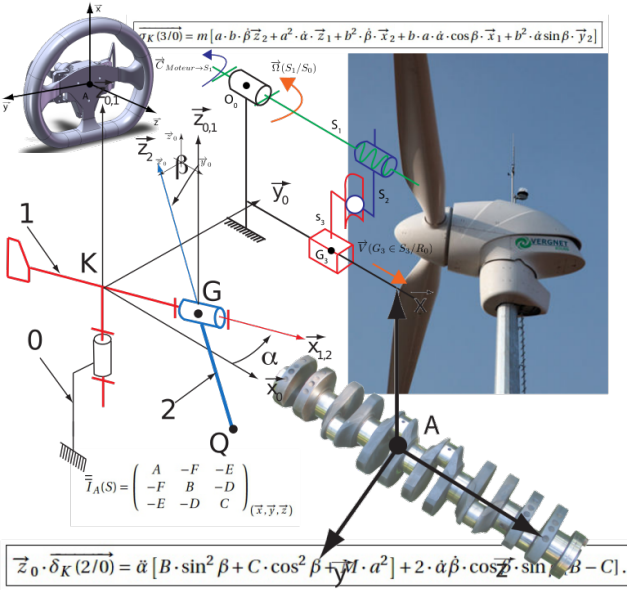
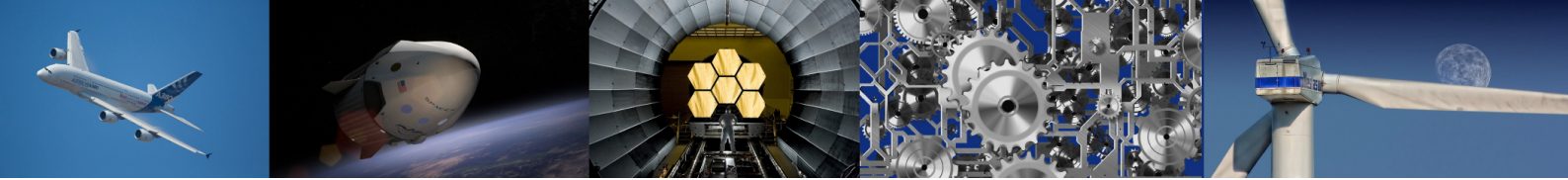




LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C4 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES DYNAMIQUES DES SYSTÈMES

TD 10 - Caractérisation inertielle des solides (C4-2)

Compétences

- **Modéliser**
 - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
 - Modéliser une action mécanique.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- **Communiquer**
 - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

Exercice 1 : Stabilisateur d'image mécanique

Source : CCMP 2018

1 Introduction

La stabilisation d'images - photo ou vidéo - est un domaine en pleine évolution. On peut distinguer deux types principaux : les stabilisateurs optiques qui améliorent la qualité par le traitement informatique des images et les stabilisateurs mécaniques qui s'opposent aux mouvements indésirables pendant la prise de vue. Nous nous intéressons à un stabilisateur actif représentés sur les figures 1. Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif.

2 Équilibrage statique

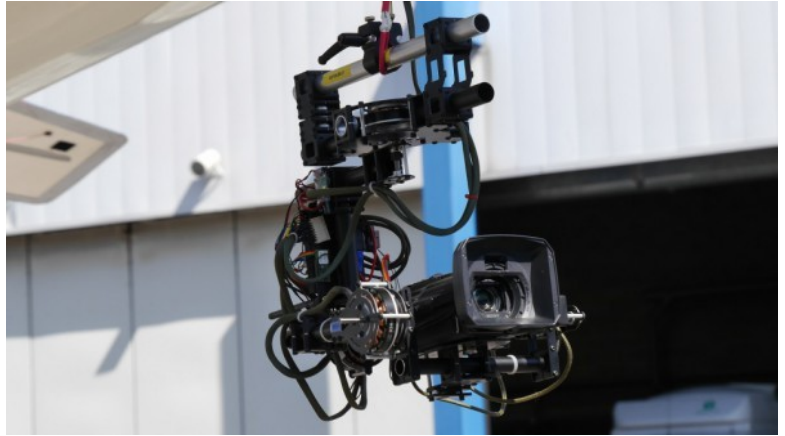
Q 1 : A l'aide des données en annexes justifier la forme du vecteur $\overrightarrow{OG_2}$, $\overrightarrow{O'G_3}$, $\overrightarrow{O'G_4}$ et $\overrightarrow{O_cG_c}$.

Notation adoptée : on appelle

- G_{4c} : le centre de gravité de l'ensemble {4, caméra},
- G_{34c} : le centre de gravité de l'ensemble {3, 4, caméra},
- et G_{234c} : le centre de gravité de l'ensemble {2, 3, 4, caméra}.



Skycam ou spydecam pour sport collectif ou tennis



Camera de télévision sous ballon

FIGURE 1 – Illustration de stabiliseurs d'images actifs

**Propriété 1 : Equilibrage statique**

- Le solide S est équilibré statiquement si G_s appartient à l'axe de rotation $(M, \vec{u})$.
- L'équilibrage est classiquement réalisé par ajout de masselottes (par exemple pour les roues de voitures) ou par enlèvement de matière par perçage (par exemple pour les vilbrequins).

Q 2 : En utilisant la définition du barycentre d'un ensemble à préciser, établir les expressions des deux valeurs réglables de position de la caméra sur le support (4) notées (y_c, z_c) en fonction des données massiques utiles (voir en annexe figures 4, 5, 6 et 7) assurant ainsi l'équilibrage de la nacelle selon l'axe de tangage. Donner une estimation numérique de y_c et de z_c (en millimètres) ;

Q 3 : A la fin de la procédure d'équilibrage de l'axe de tangage, exprimer $\overrightarrow{O'G_{4c}}$;

Q 4 : Compléter alors la 1^{ère} ligne du tableau du document-réponse en indiquant les solides concernés par la procédure d'équilibrage ainsi que le décalage à effectuer (utiliser le symbole P).

Q 5 : Sans faire de calculs, compléter les lignes 2 et 3 du tableau du document réponse en indiquant le nom de l'axe, les solides concernés par la procédure d'équilibrage ainsi que la direction du décalage à effectuer (utiliser le symbole P) .

Ordre	Nom de l'axe	Solides concernés	$\pm \vec{X}_i$	$\pm \vec{Y}_i$	$\pm \vec{Z}_i$
1 ^{er}	tangage				
2 ^e					
3 ^e					

3 Modélisation dynamique

Pour modéliser dynamique le système on doit quantifier l'opérateur d'inertie de l'ensemble $\{2 + 3 + 4\}$ dans la base $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$. On notera A_i, B_i, C_i, D_i, E_i et F_i les termes de l'opérateur d'inertie du solide i exprimé dans la base associé au solide i au point O' .

- Lacet : $\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\theta}_{21} \vec{z}_{1,2}$ et $\theta_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
- Roulis : $\vec{\Omega}(3/2) = \dot{\theta}_{32} \vec{y}_{2,3}$ et $\theta_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$;
- Tangage : $\vec{\Omega}(4/3) = \dot{\theta}_{43} \vec{x}_{3,4}$ et $\theta_{43} = (\vec{y}_3, \vec{y}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$

Q 6 : Donner la forme des opérateurs d'inertie des solides 2, 3 et 4 dans leur bases respectives en tenant compte des symétries.

Q 7 : Dans le cas d'angles de roulis et de tangage nuls donner l'expression de l'opérateur d'inertie de l'ensemble $E_{234} = \{2, 3, 4\}$ dans la base $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ en O' .

Q 8 : Dans ces conditions, déterminer l'opérateur d'inertie de l'ensemble $E_{234c} = \{2, 3, 4, \text{caméra}\}$ en O' .

4 Annexes : données massiques des constituants de la nacelle

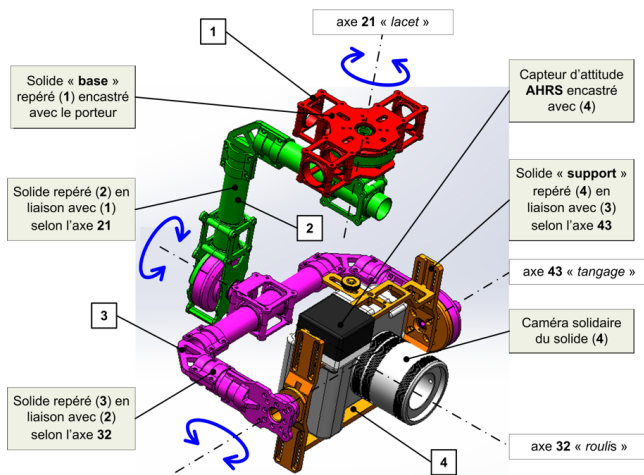


FIGURE 2 – Vue de la caméra stabilisée

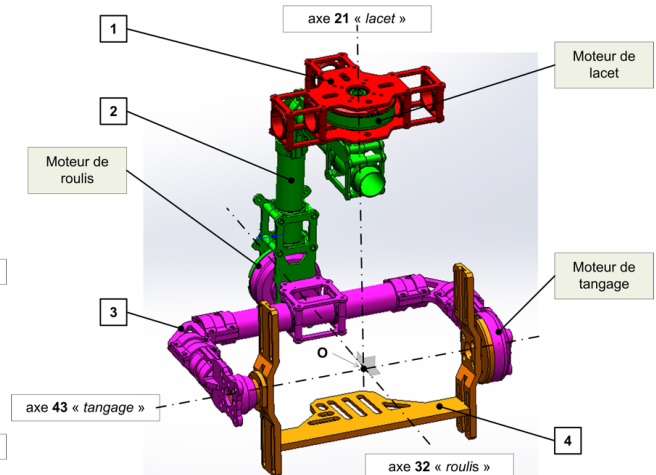


FIGURE 3 – Vue de la nacelle seule

Remarque importante : les données numériques sont fournies pour une configuration « primaire » de la nacelle (avant toute procédure d'équilibrage) pour laquelle **les points O et O' sont supposés parfaitement confondus**.

On rappelle que le **point O** se trouve toujours à l'intersection entre l'axe **lacet** et l'axe **roulis** alors que le **point O'** se trouve toujours à l'intersection entre l'axe **roulis** et l'axe **tangage**.

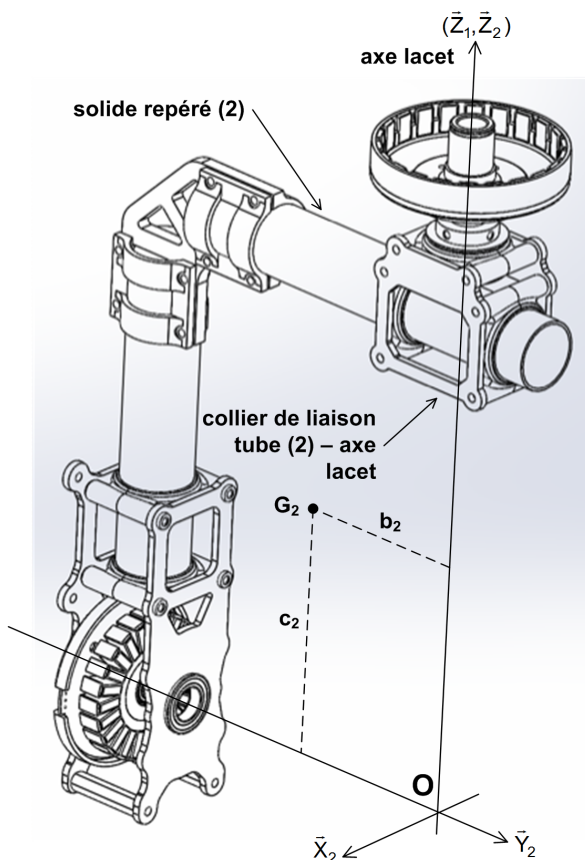


FIGURE 4 – Description du solide 2

SOLIDE (2)

- masse ; m_2
- centre de gravité G_2 tel que $\overrightarrow{OG_2} = -b_2 \vec{y}_2 + c_2 \vec{z}_2$
- données numériques *initiales* :

$$m_2 = 340g$$

$$b_2 = 80mm$$

$$c_2 = 160mm$$

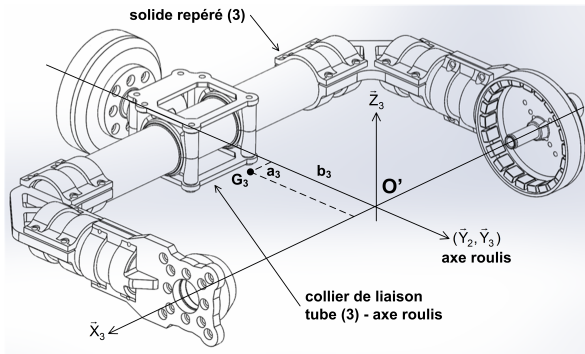


FIGURE 5 – Description du solide 3

SOLIDE (3)

- masse ; m_3
- centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{O'G_3} = -a_3 \vec{x}_3 - b_3 \vec{y}_3$
- données numériques *initiales* :

$$m_3 = 390g$$

$$a_3 = 4mm$$

$$b_3 = 82mm$$

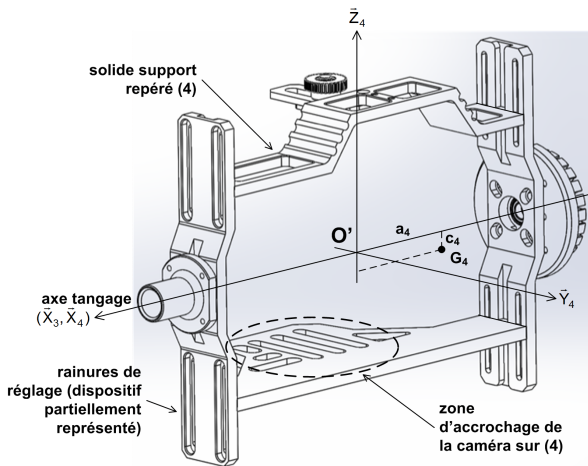


FIGURE 6 – Description du solide 4

SOLIDE (4) : support

- masse ; m_4
- centre de gravité G_4 tel que $\overrightarrow{O'G_4} = -a_4 \vec{x}_4 - c_4 \vec{y}_4$
- données numériques *initiales* :

$$m_4 = 350g$$

$$a_4 = 24mm$$

$$c_4 = 4mm$$

CAMERA COMPLETE (boitier, objectif, AHRS)

- masse ; m_c
- centre de gravité G_c tel que

$$\overrightarrow{O'O_c} = x_c \vec{x}_4 + y_c \vec{y}_4 + z_c \vec{z}_4$$

$$\overrightarrow{O_c G_c} = a_c \vec{x}_4 + b_c \vec{y}_4 + c_c \vec{z}_4$$

- Le point O_c représente le point d'accroche du boîtier de la caméra sur le support (4)
- données numériques *initiales* :

$$m_c = 1000g$$

$$a_c = 16mm$$

$$b_c = 20mm$$

$$c_c = 48mm$$

- opérateur d'inertie en O_c exprimée dans la base B_c :

$$\bar{I}_{O_c}(cam) = \begin{pmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

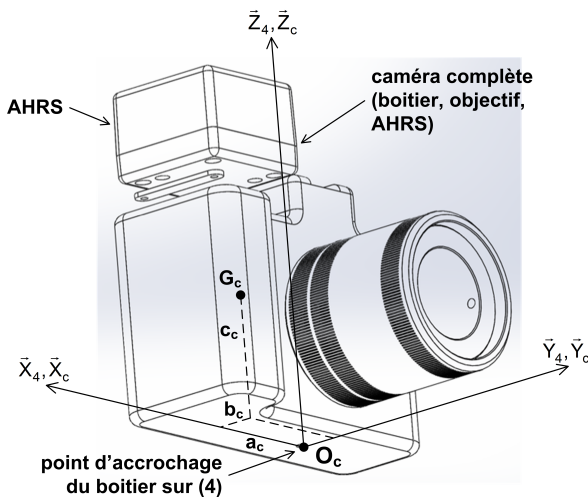


FIGURE 7 – Description de la caméra complète

Exercice 2 : Inertie d'un cadre de transport de moules d'injection plastique

Source : e3a PSI 2008

On s'intéresse à la détermination des caractéristiques inertielles d'un cadre support d'un moule destiné à l'injection plastique des tableaux de bord automobile (figure 8).



FIGURE 8 – Photo d'un tableau de bord

L'objectif de l'étude est de déterminer les caractéristiques inertielles nécessaires pour assurer les niveaux de la fonction technique : "assurer les déplacements des moules d'un poste à l'autre".

La matrice d'inertie du cadre au point O_c , milieu du cadre se trouvant sur l'axe de rotation $(O_c, \vec{x}_c)$ de celui-ci avec le plateau, dans la base $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ est la suivante :

$$\bar{I}_{O_c}(\text{cadre}) = \begin{pmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

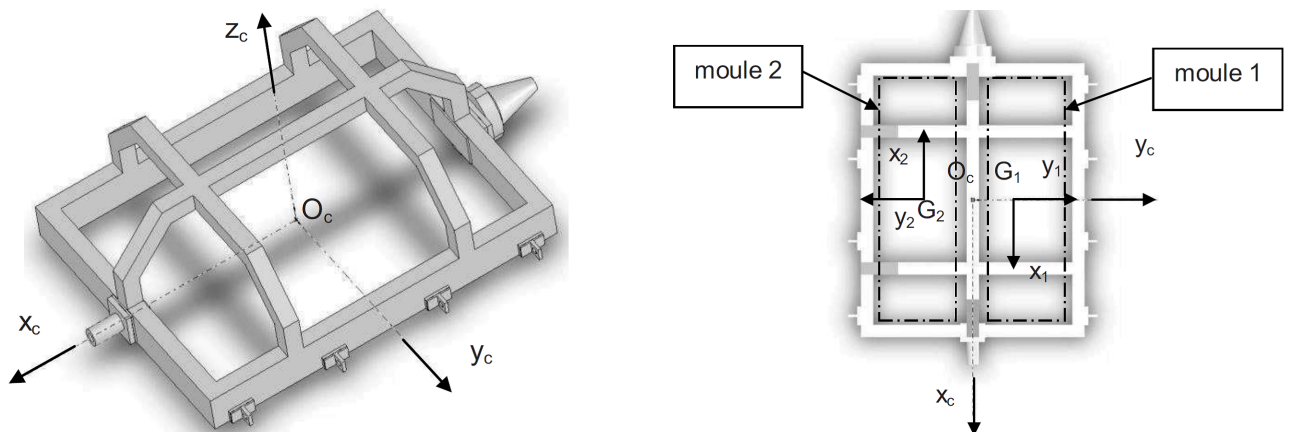


FIGURE 9 – Caractéristiques géométrique du cadre

Q 9 : Indiquer les termes nuls de cette matrice et préciser pourquoi.

Le cadre est équipé de deux moules identiques respectivement 1 et 2 montés en opposition (voir bases associées). Les matrices d'inertie des moules 1 et 2, au point O_c dans leurs bases respectives : $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $b_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ sont identiques :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(\text{moule1}) = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

et

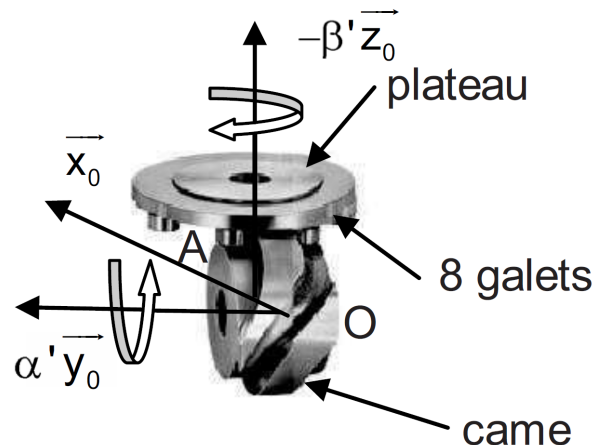
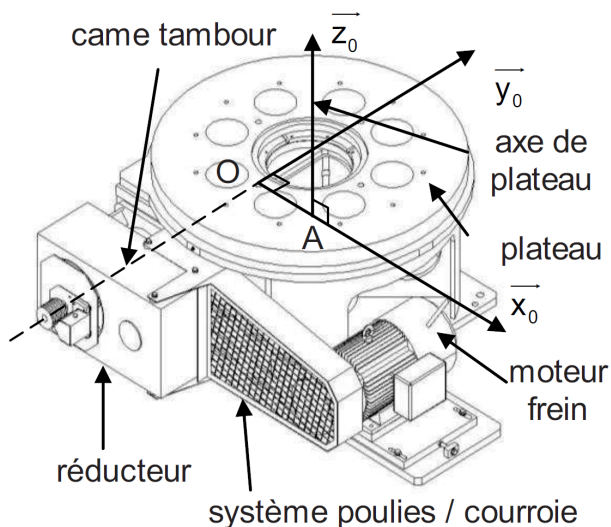
$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(\text{moule2}) = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Q 10 : Déterminer littéralement la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point O_c dans la base $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ en fonction des termes de la matrice précédente :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(\text{cadre} + \text{moules}) = \begin{pmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

Q 11 : Effectuer l'application numérique. $A_c = 159,22 \text{ kg.m}^2$, $B_c = 426,02 \text{ kg.m}^2$, $C_c = 531,77 \text{ kg.m}^2$, $E_c = 0,06 \text{ kg.m}^2$
 $A_m = 14,38 \text{ kg.m}^2$, $B_m = 15,43 \text{ kg.m}^2$, $C_m = 21,44 \text{ kg.m}^2$, $D_m = 5,32 \text{ kg.m}^2$, $E_m = 0,36 \text{ kg.m}^2$, $F_m = -0,04 \text{ kg.m}^2$
 On donne :

- La masse m_{cm} d'un cadre équipé de deux moules;
- Le moment d'inertie C_{cm} d'un cadre équipé de deux moules autour de l'axe $(O_c, \vec{z}_c)$;
- Le centre de gravité d'un cadre équipé de deux moules est sur l'axe $(O_c, \vec{z}_c)$ et situé à une distance d par rapport à l'axe de rotation $(A, \vec{z}_0)$ du plateau indexeur ($\vec{z}_0 = \vec{z}_c$) (voir les deux figures suivantes avec $O = O_c$);
- Le moment d'inertie C_p du plateau indexeur par rapport à l'axe de rotation $(A, \vec{z}_0)$.
- L'inertie des "peaux fabriquées" étant négligée par rapport à celle du cadre équipé de deux moules.



Q 12 : Déterminer littéralement le moment d'inertie C de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses quatre cadres et huit moules par rapport à l'axe de rotation $(A, \vec{z}_0)$ en fonction des termes précédents.

Q 13 : Application numérique avec $C_{cm} = 575 \text{ kg.m}^2$; $m_{cm} = 500 \text{ kg}$; $d = 2,95 \text{ m}$; $C_p = 1500 \text{ kg.m}^2$