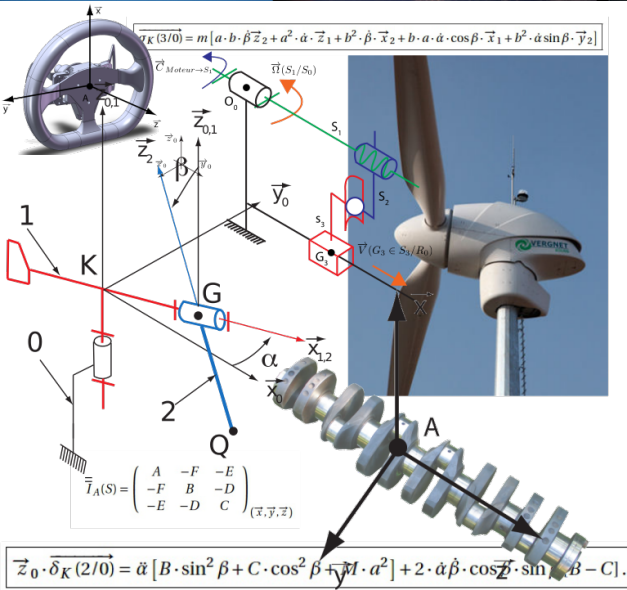
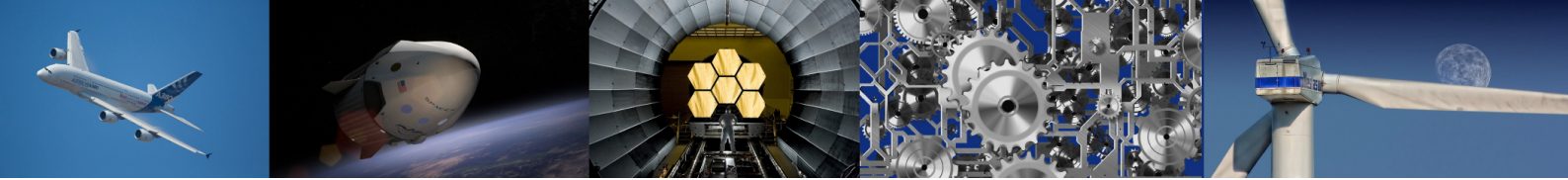




LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C4 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES DYNAMIQUES DES SYSTÈMES

TD 11 - Cinétique des solides (C4-3)

Compétences

- **Analyser**
 - Analyser les performances et les écarts
- **Modéliser**
 - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
 - Modéliser une action mécanique.
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
 - Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
 - Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.
 - Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations.
- **Expérimenter**
 - Choisir le protocole en fonction de l'objectif visé.
 - Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix.
- **Communiquer**
 - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.

Exercice 1 : Véhicule à trois roues Clever

Source : PT SIA 2013

1 Présentation

Le Clever (Compact Low Emission VEHiclefor uRban tRansportation), présenté sur la Figure 1, est un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens dont BMW, l'Institut Français du Pétrole (IFP) et de nombreux équipementiers. Sa conception a pour objectif de développer des solutions de transport à faible consommation énergétique.

L'objectif de cette étude se concentre sur les exigences "Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol" et "S'insérer facilement dans le trafic" détaillées dans le diagramme d'exigence sur la figure 2.

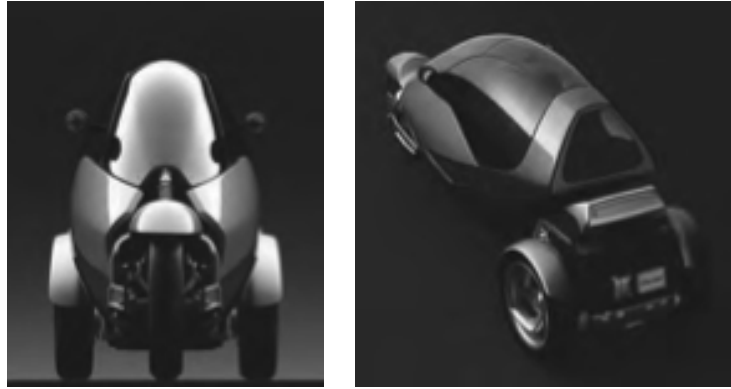


FIGURE 1 – Véhicule à trois roues Clever

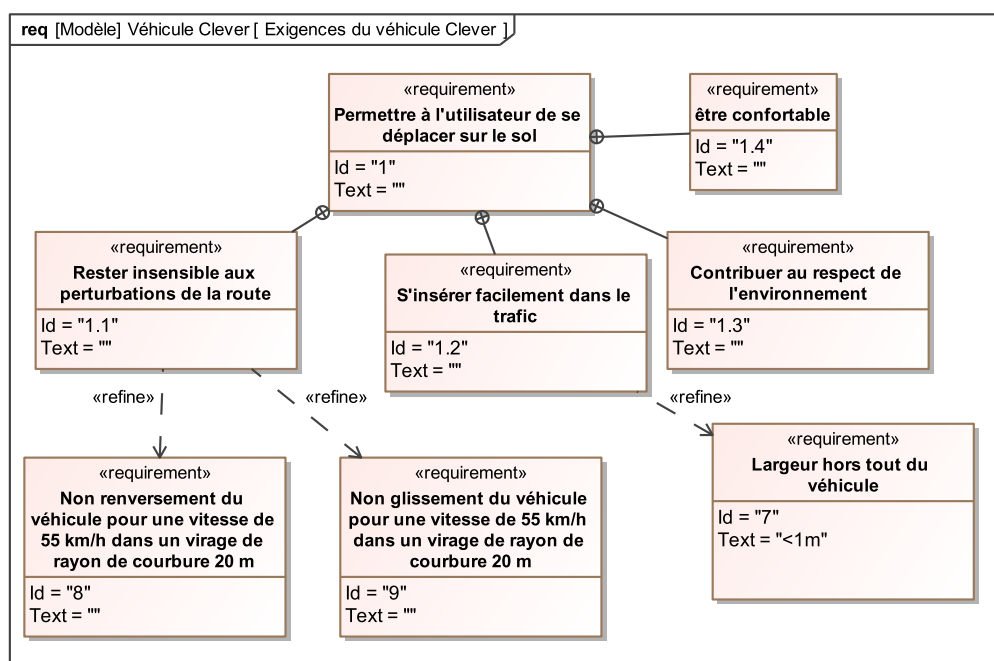


FIGURE 2 – Diagramme des exigences partiel du véhicule à trois roues Clever

2 Condition de non renversement et d'adhérence

Le mécanisme d'inclinaison peut être décrit globalement par la figure 3. Le groupe motopropulseur, comportant entre autres le moteur et les roues arrière, reste en permanence perpendiculaire au sol. La partie avant, constituée de l'habitacle et de la roue avant, peut au contraire s'incliner dans les virages grâce à un mécanisme hydraulique qui sera étudié ultérieurement dans le sujet. Les deux parties du Clever sont reliées par une liaison pivot d'axe parallèle au sol, schématisée sur la Figure I.1.

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse pas dans un premier temps à la roue avant, ce qui permet de se ramener au système schématisé sur la figure 5. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- La route R est munie du repère $R_g = (O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$. Le référentiel associé est supposé galiléen.
- Le groupe motopropulseur 0 est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O . Le rayon de courbure de la trajectoire du point C dans R_g est R_c . Le repère lié à 0 est $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_g$ et on note $\theta = (\vec{x}_g, \vec{x}_0) = (\vec{y}_g, \vec{y}_0)$. On a donc $\vec{OC} = R_c \cdot \vec{x}_0$. On remarquera bien que R_0 est mobile par rapport à R_g .
- L'habitacle 1 est liée au groupe 0 par une liaison pivot d'axe $(C, \vec{y}_0)$. Le repère lié à 1 ($R_1 = (C, \vec{x}_0, \vec{y}_{0,1}, \vec{z}_0)$) est tel que $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. On note $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle d'inclinaison du système pendulaire. Le centre

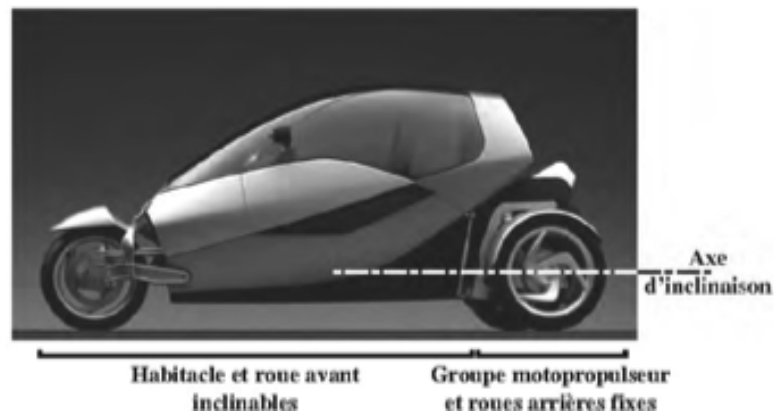


FIGURE 3 – Présentation du mécanisme d'inclinaison

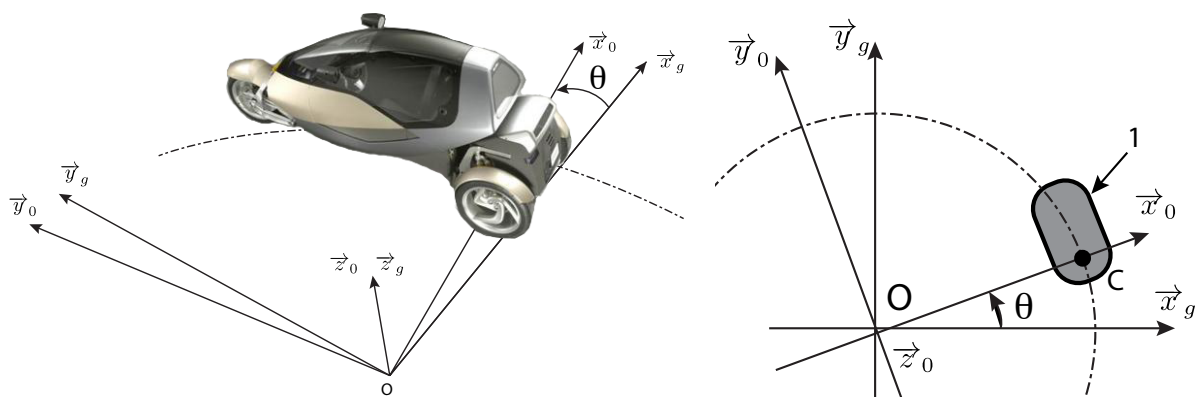


FIGURE 4 – Paramétrage du virage

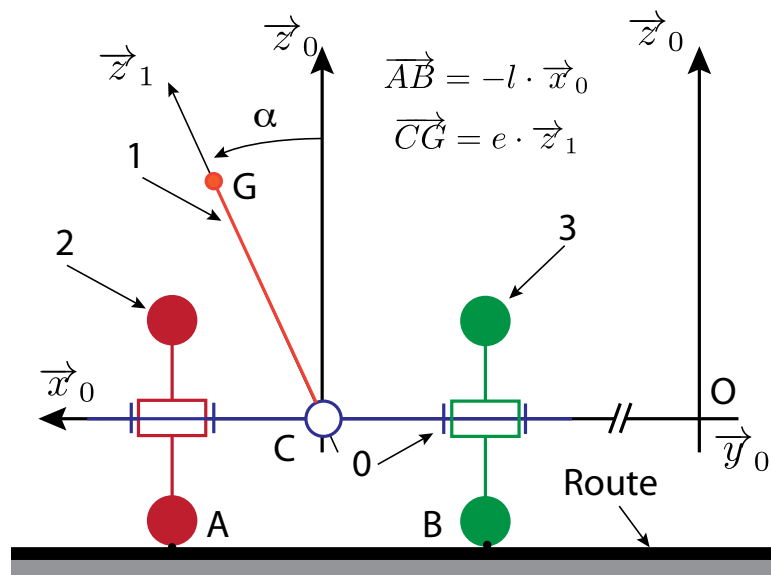


FIGURE 5 – Paramétrage du véhicule dans le virage

de gravité de 1 est G tel que $\vec{CG} = e \cdot \vec{z}_1$ et sa masse est m . On note $\bar{I}_G(1)$ son opérateur d'inertie en G :

$$\vec{I}_G(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

- Les roues arrière 2 et 3 sont liées au groupe 0 par des liaisons pivots d'axe $(C, \vec{x}_0)$.
- Les contacts entre les roues 2 et 3 et la route R ont lieu en A et B définis par $\vec{CA} = \frac{l}{2} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \vec{z}_0$ et $\vec{CB} = -\frac{l}{2} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \vec{z}_0$, r désignant le rayon des roues et l la voie arrière du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale $\vec{z}_0$. Le contact dans ces liaisons se fait avec frottement et le coefficient de frottement est noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route R sur les roues 2 et 3 sont modélisées dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ par des glisseurs en A et B de résultantes $\vec{F}(R \rightarrow 2) = T_A \cdot \vec{x}_0 + N_A \cdot \vec{z}_0$ et $\vec{F}(R \rightarrow 3) = T_B \cdot \vec{x}_0 + N_B \cdot \vec{z}_0$.

Dans les questions qui suivent, mises à part les liaisons entre R et 2 et entre R et 3, pour lesquelles le frottement est pris en compte, toutes les liaisons sont considérées parfaites. En outre, on négligera la masse des pièces 0, 2 et 3 devant celle de l'habitacle 1. On note $E = \{0 + 1 + 2 + 3\}$. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$.

On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C, ainsi que la vitesse V de ce point par rapport au référentiel R_g sont constants. L'angle d'inclinaison α du système pendulaire est lui aussi supposé constant.

Q 1 : Exprimer la vitesse, notée $\vec{V}(G/R_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à R_g en fonction de V , e , R_C et α .

Q 2 : Exprimer l'accélération, notée $\vec{a}(G/R_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à R_g en fonction de V , e , R_C et α .

Q 3 : En rappelant que le rayon R_C , la vitesse V et l'angle α sont supposés constants, calculer le moment dynamique en G, noté $\vec{\delta}_G(E/R_g)$, de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_g .

Q 4 : Simplifier son expression en supposant que $C_1 - A_1$ est négligeable. Interpréter cette condition ?

Q 5 : En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_g , écrire les trois équations scalaires qui lient les actions mécaniques de contact entre le sol et les roues T_A , N_A , T_B et N_B aux données du problème.

Q 6 : Dédire de ces trois relations l'expression des efforts normaux N_A et N_B en fonction de m , l , r , e , g et R_C , α , V . Tous les autres paramètres étant fixés, une augmentation de la vitesse V risque-t-elle de susciter un décollement de la roue intérieure ou de la roue extérieure au virage ?

Q 7 : Dédire de la question précédente la condition de non renversement, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport V^2/R_C aux paramètres l , r , e , g et α , R_C .

Q 8 : Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f . En utilisant les équations qui avaient été montrées précédemment et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, en déduire la condition d'adhérence, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport V^2/R_C aux paramètres e , f , g et α , R_C .

3 Cas d'un véhicule sans architecture pendulaire

Afin de montrer l'intérêt de l'architecture pendulaire comme solution technique à l'exigence « S'insérer facilement dans la circulation », on imagine maintenant que le véhicule Clever n'en est pas équipé, ce qui se traduit par la condition $\alpha = 0$.

Q 9 : Réécrire les conditions d'adhérence et de non renversement dans ce cas particulier.

On se propose d'étudier la configuration suivante :

- rayon d'une roue, $r = 30\text{ cm}$;
- position du centre de gravité, $e = 50\text{ cm}$;
- accélération de la pesanteur, $g = 9,81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- coefficient d'adhérence pneu-route, $f = 0,8$.

Q 10 : Calculer la valeur de la voie arrière du véhicule (largeur l entre les roues arrières) en dessous de laquelle le phénomène limitant la vitesse à laquelle on peut prendre un virage est le risque de renversement et non celui de dérapage. En déduire quel est le phénomène limitant dans le cas d'une voiture traditionnelle (voie de l'ordre de $1,5\text{ m}$) et dans le cas d'un véhicule étroit comme le Clever (voie égale à $0,9\text{ m}$) ?

Q 11 : Calculer la valeur de la vitesse maximale V à laquelle il est possible de prendre un virage de rayon de courbure $R_C = 20\text{ m}$ avec un véhicule étroit de voie $l = 0,9\text{ m}$ si celui-ci n'est pas inclinable. On exprimera cette vitesse en km/h . Celle-ci est-elle compatible avec la norme qui prescrit de pouvoir rouler à 55 km/h dans un virage de rayon de courbure 20 m ?

4 Cas d'un véhicule à architecture pendulaire

On considère maintenant l'architecture pendulaire. L'angle α peut varier dans la plage $[-45^\circ, 45^\circ]$.

Q 12 : Commenter le signe de l'angle α pour contribuer au non renversement du Clever dans la configuration des figures 4 et 5 (virage à gauche). Le véhicule doit-il s'incliner vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la trajectoire (comme c'est le cas sur la figure 5) ?

Le graphique de la figure 6, représente, en fonction de l'angle d'inclinaison α et dans la configuration précédente (même géométrie et rayon de courbure $R_c = 20m$), l'évolution de vitesse maximale V en dessous de laquelle il n'y a pas renversement.

Q 13 : En utilisant la figure 6, déterminer l'angle d'inclinaison α qu'il faut imposer à l'habitacle pour respecter la norme.

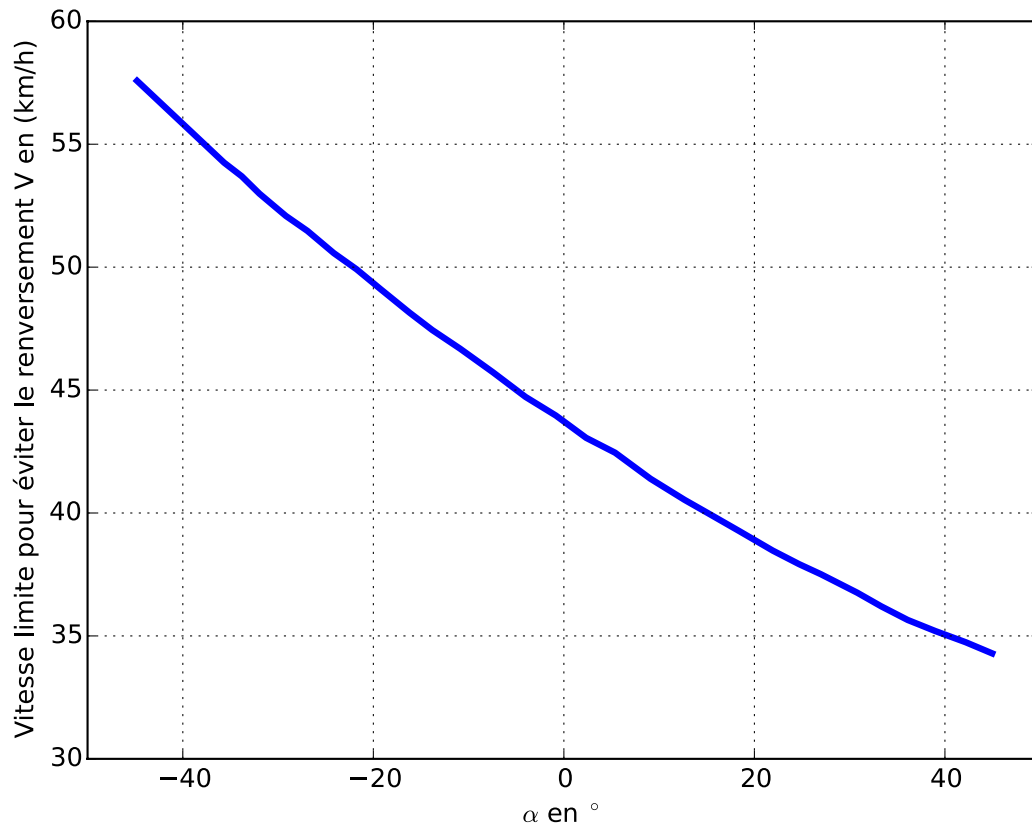


FIGURE 6 – Représentation graphique de la condition de non renversement

Exercice 2 : Modélisation d'une éolienne

Source : Emilien DURIF

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous. Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides :

- un support O, auquel on associe un repère $R_0 = (K, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette 1 (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support 0 :
 - on lui associe un repère $R_1 = (K, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
 - on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $(K, \vec{z}_1)$: $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$.
- une hélice 2, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec le support 2 :
 - on lui associe un repère $R_2 = (K, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.
 - On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\vec{KG} = a \vec{x}_1$

- On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\bar{\bar{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle m au point Q. On pose $\vec{GQ} = -b\vec{z}_2$.

Les paramétrages géométrique et cinématique sont repris sur la figure ci-après. L'objectif de l'exercice est de mettre en place les expressions utiles à une étude dynamique ultérieure. **Q 14 : Déterminer la composante suivant $\vec{z}_0$ du moment cinétique de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_K(1/0)$.**

Q 15 : Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_K(2/0)$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Q 16 : Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_K(3/0)$.

Q 17 : Déterminer la composante suivant $\vec{z}_0$ du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_K(1/0)$.

Q 18 : Déterminer la composante suivant $\vec{z}_0$ du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_K(2/0)$.

Q 19 : Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\vec{z}_0$: $\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_K(3/0)$.

Q 20 : Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expriment du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour "contrer" les effets dynamiques du balourd.

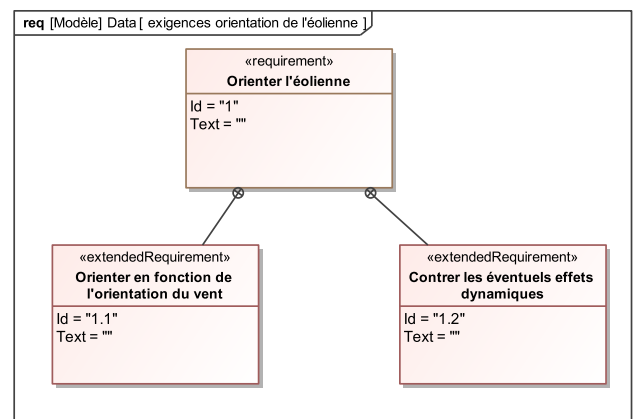


FIGURE 7 – Dimensionnement d'une éolienne

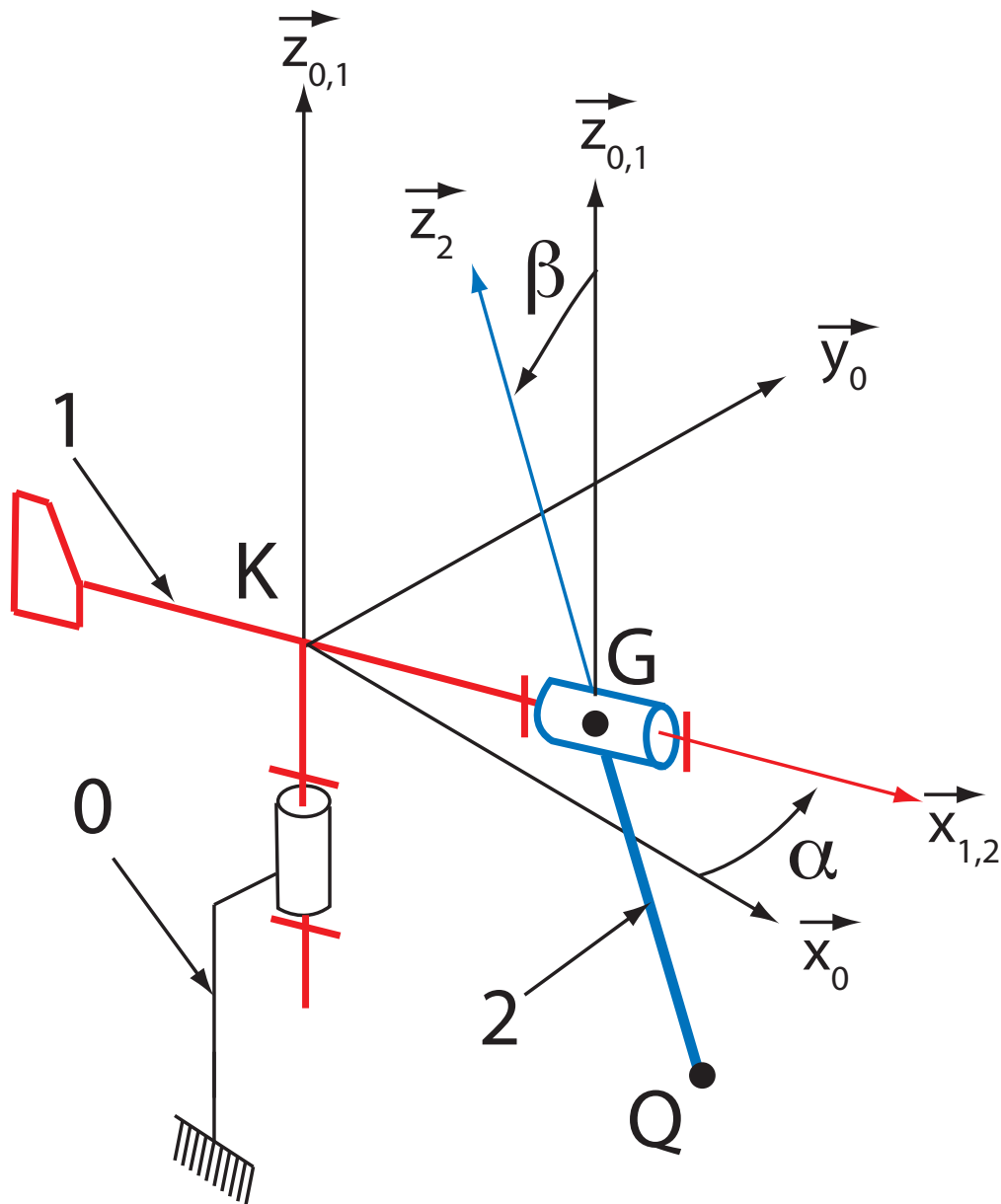


FIGURE 8 – Paramétrage de l'éolienne

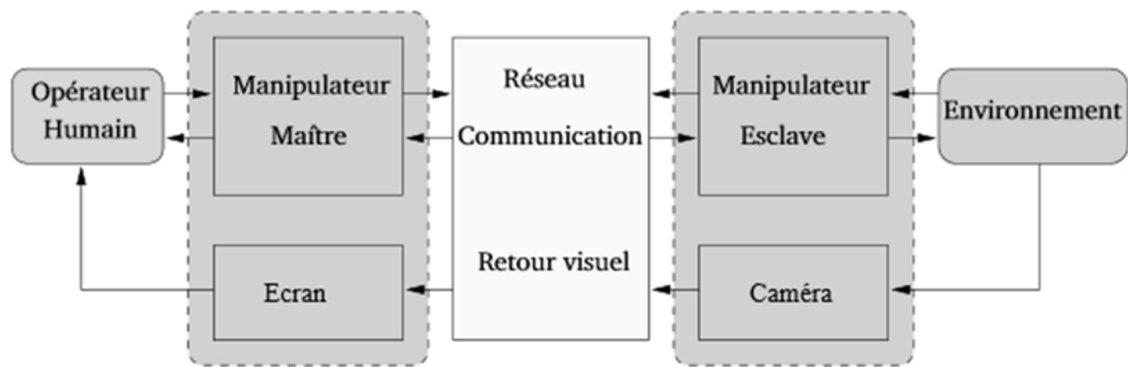
Exercice 3 : Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

Source : CCP PSI 2015

1 Présentation

La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.

Le cas d'utilisation étudié dans ce sujet est la téléopération sur organe mobile. Lors d'une opération, les organes



sont soumis à des mouvements induits notamment par la respiration et les battements cardiaques. Lorsque le champ visuel est réduit, ces mouvements apportent une gêne au praticien qui doit les compenser manuellement. De plus il est montré qu'il est préférable d'utiliser des systèmes à interfaces haptiques¹.

2 Modélisation interne du système

Le mécanisme de HOEKEN choisi pour l'interface maître réalise une bonne approximation de la trajectoire rectiligne mais ne permet pas une orientation constante du solide en mouvement. Cette solution n'est donc pas la plus appropriée pour mesurer (à l'aide d'un capteur) l'effort exercé par l'organe terminal.

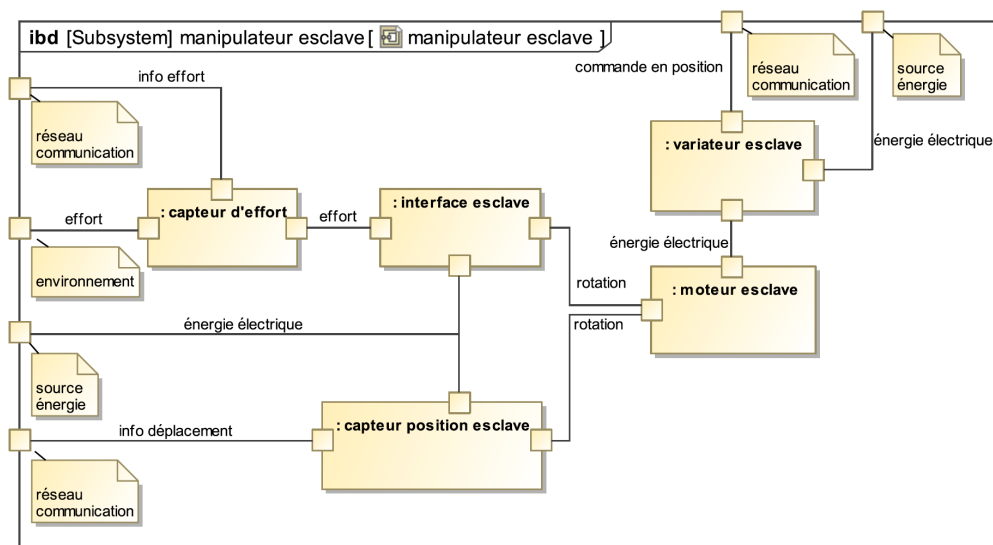


FIGURE 9 – Diagramme de blocs internes du manipulateur esclave

Le manipulateur esclave est constitué de :

- une **interface** permettant de transformer le mouvement de rotation imposé par le moteur en mouvement de translation rectiligne;
- un **moteur rotatif** pour générer le mouvement;
- un **variateur analogique** permettant de commander le moteur;
- un **capteur de position** (codeur incrémental) pour mesurer le déplacement de l'organe terminal;
- un **capteur d'effort** pour mesurer l'effort exercé par l'organe terminal sur l'environnement.

1. Le terme haptique est utilisé pour désigner le retour d'effort au sens kinesthésique mais également au sens tactile

3 Modélisation de l'interface esclave

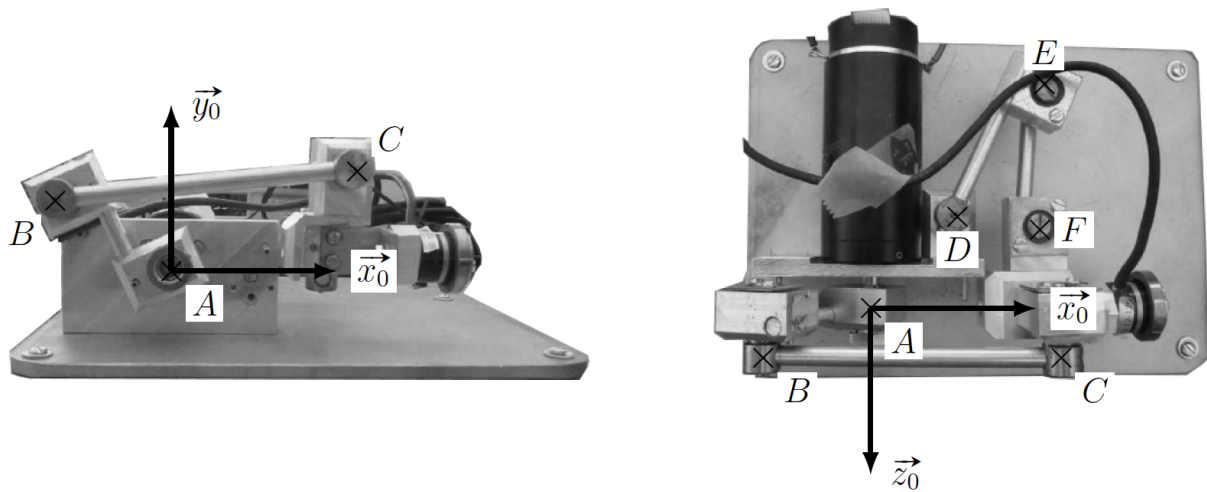


FIGURE 10 – Interface esclave

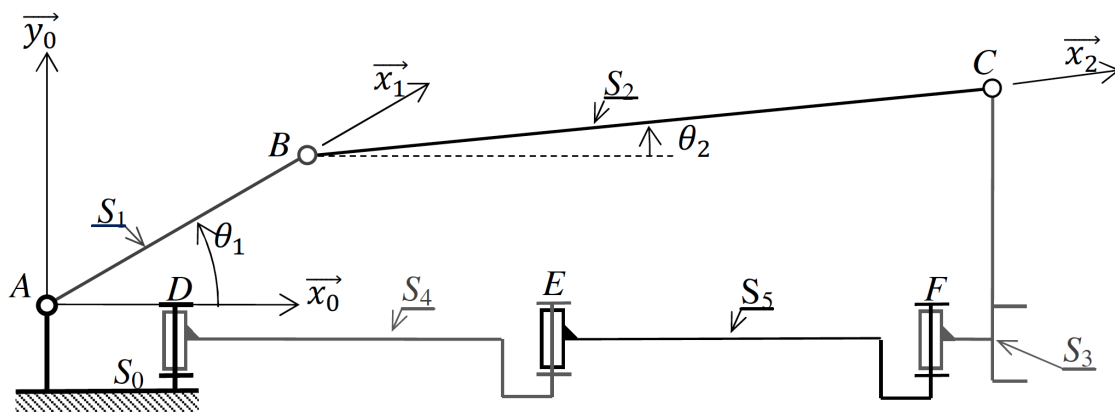


FIGURE 11 – Modélisation cinématique

Objectif : Modéliser le comportement dynamique de l'interface esclave de façon à évaluer son comportement au sein d'une boucle d'asservissement.

On note

•

$$\{\mathcal{T}_{(moteur \rightarrow S_1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{Bmatrix}_{B_0}$$

l'expression, dans la base B_0 du torseur de l'action mécanique exercée par le moteur sur le solide S_1 .

- L'accélération de la pesanteur sera représentée par le vecteur $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$.

Q 21 : Tracer le graphe des liaisons du dispositif esclave.

Q 22 : Montrer que le mouvement de S_3/S_0 ne peut être qu'une translation de direction $\vec{x}_0$.

Q 23 : Isoler l'ensemble des solides (sans le bâti) et appliquer le théorème du moment dynamique selon $(A, \vec{z}_0)$.

Solide	Repère associé	Paramétrage géométrique	Paramétrage dynamique
S_0 (Bâti)	$R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$		
S_1 (Barre AB + rotor du moteur)	$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$	$\vec{AB} = L_1 \cdot \vec{x}_1$ avec $L_1 = 35 \text{ mm}$ $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$	Inertie équivalente ramenée à l'axe $(A, \vec{z}_0)$ $I_1 = 5,7 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ Frottement fluide entre rotor et stator : $f_v = 1,6 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ Masse négligée
S_2 (Barre BC)	$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$	$\vec{BC} = L_2 \cdot \vec{x}_2$ avec $L_2 = 62,5 \text{ mm}$ $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$	Masse et inertie négligées
S_3 (Organe terminal)	$R_3(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$	$\vec{AC} = L_3 \cdot \vec{x}_0 + x_s(t) \cdot \vec{x}_0$ Avec $L_3 = 25 \text{ mm}$	Masse : $M_3 = 0,1 \text{ kg}$
S_4 (barre DE)		$\vec{AD} = L_4 \cdot \vec{x}_0$	Masse et inertie négligées
S_5 (barre EF)			Masse et inertie négligées

TABLE 1 – Paramétrage de l'interface maître