$$

Il y a 8 solides hors bâti, soit un nombre d'équation E_s de :

$$E_s = 8 \times 3 = 24$$

Les mobilités du mécanisme sont au nombre de 2 avec les axes motorisés en H et en 0

Le degré d'hyperstatisme est donc de 0 :

$$H = I_s - E_s + m = 22 - 24 + 2 = 0$$

Il est donc possible de déterminer l'ensemble des actions mécaniques.

Q 2 : Donner l'expression littérale de l'effort Y_{96} que doit fournir la paire de vérins à gaz en fonction de g , m_3 , $\theta_{60\text{moy}}$, θ_{96} et des paramètres géométriques. Préciser le théorème et la projection utilisés.

On isole tout d'abord l'ensemble {9+8}. Il est soumis uniquement à 2 glisseurs. On en déduit :

$$\vec{F}_{9 \rightarrow 6} = Y_{96} \vec{y}_9$$

Ensuite on isole {6} :

Bilan des action mécaniques extérieurs :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 6}\} = \begin{Bmatrix} -m_3 g \\ 0 \end{Bmatrix}_C$$

$$\{\mathcal{T}_{9 \rightarrow 6}\} = \begin{Bmatrix} Y_{96} \vec{y}_9 \\ 0 \end{Bmatrix}_F$$

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 6}\} = \begin{Bmatrix} X_{06} \vec{x}_0 + Y_{06} \vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_E$$

On applique le théorème du moment statique suivant $(E, \vec{z}_0)$:

$$\vec{\mathcal{M}}_E(\vec{F}_{9 \rightarrow 6}) = \vec{EF} \wedge \vec{F}_{9 \rightarrow 6} = (d_{61} \vec{x}_6 - h_6 \vec{y}_6) \wedge Y_{96} \vec{y}_9 = d_{61} \cos \theta_{96} Y_{96} \vec{z}_0 - h_6 \sin \theta_{96} Y_{96} \vec{z}_0$$

$$\vec{\mathcal{M}}_E(\vec{F}_{3 \rightarrow 6}) = \vec{EC} \wedge \vec{F}_{3 \rightarrow 6} = L \vec{x}_6 \wedge (-m_3 g \vec{y}_0) = -L \cos \theta_{60\text{moy}} m_3 g \vec{z}_0$$

$$\vec{\mathcal{M}}_E(\vec{F}_{0 \rightarrow 6}) = \vec{0}$$

Ainsi :

$$d_{61} \cos \theta_{96} Y_{96} - h_6 \sin \theta_{96} Y_{96} - L \cos \theta_{60} m_3 g = 0 \Rightarrow Y_{96} = \frac{L \cos \theta_{60\text{moy}} m_3 g}{d_{61} \cos \theta_{96} - h_6 \sin \theta_{96}}$$

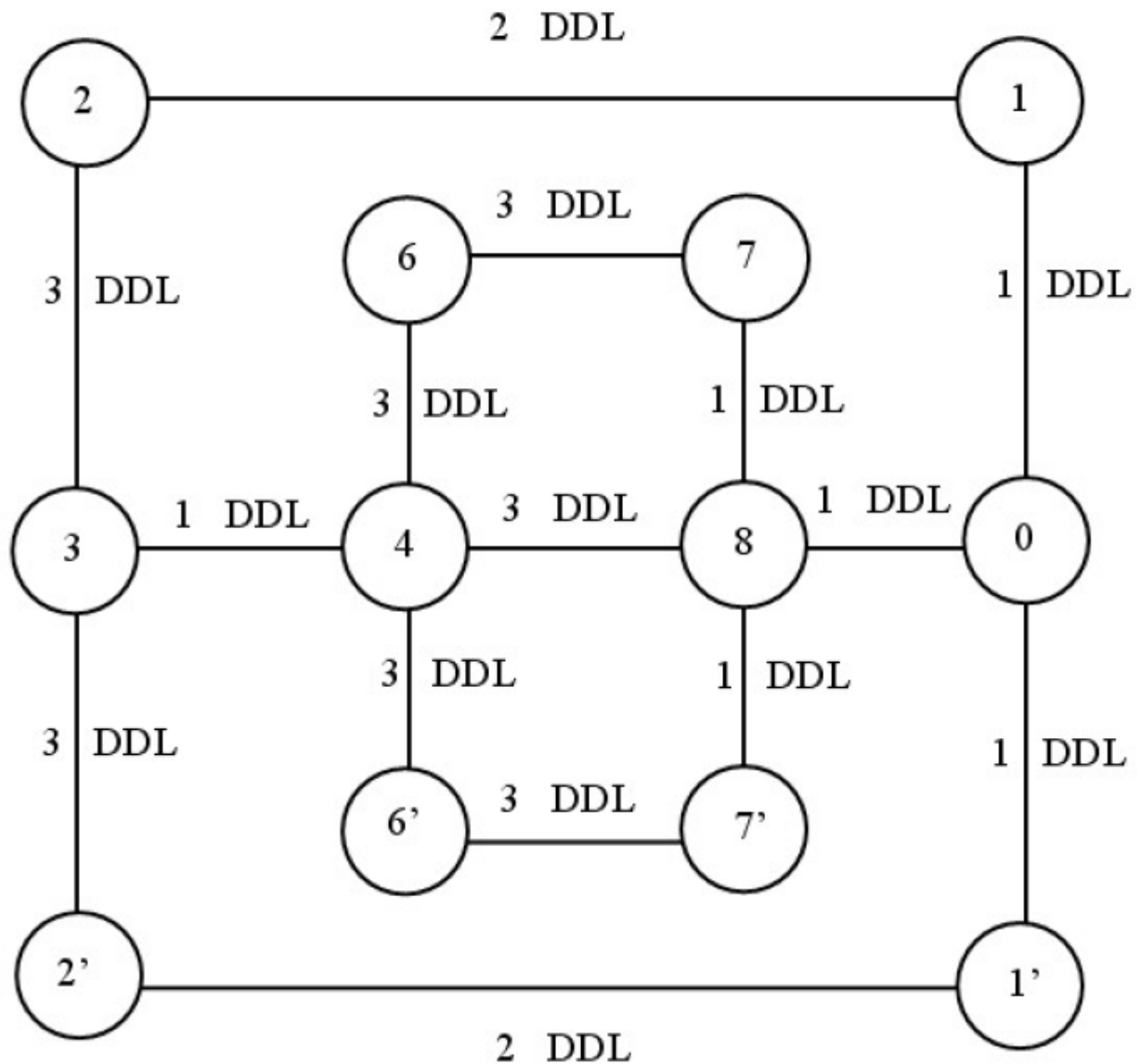
Q 3 : Compte tenu de la masse importante de l'ensemble {cellule du simulateur + pilote}, justifier l'intérêt d'utiliser les deux vérins à gaz du point de vue des couples que doivent fournir les moteurs utilisés au voisinage de la position d'équilibre moyenne. En outre, justifier d'un point de vue énergétique l'intérêt d'avoir choisi des réducteurs irréversibles lorsque le système n'est pas en mouvement.

Les deux vérins compensent l'effet de pesanteur dans une position moyenne, cela permet de soulager les deux moteurs. En position d'équilibre, le système est bloqué par arc-boutement à cause des réducteurs irréversibles. Ce blocage mécanique permet de ne pas consommer inutilement d'énergie électrique pendant une phase de vol de croisière par exemple où la position reste stable. En revanche, cette irréversibilité a un coût énergétique lors des phases de mouvement car cela implique forcément un rendement plus faible dans la transmission.

Exercice 6 : Hélicoptère

5 Corrigé : hélicoptère

Q 1 : En supprimant le solide 5 (en le considérant fixe par rapport au solide 8), construire le graphe de structure du mécanisme présenté figure 18, en faisant apparaître sur chaque arc le nombre de degrés de liberté de la liaison considérée.



Q 2 : Le mécanisme ainsi modélisé est isostatique. Sans calcul, à l'aide de la formule de mobilité, identifier l'indice de mobilité cinématique qui définit le nombre de paramètres indépendants permettant de fixer de manière unique la position de chacune des pièces. Décrire succinctement, les différents mouvements correspondants à l'indice trouvé.

Nombre de liaisons (arc du graphe) : $l = 15$

Nombre de solides (sommet du graphe) : $n = 12$

Nombre de chaînes fermées indépendantes (nombre cyclomatique) : $\gamma = l - n + 1 = 15 - 12 + 1 = 4$

Nombre d'équations de l'étude cinématique : $E_c = 6 \cdot \gamma = 24$

Nombres d'inconnues de l'étude cinématique : $I_c = 2 \cdot (3 + 2 + 1 + 3 + 3 + 1) + 1 + 1 + 3 = 31$

La mobilité cinématique m_c vaut :

$$m_c = I_c - E_c - m_s = 31 - 24 - 0 = 7$$

Mouvements associés :

- rotation de l'axe rotor **8** par rapport au bâti **0** (mouvement principal)
- déplacement de la tige **2** par rapport au corps **1** (loi de commande du 1^{er} vérin)
- déplacement de la tige **2'** par rapport au corps **1'** (loi de commande du 2^{ème} vérin)
- rotation de la tige **2** par rapport au corps **1** (mobilité interne du 1^{er} vérin)
- rotation de la tige **2'** par rapport au corps **1'** (mobilité interne du 2^{ème} vérin)
- rotation de la biellette **6** suivant son axe (mobilité interne)
- rotation de la biellette **6'** suivant son axe (mobilité interne)

Q 3 : Écrire les torseurs cinématiques des différentes liaisons, dans le cadre d'une modélisation plane.

$$\{\mathcal{P}_{1/0}\} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \omega_{1/0} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \{\mathcal{P}_{2/1}\} = \underset{V_M}{\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{2/1} \cdot \vec{y}_1 \end{Bmatrix}} \quad \{\mathcal{P}_{3/2}\} = \underset{F}{\begin{Bmatrix} \omega_{3/2} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \{\mathcal{P}_{0/3}\} = \underset{E}{\begin{Bmatrix} \omega_{0/3} \cdot \vec{z} \\ V_{0/3} \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}}$$

Q 4 : Écrire la fermeture cinématique au point O, pour la position de référence.

On déplace tous les torseurs au point O.

$$\{\mathcal{P}_{1/0}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} \omega_{1/0} \cdot \vec{z} \\ -g \cdot \omega_{1/0} \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}} \quad \{\mathcal{P}_{3/2}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} \omega_{3/2} \cdot \vec{z} \\ \omega_{3/2} \cdot (f \cdot \vec{x} - g \cdot \vec{y}) \end{Bmatrix}} \quad \{\mathcal{P}_{0/3}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} \omega_{0/3} \cdot \vec{z} \\ e \cdot \omega_{0/3} \cdot \vec{x} + V_{0/3} \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}}$$

La fermeture cinématique au point O s'écrit :

$$\{\mathcal{P}_{0/3}\} + \{\mathcal{P}_{3/2}\} + \{\mathcal{P}_{2/1}\} + \{\mathcal{P}_{1/0}\} = \{0\}$$

En projetant résultante et moment au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{array}{lcl} \vec{x} & : & 0 + e \cdot \omega_{0/3} + f \cdot \omega_{3/2} + 0 + 0 = 0 \\ \vec{y} & : & V_{0/3} + 0 - g \cdot \omega_{3/2} + V_{2/1} - g \cdot \omega_{1/0} = 0 \\ \vec{z} & : & 0 + \omega_{0/3} + \omega_{3/2} + 0 + \omega_{1/0} = 0 \end{array}$$

Q 5 : En déduire l'indice de mobilité cinématique, qui définit le nombre de paramètres indépendants permettant de fixer de manière unique la position de chacune des pièces.

Rang du système d'équations de l'étude cinématique : $r_c = 3$

Nombres d'inconnues de l'étude cinématique : $I_c = 5$

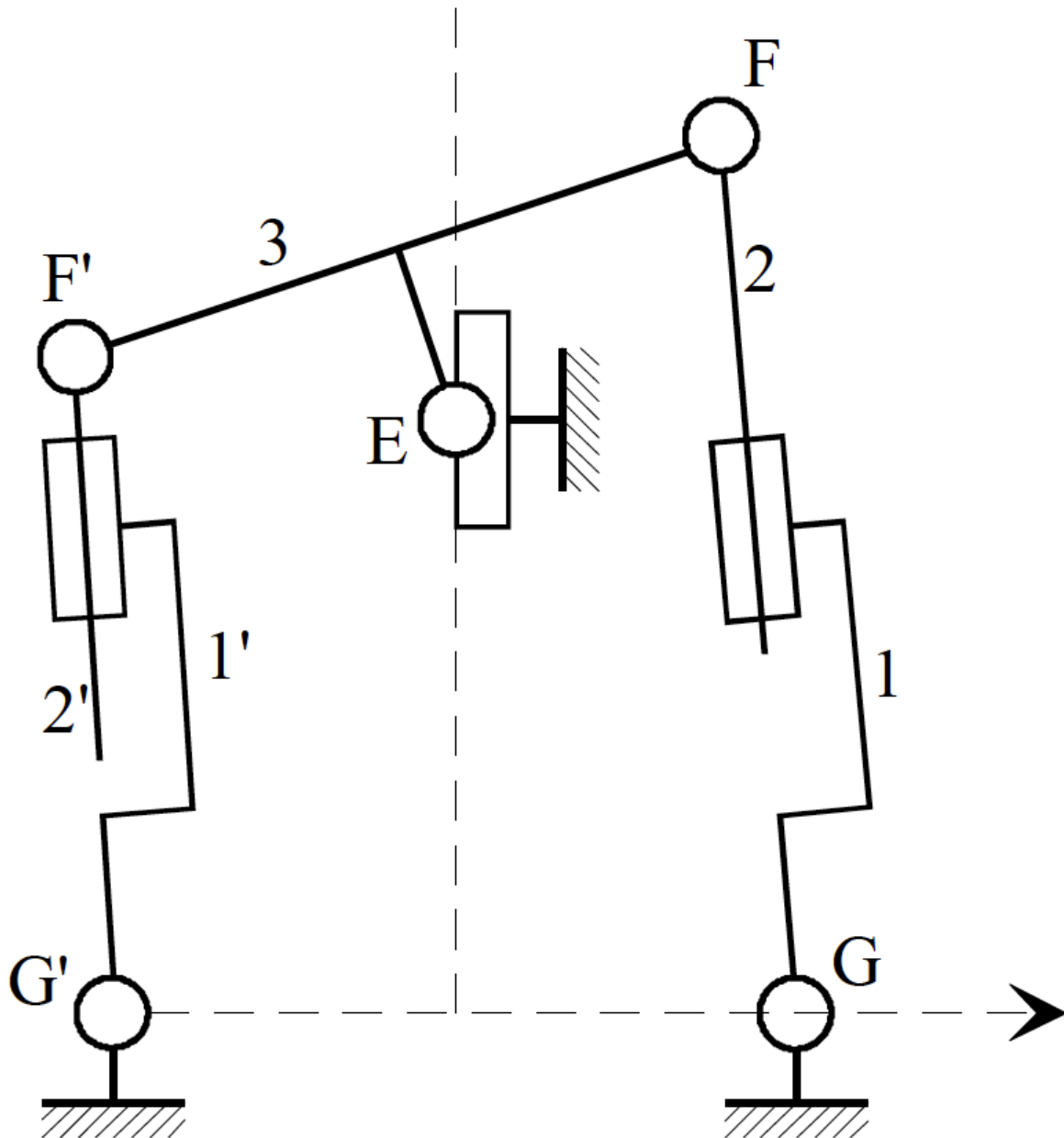
La mobilité cinématique m_c vaut :

$$m_c = I_c - r_c = 5 - 3 = 2$$

Q 6 : Expliquer la nécessité d'utiliser deux vérins.

La mobilité cinématique est égale à 2 donc la seule connaissance de la vitesse de translation de la tige de vérin 2 par rapport au corps 1, ne permet pas d'imposer le mouvement du plateau cyclique non tournant 3.

Q 7 : Construire le schéma cinématique du dispositif avec deux vérins.



Q 8 : Écrire, au point O et pour la position de référence, les fermetures cinématiques du dispositif complet en tenant compte des deux vérins.

La fermeture cinématique de la deuxième chaîne (0, 1', 2', 3, 0) au point O s'écrit :

$$\{\mathcal{P}_{0/3}\} + \{\mathcal{P}_{3/2'}\} + \{\mathcal{P}_{2'/1'}\} + \{\mathcal{P}_{1'/0}\} = \{0\}$$

En projetant résultante et moment au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{array}{lcl} \vec{x} & : & 0 + e.\omega_{0/3} + f.\omega_{3/2'} + 0 + 0 = 0 \\ \vec{y} & : & V_{0/3} + 0 + g.\omega_{3/2'} + V_{2'/1'} + g.\omega_{1'/0} = 0 \\ \vec{z} & : & 0 + \omega_{0/3} + \omega_{3/2'} + 0 + \omega_{1'/0} = 0 \end{array}$$

Q 9 : En déduire l'indice de mobilité du mécanisme complet. Commenter la valeur trouvée.

Rang du système d'équations de l'étude cinématique : $\bar{r}_c = 2*3=6$

Nombres d'inconnues de l'étude cinématique : $I_c = 5 + 3 = 8$

La mobilité cinématique m_c vaut :

$$m_c = I_c - r_c = 8 - 6 = 2$$

Commenter la valeur trouvée.

La mobilité cinématique est égale à 2 donc il faut fixer deux paramètres (par exemple, vitesse de translation de la tige de vérin par rapport au corps, pour les deux vérins) pour imposer le mouvement du plateau cyclique non tournant 3.

Q 10 : On étudie la loi entrée-sortie du point de vue cinématique autour de la position de référence et on fixe :

$$\vec{V}(M \in 2/1) \cdot \vec{y} = +v$$

$$\vec{V}(M \in 2'/1') \cdot \vec{y} = -v$$

Déterminer $\vec{V}(E \in 3/0)$ et $\vec{\Omega}(3/0)$. Quel est le mouvement de 3 par rapport à 0, dans ce cas ?

$$\vec{V}(M \in 2/1) \cdot \vec{y} = v = V_{2/1}$$

$$\vec{V}(M \in 2'/1') \cdot \vec{y} = -v = V_{2'/1'}$$

Déterminer $\vec{V}(E \in 3/0)$ et $\vec{\Omega}_{3/0}$.

En résolvant le système de 6 équations précédent, on trouve :

$$\vec{V}(E \in 3/0) = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \frac{v}{g} \cdot \vec{z}$$

Le mouvement de 3 par rapport à 0 est donc un mouvement de rotation d'axe E $\vec{z}$.

Q 11 : Montrer que l'étude statique est possible dans le cadre d'une modélisation plane.

En notant :

m_c : la mobilité cinématique

I_c : le nombre d'inconnues de l'étude cinématique

E_c : le nombre d'équations de l'étude cinématique

$m_s = I_c - E_c - m_c$ avec $h = |m_s|$: le degré d'hyperstaticité

d'où : $m_s = I_c - E_c - m_c = 8 - 2*3 - 2 = 0$ donc $h=0$

La réalisation est isostatique, on peut donc déterminer toutes les inconnues statiques.

Q 12 : Les pales du rotor principal appliquent par l'intermédiaire de biellettes et du plateau des actions mécaniques sur le solide 3 que l'on modélise par :

$$\{\mathcal{T}_{(ext \rightarrow 3)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ext} = F_x \cdot \vec{x} + F_y \cdot \vec{y} \\ \vec{\mathcal{M}}_{E(ext \rightarrow 3)} = M_E \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$

Déterminer l'effort exercé par chacun des vérins que l'on notera :

$$\{\mathcal{T}_{(fluide \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{T}_{(fluide \rightarrow 2')}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{2'} = F_{2'} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- On isole les solides 1 et 2 :

Bilan des actions mécaniques

- glisseur $_G \{\mathfrak{T}_{0 \rightarrow 1+2}\}$

- glisseur $_F \{\mathfrak{T}_{3 \rightarrow 1+2}\}$

Ensemble 1 et 2 soumis à 2 glisseurs donc : $\vec{F}_{2 \rightarrow 3} \wedge \vec{y} = \vec{0}$ car $\vec{GF} \wedge \vec{y} = \vec{0}$

- De même, on isole les solides 1' et 2', et on montre : $\vec{F}_{2' \rightarrow 3} \wedge \vec{y} = \vec{0}$
- En isolant la tige 2, et en écrivant le théorème de la résultant statique en projection sur $\vec{y}$, on montre :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y} = F_2 \text{ et } \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \wedge \vec{y} = \vec{0} \text{ d'où : } \vec{F}_{2 \rightarrow 3} = F_2 \vec{y}$$

$$_F \{\mathfrak{T}_{2 \rightarrow 3}\} = _F \{\mathfrak{T}_{fluide \rightarrow 2}\}$$

- De même en isolant la tige 2', et en écrivant le théorème de la résultant statique en projection sur $\vec{y}$, on montre :

$$_{F'} \{\mathfrak{T}_{2' \rightarrow 3}\} = _{F'} \{\mathfrak{T}_{fluide \rightarrow 2'}\}$$

- On isole le solide 3 :

Bilan des actions mécaniques

- $_E \{\mathfrak{T}_{ext \rightarrow 3}\}$

- glisseur $_F \{\mathfrak{T}_{2 \rightarrow 3}\} = _F \{\mathfrak{T}_{fluide \rightarrow 2}\}$

- glisseur $_{F'} \{\mathfrak{T}_{2' \rightarrow 3}\} = _{F'} \{\mathfrak{T}_{fluide \rightarrow 2'}\}$

- $\{\mathfrak{T}_{0 \rightarrow 3}\}$ avec $\vec{F}_{0 \rightarrow 3} \cdot \vec{y} = 0$ car $L_{0/3}$: linéaire annulaire d'axe $E \vec{y}$.

avec $\vec{M}_{E,0 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = 0$

En écrivant le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{y}$:

$$(E_1) : F_2 + F_{2'} + F_y = 0$$

En écrivant le théorème du moment statique au point E en projection sur $\vec{z}$:

$$(E_2) : g.F_2 - g.F_{2'} + M_E = 0$$

En résolvant les deux équations notées (E₁) et (E₂), on détermine F_2 et $F_{2'}$:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left[-F_y - \frac{M_E}{g} \right] \\ F_{2'} &= \frac{1}{2} \cdot \left[-F_y + \frac{M_E}{g} \right] \end{aligned}$$

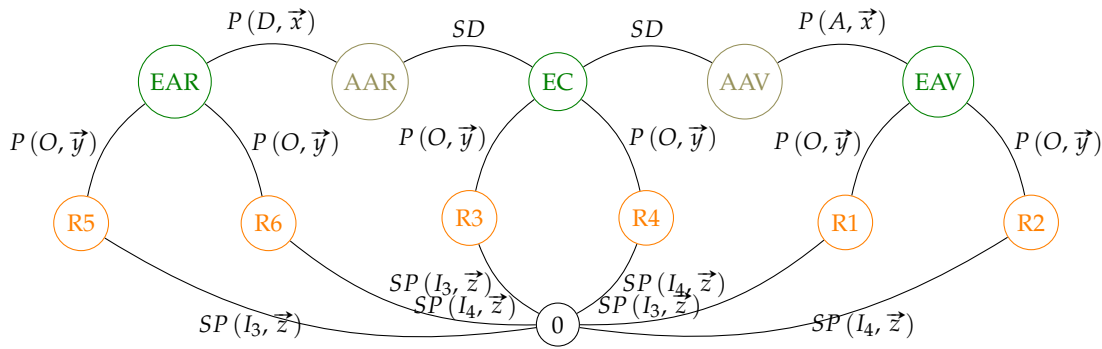
Exercice 7 : ROBOVOLC

6 Robovolc

Cor. 1 : Caractérisation du châssis du Robovolc

Sujet page 1

Q1. Tracer le graphe de structure du système



Q2. Déterminer le nombre d'inconnues cinématiques, le nombre cyclomatique, puis le nombre d'équations à écrire. Conclure

$$\gamma = L - N + 1$$

$$\gamma = 16 - 11 + 1 = 5$$

soit

$$E_c = 6 \times 5 = 30$$

$$I_c = 6 \times SP + 6 \times P + 2 \times SD + 2 \times P$$

$$I_c = 6 \times 5 + 6 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 1$$

$$I_c = 42$$

Si le système est isostatique, alors le mécanisme possède $m = 12$ mobilités.

Q3. Déterminer le nombre d'inconnues de liaison, Préciser le nombre d'équations d'équilibre que l'on peut écrire.

$$I_s = 6 \times SP + 6 \times P + 2 \times SD + 2 \times P$$

$$I_s = 6 + 30 + 8 + 10$$

$$I_s = 54 \text{ inconnues}$$

Il est comporte 12 solides soit

$$E_s = (12 - 1) \times 6 = 66 \text{ équations}$$

Le rang du système ne peut dépasser $r_s \leq \min(E_s, I - s) = 54$. Il y a donc 12 équations supplémentaires.

Ce résultat est cohérent avec le précédent mais ne suffit pas pour dire que le degré de mobilité est de 12 et que le système est isostatique. Il est nécessaire de vérifier que toutes les inconnues de liaison sont calculables.

On isole la roue R_i . On note C_i le centre de la liaison pivot et I_i le point de contact avec le sol (avec $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

On note

- $\vec{P}_{AV} = -P_{AV} \cdot \vec{z}$ le poids de la partie avant que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre AAV
- $\vec{P}_{AR} = -P_{AR} \cdot \vec{z}$ le poids de la partie arrière que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre AAR
- $\vec{P}_C = -P_C \cdot \vec{z}$ le poids de la partie centrale que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre EC en O.

Les couples moteurs sont nuls.

Q4. Écrire le système d'équation relatif à l'équilibre de la roue R_i . Conclure

Compte tenu des hypothèses, la roue est soumise à deux actions de liaisons, l'équilibre s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow R_i}\} + \{\mathcal{A}_{Ex \rightarrow R_i}\} = \{0\}$$

Avec $Ex \in \{EAV, EC, EAR\}$.

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{0i} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (I_{li}, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}} + \begin{Bmatrix} X_{xi} & L_{xi} \\ Y_{xi} & 0 \\ Z_{xi} & N_{xi} \end{Bmatrix}_{\substack{C_i \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}} = \{0\}$$

d'où les 6 équations de l'équilibre

$$\begin{cases} X_{xi} = 0 \\ Y_{xi} = 0 \\ Z_{0i} + Z_{xi} = 0 \\ L_{xi} = 0 \\ 0 = 0 \\ N_{xi} = 0 \end{cases}$$

Cet équilibre permet de déterminer 4 inconnues de liaisons, il ne reste par équilibre qu'une seule inconnue à préciser (Z_{xi}).

On constate aussi une équation supplémentaire, ($0 = 0$), cet équilibre caractérise une mobilité, ici, la rotation de la roue par rapport à l'arbre.

L'équilibre des six roues étant identiques. un premier bilan permet de dire que

- $6 \times 4 = 24$ inconnues sont déterminables
- il reste $6 \times 1 = 6$ inconnues à déterminer
- il y a 6 mobilités

On isole maintenant l'essieu avant (respectivement l'essieu arrière)

Q5. Écrire les équations de l'équilibre.

L'arbre avant est soumis à 3 actions de liaison.

$$\{\mathcal{A}_{AV \rightarrow EV}\} + \{\mathcal{A}_{R_1 \rightarrow EV}\} + \{\mathcal{A}_{R_2 \rightarrow EV}\} = \{0\}$$

Les deux torseurs $\{\mathcal{A}_{R_1 \rightarrow EV}\}$ et $\{\mathcal{A}_{R_2 \rightarrow EV}\}$ ont été déterminés au dessus

$$\{\mathcal{A}_{R_1 \rightarrow EV}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1EV} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C_1 \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}} \text{ et } \{\mathcal{A}_{R_2 \rightarrow EV}\} =$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{2EV} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^{C_2}$$

On choisit d'écrire l'équilibre en A.

$$\begin{Bmatrix} X_{AEV} & 0 \\ Y_{AEV} & M_{AEV} \\ Z_{AEV} & N_{AEV} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^A + \begin{Bmatrix} 0 & e \cdot Z_{1EV} \\ 0 & 0 \\ Z_{1EV} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^A + \begin{Bmatrix} 0 & -e \cdot Z_{2EV} \\ 0 & 0 \\ Z_{2EV} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^A = \{0\}$$

On déduit de cet équilibre :

$$\begin{cases} X_{AEV} = 0 \\ Y_{AEV} = 0 \\ Z_{AEV} + Z_{1EV} + Z_{2EV} = 0 \\ e \cdot Z_{1EV} - e \cdot Z_{2EV} = 0 \\ M_{AEV} = 0 \\ N_{AEV} = 0 \end{cases}$$

On déduit $Z_{1EV} = Z_{2EV} = -\frac{1}{2}Z_{AEV}$ et les 4 autres composantes sont nulles. Cet équilibre n'a pas d'équation supplémentaire, il n'y a donc pas de mobilité.

À partir de l'équilibre des deux essieux avant et arrière et des 6 roues, on détermine donc

- $24 + 2 \times 4 = 32$ inconnues de liaison,
- il subsiste 2 inconnues à déterminer Z_{AEV} et Z_{AER} les deux composantes sur $\vec{z}$ dans les deux liaison pivot.
- et toujours $m = 6$

On isole maintenant l'arbre avant AAV (respectivement l'arbre arrière AAR).

Q6. Écrire les équations de l'équilibre.

Il est soumis à deux actions de liaison et à l'action de la gravité.

$$\{\mathcal{A}_{EC \rightarrow AAV}\} + \{\mathcal{A}_{AV \rightarrow AAV}\} + \{\mathcal{P}_{g \rightarrow AAV}\} = \{0\}$$

On choisit d'écrire l'équilibre en B.

$$\begin{Bmatrix} X_{CV} & 0 \\ Y_{CV} & 0 \\ Z_{CV} & N_{CV} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (a-b) \cdot Z_{AEV} \\ Z_{AER} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a-b}{2} \cdot P_{AV} \\ -P_{AV} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^B = \{0\}$$

On déduit de cet équilibre :

$$\begin{cases} X_{CV} = 0 \\ Y_{CV} = 0 \\ Z_{CV} + Z_{AEV} - P_{AV} = 0 \\ 0 = 0 \\ (a-b) \cdot Z_{AEV} - \frac{a-b}{2} \cdot P_{AV} = 0 \\ N_{CV} = 0 \end{cases}$$

On note pour cet équilibre que toute les actions sont déterminables avec $Z_{CV} = Z_{AEV} = \frac{1}{2}P_{AV}$ et les autres composantes nulles

On note aussi que la présence d'une équation supplémentaire, elle caractérise la rotation de l'arbre AAV autour de l'axe $(B, \vec{x})$.

Q7. Terminons, en écrivant le dernier équilibre sur EC.

Le dernier solides est soumis a cinq glisseurs parallèles :

$$\{\mathcal{A}_{AAV \rightarrow EC}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}P_{AV} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^B, \quad \{\mathcal{A}_{AAR \rightarrow EC}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}P_{AR} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^C,$$

$$\{\mathcal{A}_{R_3 \rightarrow EC}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{3c} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^{C_3},$$

$$\{\mathcal{A}_{R_4 \rightarrow EC}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{4c} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^{C_4},$$

$$\{\mathcal{P}_{g \rightarrow EC}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_C & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^O.$$

L'équilibre en O donne :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{1}{2}P_{AV} - \frac{1}{2}P_{AR} + Z_{3c} + Z_{4c} - P_C = 0 \\ e \cdot Z_{3c} - e \cdot Z_{4c} = 0 \\ b \cdot \frac{1}{2}P_{AV} - b \cdot \frac{1}{2}P_{AR} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières inconnues de liaison sont déterminées $Z_{3c} = Z_{4c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}P_{AV} + \frac{1}{2}P_{AR} + P_C \right)$

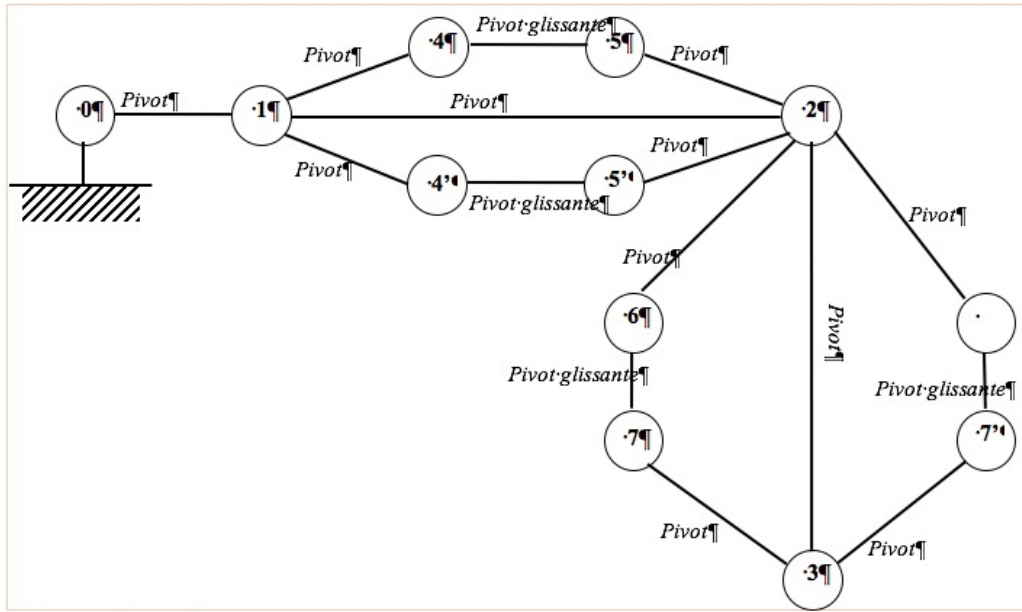
ON trouve aussi 3 équations nulles et une équations entre des actions extérieures, ce qui nous donne 4 nouvelles mobilités

- les translations de l'ensemble suivant $\vec{x}$ et $\vec{z}$,
- une rotation de l'ensemble autour de $(O, \vec{z})$,
- la rotation de EC autour de $(O, \vec{y})$.

On a bien identifié les douze mobilités et vérifié que le système est isostatique

Exercice 8 : Echelle pivotante automatique

Q 13 : Tracer le graphe des liaisons.



Q 14 : Déterminer le degré d'hyperstaticité du mécanisme.

$$h = m_u + m_i + 6\gamma - N_c$$

Le mécanisme comporte :

- 4 boucles indépendantes : $\gamma = 4$
- 19 inconnues cinématiques : 11 pivots + 4 pivots glissants : $N_c = 11 + 4 \times 2$
- Pas de mobilités internes et 3 mobilités utiles : $m_i = 0$ les mobilités des liaisons pivots (0-1), (1-2) et (2-3), $m_u = 3$

D'où un degré d'hyperstatisme : $h = 3 + 0 + 6 \times 4 - 19$, soit

$$h = 8$$

Q 15 : Proposez des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.

Isostatisme :

On change les pivots situés aux extrémités des vérins (pivots glissants) par des sphériques, soient les liaisons (1-4), (1-4'), (2-5), (2-5'), (2-6), (2-6'), (3-7) et (3-7').

Le mécanisme comporte désormais :

- Toujours 4 boucles indépendantes : $\gamma = 4$
- 35 inconnues cinématiques : 3 pivots + 4 pivots glissants et 8 sphériques : $N_c = 3 + 4 \times 2 + 8 \times 3 = 35$
- Toujours 3 mobilités utiles : les mobilités des liaisons pivots (0-1), (1-2) et (2-3), $m_u = 3$, mais des mobilités internes : rotation du corps et de la tige autour de leur axe (2 mobilités internes) pour chacun des 4 vérins : $m_i = 4 \times 2 = 8$

D'où un degré d'hyperstatisme : $h = 3 + 8 + 6 \times 4 - 35$, soit $h = 0$, le mécanisme est bien isostatique.

On peut aussi remplacer ces mêmes liaisons par des sphériques à doigts (la rotation éliminée sera celle de la mobilité interne de la solution à sphérique), ainsi il n'y aura pas de mobilité interne.