

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C4 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES DYNAMIQUES DES SYSTÈMES

TD 9 - Introduction à la dynamique des solides (C4-1)

Compétences

- **Modéliser**
 - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
 - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
 - Modéliser une action mécanique.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
 - Déterminer les actions mécaniques en statique.
 - Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
 - Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.
 - Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations.
- **Communiquer**
 - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

Exercice 1 : Système de dépose de composant

Source : e3a PSI 2011

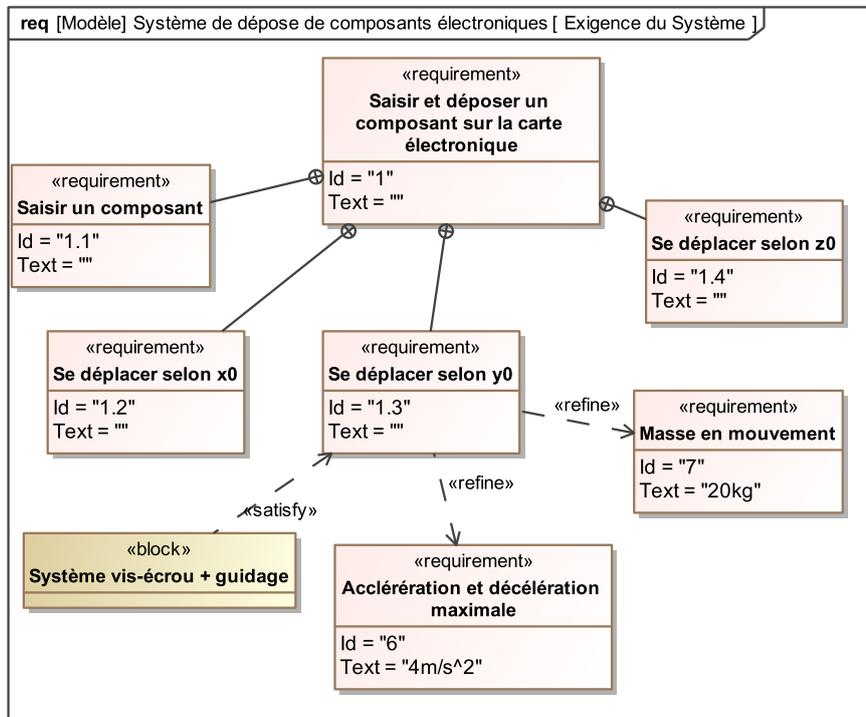
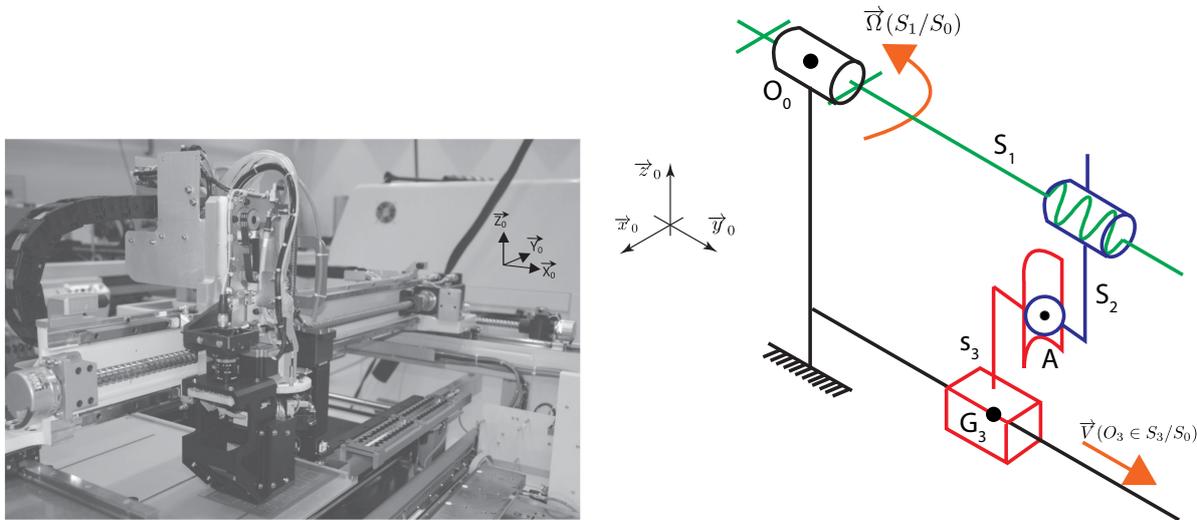
1 Présentation

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée \vec{y}_0) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement "vis-écrou".

Hypothèses :

- le référentiel associé au repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera J_1 le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe (O_0, \vec{y}_0) : $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$;
- on note M_3 et G_3 respectivement la masse et le centre d'inertie du solide S_3 ;
- la position de G_3 est définie par $\vec{O}_0 G_3 = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$

- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre S_0 et S_3 (Coefficient de frottement noté μ) et la pivot entre S_0 et S_1 (couple résistant noté C_r).
- Seul l'action de pesanteur sur S_3 sera supposée non négligeable.



- S_0 : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti;
- S_1 : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur;
- S_2 : écrou de la vis à billes (inertie négligeable);
- S_3 : chariot supportant la tête de dépose (masse M_3);

Données numériques associées au système :

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) : $\mu = 0, 1$.
- Pas de la vis à billes : $p = 20\text{mm}$.
- Diamètre de la vis à billes : $D = 25\text{mm}$.
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe \vec{y}_0 : $I_v = 2, 15 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) : $C_r = 3\text{N} \cdot \text{m}$
- l , longueur libre de la vis -entre deux paliers- (mm) : 1000mm .
- Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :
 - Couple maximal, $C_{max} = 21, 2\text{Nm}$.
 - Fréquence de rotation maximale, $Nm = 6000\text{tr}/\text{min}$.

- Moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe \vec{y}_0 , $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.



Objectif 1 :

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à S_1 : $\vec{C}_{Moteur \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m$;
- vitesse de rotation de S_1 : $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0$.

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose S_3) :

- masse : M_3 ;
- cinématique de S_3 : $\vec{a}(G_3/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}$.

2 Modélisation du système

Q 1 : Tracer le graph de structure du système

Q 2 : Proposer un ordonnancement des isolements ainsi que les théorèmes généraux associés permettant de relier les paramètres d'entrée en fonction des paramètres de sortie du système (sans développer les calculs).

Q 3 : A l'aide des lois de Coulomb, proposer une modélisation de la résultante de l'action mécanique de $S_0 \rightarrow S_3$.

Q 4 : A l'aide des théorèmes généraux appliqués aux cas particuliers, déterminer les équations reliant les paramètres du problème.

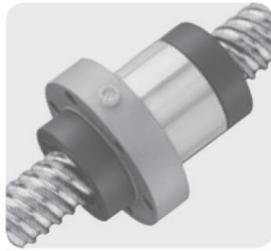
Q 5 : Combiner ces équations pour obtenir une équation de mouvement reliant le couple moteur, à l'accélération de S_3 par rapport à R_0 selon \vec{y}_0 ainsi qu'aux constantes du problème.

Q 6 : Afin de valider le dimensionnement de la vis à billes, calculer les valeurs suivantes :

- couple moteur à fournir à la vis à bille (C_m),
- fréquence critique de la vis à billes (N_{cr}),
- vitesse maximale atteinte par la tête de dépose (V_{cr}).
- Conclure sur le dimensionnement du système.

Vis à billes	Inertie équivalente, I_v (kg.m ²)	Diamètre en fond de filet, d_2 (mm)	Couple moteur, C_m (Nm)	Fréquence critique de la vis, N_{cr} (tr/min)	Vitesse maxi. de la tête de dépose, V_{cr} (m/s)
25x20 R	$2,15 \times 10^{-4}$	21,7			

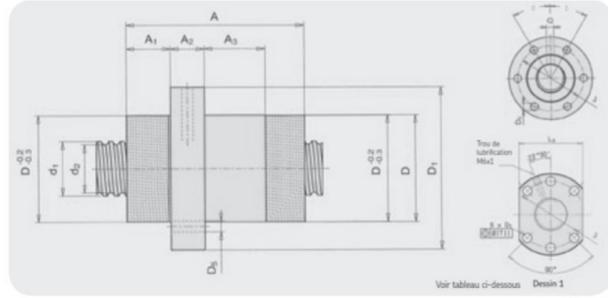
3 Annexes



Ecrou standard



Recirculation



Voir tableau ci-dessous Dessin 1

Diamètre nominal	Pas à droite	Longueur maximum	Nombre de circuits de billes	Charges de base		SL Jeu axial maximum	BL Couple à vide BL moyen	Masse de l'écrou	Masse de la vis	Inertie pour 1 m de vis	Désignation
				dynamique	statique						
d_0	P_h			C_a	C_{0a}	S_{ap}	T_{pr}				
mm	mm	mm		kN	kN	mm	Nm	kg	kg/m	kgmm ²	
25	20	5000	4 x 1,7	23,0	51,6	0,08	0,20	0,6	3,3	215	SL/BL 25 x 20 R
40	20	6000	4 x 2,7	41,8	129,4	0,08	0,42	1,4	8,2	1380	SL/BL 40 x 20 R
40	40	6000	4 x 1,7	53,3	133,8	0,10	0,53	2,5	8,1	1330	SL/BL 40 x 40 R
50	50	6000	4 x 1,7	94,8	238,2	0,12	1,19	3,4	13,2	3560	SL/BL 50 x 50 R

Désignation	Vis		Ecou							Lubrification		
	d_2	d_1	D_{g9}	D_1	A_1	A	A_2	A_3	J_{js12}	L_8	D_5	Q
—	mm											
SL/BL 25 x 20 R	21,7	24,3	48	73	17,4	66,4	15	18	60		6 x 6.6	M6
SL/BL 40 x 20 R	35,2	37,7	63	95	17,8	86,8	15	38	78		6 x 9.0	M6
SL/BL 40 x 40 R	34,2	38,3	72	110	21,3	110,3	25	44	90		6 x 11	M8 x 1
SL/BL 50 x 50 R	43,5	49,1	85	125	25,5	134,0	25	60	105		6 x 11	M8 x 1

Le constructeur de vis à billes préconise de ne pas dépasser la fréquence de rotation critique (risque de vibration important) qui se détermine par la relation suivante :

$$N_{cr} = 2,2 \times 10^8 \times \frac{d_2}{l^2}$$

Avec

- N_{cr} : fréquence de rotation critique (tr/min)
- d_2 : diamètre en fond de file (mm)
- l : longueur libre de la vis -entre deux paliers- (mm)

Exercice 2 : Système de maintenance de Tramway

Source : CCP PSI 2011

1 Présentation

L'étude repose sur un système permettant de soulever une rame de Tramway du sol pour effectuer des opérations de maintenance. On s'intéresse dans cette étude aux exigences (figure 1) : **1.2 Générer un mouvement vertical**

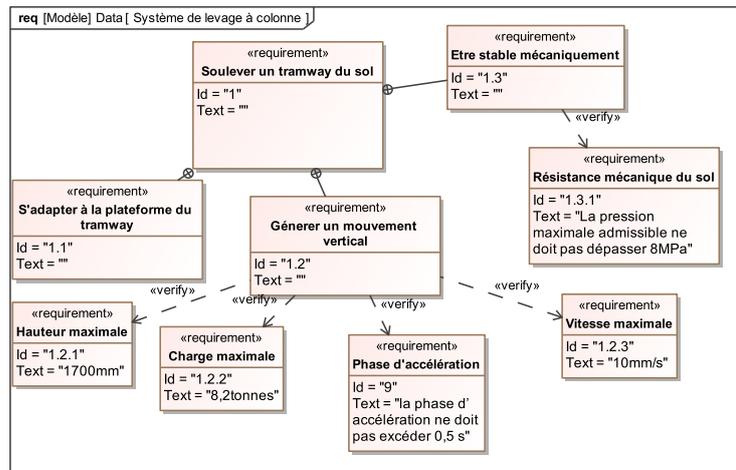
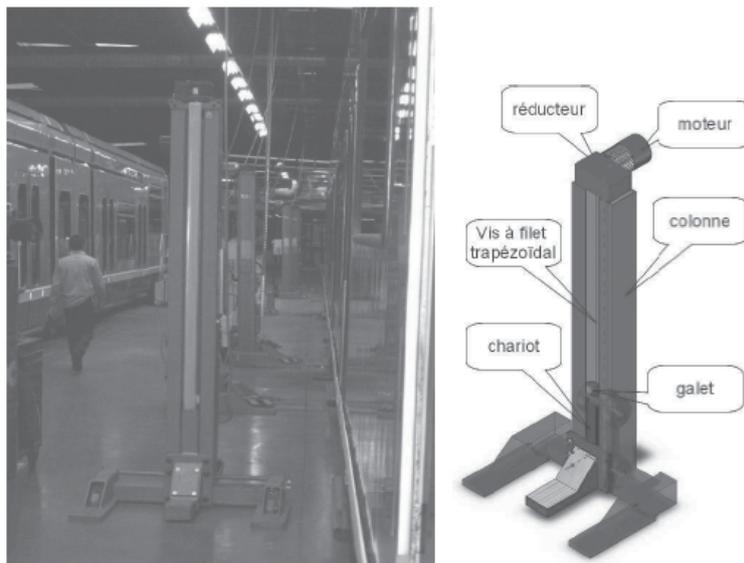


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel



2 Exigence 1.2 Générer un mouvement vertical

Le système permettant de générer le mouvement vertical du Tramway est modélisé par le schéma cinématique de la figure 2.

Étude du réducteur de vitesse

Q 7 : Déterminer l'expression littérale des rapports de réduction en fonction des données concernant les roues dentées :

1. $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$,
2. $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$,

Q 8 : En déduire les expressions de :

1. $\vec{\Omega}_{2/0}$,
2. $\vec{\Omega}_{3/0}$.

en fonction de $\dot{\theta}_1$ et des données concernant les roues dentées

Q 9 : Déterminer numériquement les rapports :

On note :

- la vitesse de rotation de l'arbre moteur : $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_{10} \cdot \vec{x}_0 = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$;
- la vitesse de levé du tramway : $V_L = \dot{z}_4 = \vec{V}(O_4 \in 4/0) \cdot \vec{z}_0$.

Données sur les liaisons

- Liaison L_{12} :
 - Pignon de l'arbre 1 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents : $Z_{12} = 15$,
 - Pignon de l'arbre 2 engrenant avec l'arbre 1 : nombre de dents : $Z_{21} = 75$,
- Liaison L_{23} :
 - Pignon de l'arbre 2 engrenant avec la vis 3 : nombre de dents : $Z_{23} = 14$,
 - Pignon de la vis 3 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents : $Z_{32} = 35$,
- Liaison L_{34} : pas du système vis-écrou : $p_{34} = 5 \text{ mm}$

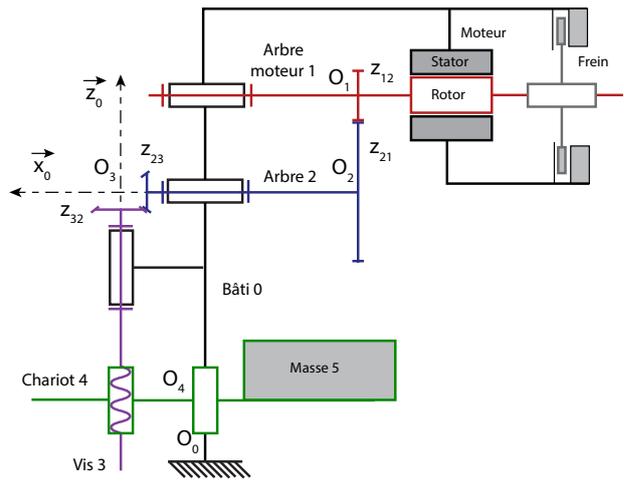


FIGURE 2 – Schéma Cinématique du système permettant de soulever le tramway

1. $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$,
2. $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$,

Étude du système de transformation de mouvement

Q 10 : Tracer le graph des liaisons du système de transformation de mouvement constitué des solides 0 – 3 – 4.

Q 11 : Écrire les torseurs cinématiques associé à chaque liaison en précisant les lieux d'invariance.

Q 12 : Écrire la fermeture cinématique.

Q 13 : En déduire une relation entre la vitesse de levée : $V_L = \vec{V}(O_4 \in 4/0) \cdot \vec{z}_0$ et $\omega_{30} = \vec{\Omega}_{3/0} \cdot \vec{z}_0$

Q 14 : En déduire les rapports :

1. $r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}}$,
2. $r_g = -\frac{V_L}{\omega_{10}}$.

Q 15 : Déterminer la vitesse de rotation du moteur souhaitée (à exprimer en tours par minute) pour obtenir une vitesse de levée conforme au cahier des charges.

3 Dimensionnement dynamique du système.

Données

- Le référentiel associé au repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé galiléen;
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites;
- Masse du solide 4 : $M_4 = 67 \text{ kg}$;
- Masse du solide 5 : $M_5 = 6000 \text{ kg}$;
- accélération de la pesanteur : $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- Les solides 4 et 5 sont supposés encastres entre eux;
- Moment d'inertie du solide 1 selon l'axe (O_1, \vec{x}_0) : $J_{(O_1, \vec{x}_0)}(S_1) = J_1 = 10,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
- Inerties des solides 2 et 3 négligeables;
- C_m le couple qu'exerce le moteur sur le solide 1 (selon l'axe \vec{x}_0);
- C_{21} le moment de l'action de l'arbre 2 sur l'arbre 1 en projection sur (O_1, \vec{x}_0) : $\vec{M}_{O_1}(2 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = C_{21}$;
- C_{23} le moment de l'action de l'arbre 2 sur l'arbre 3 en projection sur (O_3, \vec{z}_0) : $\vec{M}_{O_3}(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = C_{23}$;
- En supposant un rendement égal à 1 au niveau du réducteur on obtient la relation entre C_{21} et C_{23} :

$$C_{23} = -\frac{p_{34}}{r_g \cdot 2 \cdot \pi} \cdot C_{21}$$

- On rappelle le résultat de la partie précédente :

$$\dot{z}_4 = -r_g \cdot \dot{\theta}_1$$

et quelle que soit la valeur trouvée pour r_g , la valeur utilisée dans la suite du sujet sera : $r_g = 6,36 \times 10^{-5} \text{ m}$.

Q 16 : Donner le graphe de structure de l'ensemble 0-3-4-5.

Q 17 : Donner la forme du torseur de l'action mécanique du à la liaison de 3 → 4.

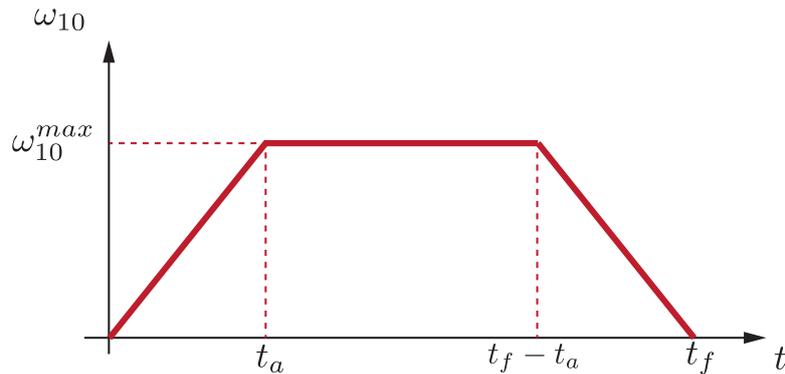
Q 18 : En isolant l'ensemble $E = \{4 + 5\}$ et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant \ddot{z}_4 , M_4 , M_5 , g et le(s) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.

Q 19 : En isolant le solide 1 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant $\ddot{\theta}_1$, J_1 , C_m et C_{21}

Q 20 : En isolant le solide 3 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant C_{23} à(aux) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.

Q 21 : Dédire des questions précédentes l'expression de C_m en fonction de \ddot{z}_4 , M_4 , M_5 , g , r_g , et J_1 .

Q 22 : On souhaite piloter le moteur avec un trapèze en vitesse. Donner les caractéristiques du trapèze en fonction des données du cahier des charges.



Q 23 : Pour chaque phase du trapèze, donner l'expression du couple moteur C_m ainsi que les applications numériques associées.