

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C4 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES DYNAMIQUES DES SYSTÈMES

## TD 9 - Introduction à la dynamique des solides (C4-1)

### Compétences

- **Modéliser**
  - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
  - Modéliser une action mécanique.
- **Résoudre**
  - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
  - Déterminer les actions mécaniques en statique.
  - Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
  - Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.
  - Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations.
- **Communiquer**
  - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.
  - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

## Exercice 1 : Système de dépose de composant

Source : e3a PSI 2011

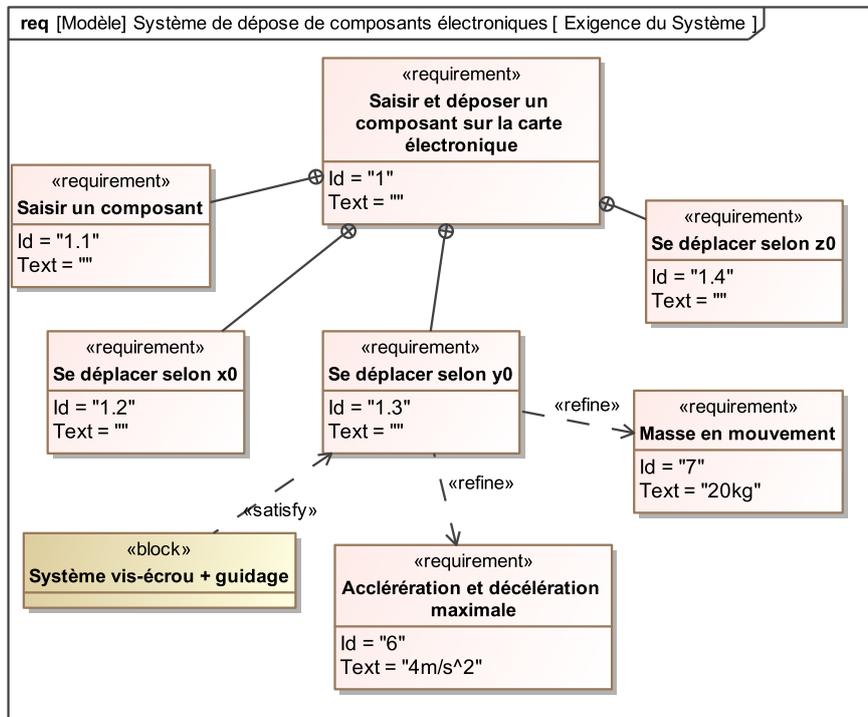
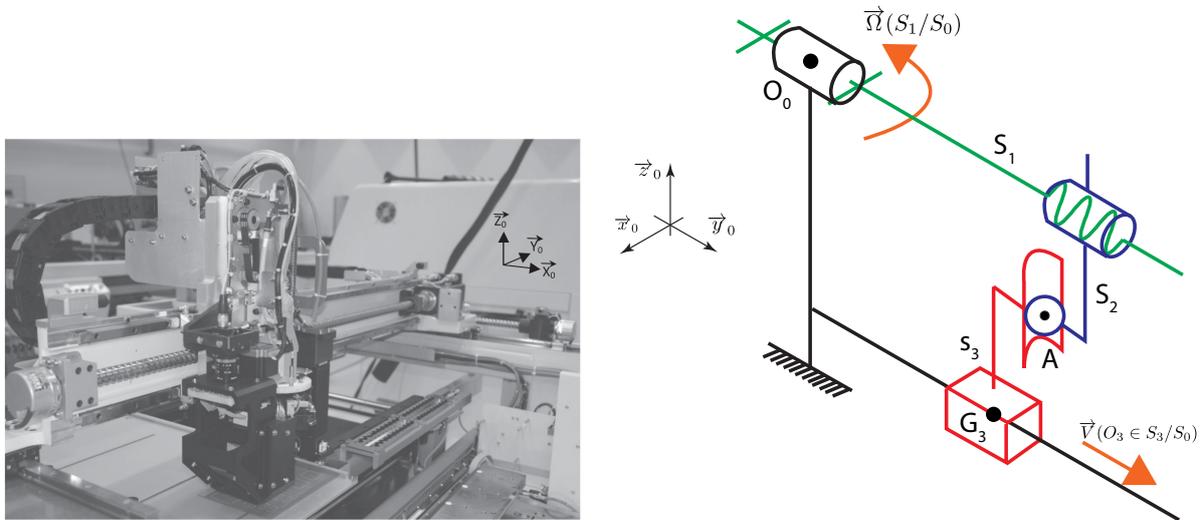
### 1 Présentation

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement "vis-écrou".

#### Hypothèses :

- le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
- on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
- la position de  $G_3$  est définie par  $\vec{O}_0 G_3 = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$

- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ ).
- Seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.



- $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti;
- $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur;
- $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable);
- $S_3$  : chariot supportant la tête de dépôt (masse  $M_3$ );

**Données numériques associées au système :**

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- Pas de la vis à billes :  $p = 20mm$ .
- Diamètre de la vis à billes :  $D = 25mm$ .
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_v = 2,15 \times 10^{-4} kg \cdot m^2$ .
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) :  $C_r = 3N \cdot m$
- $l$ , longueur libre de la vis -entre deux paliers- (mm) :  $1000mm$ .
- Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :
  - Couple maximal,  $C_{max} = 21,2Nm$ .
  - Fréquence de rotation maximale,  $Nm = 6000tr/min$ .

- Moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .



### Objectif 1 :

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{Moteur \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m$  ;
- vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0$ .

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :

- masse :  $M_3$  ;
- cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}$ .

## 2 Modélisation du système

**Q 1 :** Tracer le graph de structure du système

**Q 2 :** Proposer un ordonnancement des isolements ainsi que les théorèmes généraux associés permettant de relier les paramètres d'entrée en fonction des paramètres de sortie du système (sans développer les calculs).

**Q 3 :** A l'aide des lois de Coulomb, proposer une modélisation de la résultante de l'action mécanique de  $S_0 \rightarrow S_3$ .

**Q 4 :** A l'aide des théorèmes généraux appliqués aux cas particuliers, déterminer les équations reliant les paramètres du problème.

**Q 5 :** Combiner ces équations pour obtenir une équation de mouvement reliant le couple moteur, à l'accélération de  $S_3$  par rapport à  $R_0$  selon  $\vec{y}_0$  ainsi qu'aux constantes du problème.

**Q 6 :** Afin de valider le dimensionnement de la vis à billes, calculer les valeurs suivantes :

- couple moteur à fournir à la vis à bille ( $C_m$ ),
- fréquence critique de la vis à billes ( $N_{cr}$ ),
- vitesse maximale atteinte par la tête de dépose ( $V_{cr}$ ).
- Conclure sur le dimensionnement du système.

Vis à billes	Inertie équivalente, $I_v$ (kg.m <sup>2</sup> )	Diamètre en fond de filet, $d_2$ (mm)	Couple moteur, $C_m$ (Nm)	Fréquence critique de la vis, $N_{cr}$ (tr/min)	Vitesse maxi. de la tête de dépose, $V_{cr}$ (m/s)
25x20 R	$2,15 \times 10^{-4}$	21,7			

## 3 Annexes



## 1 Présentation

L'étude repose sur un système permettant de soulever une rame de Tramway du sol pour effectuer des opérations de maintenance. On s'intéresse dans cette étude aux exigences (figure 1) : **1.2 Générer un mouvement vertical**

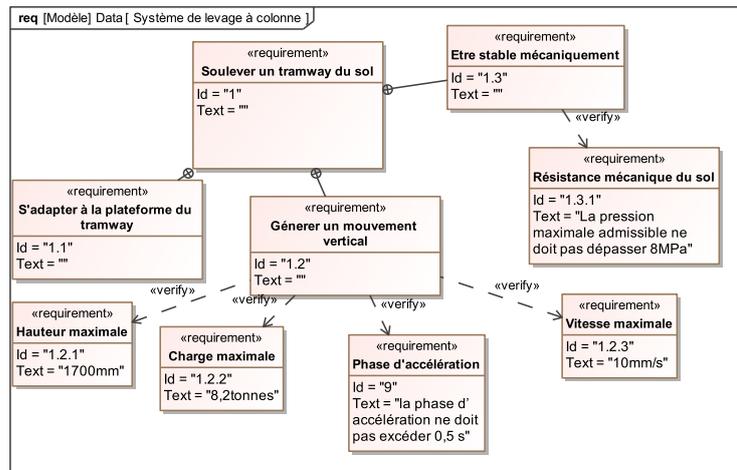
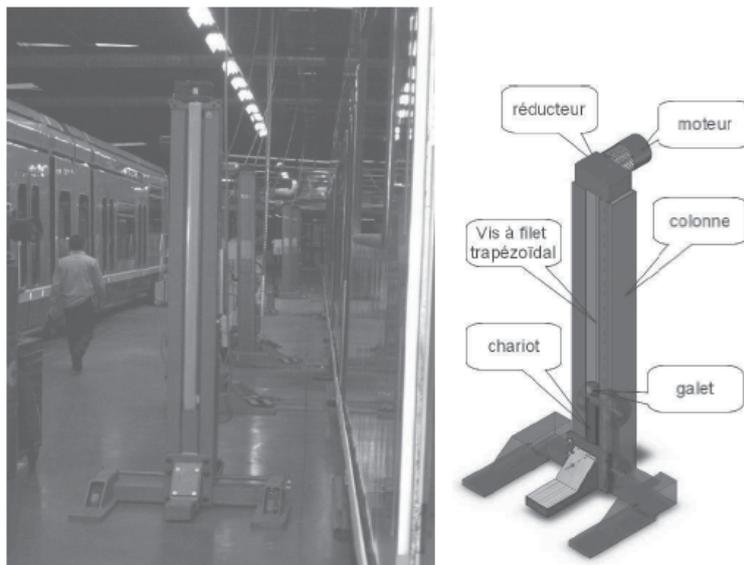


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel



## 2 Exigence 1.2 Générer un mouvement vertical

Le système permettant de générer le mouvement vertical du Tramway est modélisé par le schéma cinématique de la figure 2.

**Étude du réducteur de vitesse**

**Q 7 : Déterminer l'expression littérale des rapports de réduction en fonction des données concernant les roues dentées :**

1.  $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$ ,
2.  $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$ ,

**Q 8 : En déduire les expressions de :**

1.  $\vec{\Omega}_{2/0}$ ,
2.  $\vec{\Omega}_{3/0}$ .

**en fonction de  $\dot{\theta}_1$  et des données concernant les roues dentées**

**Q 9 : Déterminer numériquement les rapports :**

On note :

- la vitesse de rotation de l'arbre moteur :  $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_{10} \cdot \vec{x}_0 = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$ ;
- la vitesse de levé du tramway :  $V_L = \dot{z}_4 = \vec{V}(O_4 \in 4/0) \cdot \vec{z}_0$ .

#### Données sur les liaisons

- Liaison  $L_{12}$  :
  - Pignon de l'arbre 1 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents :  $Z_{12} = 15$ ,
  - Pignon de l'arbre 2 engrenant avec l'arbre 1 : nombre de dents :  $Z_{21} = 75$ ,
- Liaison  $L_{23}$  :
  - Pignon de l'arbre 2 engrenant avec la vis 3 : nombre de dents :  $Z_{23} = 14$ ,
  - Pignon de la vis 3 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents :  $Z_{32} = 35$ ,
- Liaison  $L_{34}$  : pas du système vis-écrou :  $p_{34} = 5 \text{ mm}$

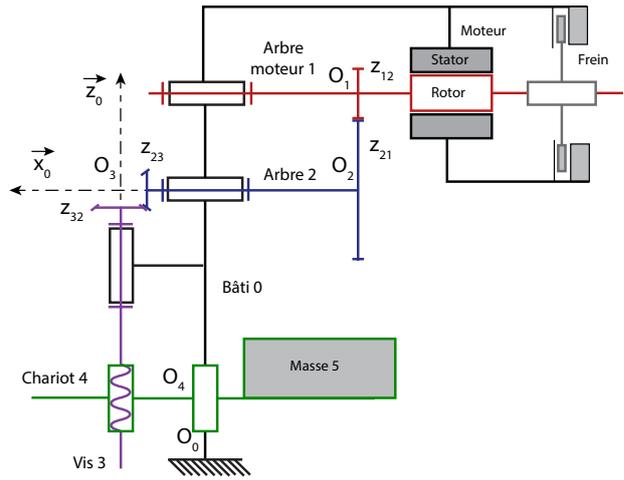


FIGURE 2 – Schéma Cinématique du système permettant de soulever le tramway

1.  $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$ ,
2.  $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$ ,

#### Étude du système de transformation de mouvement

**Q 10 :** Tracer le graph des liaisons du système de transformation de mouvement constitué des solides 0 – 3 – 4.

**Q 11 :** Écrire les torseurs cinématiques associé à chaque liaison en précisant les lieux d'invariance.

**Q 12 :** Écrire la fermeture cinématique.

**Q 13 :** En déduire une relation entre la vitesse de levée :  $V_L = \vec{V}(O_4 \in 4/0) \cdot \vec{z}_0$  et  $\omega_{30} = \vec{\Omega}_{3/0} \cdot \vec{z}_0$

**Q 14 :** En déduire les rapports :

1.  $r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}}$ ,
2.  $r_g = -\frac{V_L}{\omega_{10}}$ .

**Q 15 :** Déterminer la vitesse de rotation du moteur souhaitée (à exprimer en tours par minute) pour obtenir une vitesse de levée conforme au cahier des charges.

### 3 Dimensionnement dynamique du système.

#### Données

- Le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites;
- Masse du solide 4 :  $M_4 = 67 \text{ kg}$ ;
- Masse du solide 5 :  $M_5 = 6000 \text{ kg}$ ;
- accélération de la pesanteur :  $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$  avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ;
- Les solides 4 et 5 sont supposés encastés entre eux;
- Moment d'inertie du solide 1 selon l'axe  $(O_1, \vec{x}_0)$  :  $J_{(O_1, \vec{x}_0)}(S_1) = J_1 = 10,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- Inerties des solides 2 et 3 négligeables;
- $C_m$  le couple qu'exerce le moteur sur le solide 1 (selon l'axe  $\vec{x}_0$ );
- $C_{21}$  le moment de l'action de l'arbre 2 sur l'arbre 1 en projection sur  $(O_1, \vec{x}_0)$  :  $\vec{M}_{O_1}(2 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = C_{21}$ ;
- $C_{23}$  le moment de l'action de l'arbre 2 sur l'arbre 3 en projection sur  $(O_3, \vec{z}_0)$  :  $\vec{M}_{O_3}(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = C_{23}$ ;
- En supposant un rendement égal à 1 au niveau du réducteur on obtient la relation entre  $C_{21}$  et  $C_{23}$  :

$$C_{23} = -\frac{p_{34}}{r_g \cdot 2 \cdot \pi} \cdot C_{21}$$

- On rappelle le résultat de la partie précédente :

$$\dot{z}_4 = -r_g \cdot \dot{\theta}_1$$

et quelle que soit la valeur trouvée pour  $r_g$ , la valeur utilisée dans la suite du sujet sera :  $r_g = 6,36 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

**Q 16 :** Donner le graphe de structure de l'ensemble 0-3-4-5.

**Q 17 :** Donner la forme du torseur de l'action mécanique du à la liaison de 3 → 4.

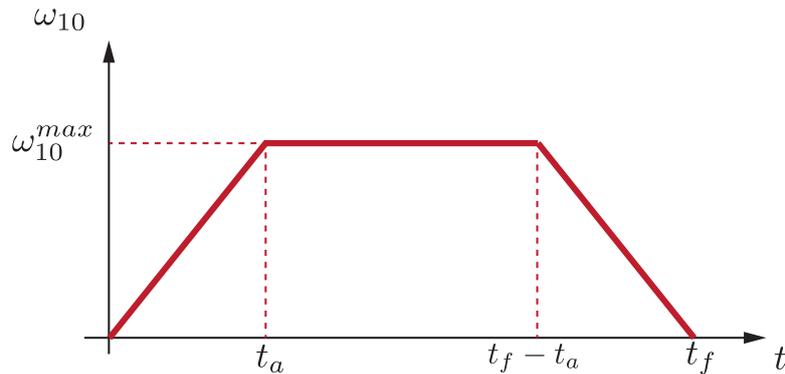
**Q 18 :** En isolant l'ensemble  $E = \{4 + 5\}$  et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant  $\ddot{z}_4$ ,  $M_4$ ,  $M_5$ ,  $g$  et le(s) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.

**Q 19 :** En isolant le solide 1 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant  $\ddot{\theta}_1$ ,  $J_1$ ,  $C_m$  et  $C_{21}$

**Q 20 :** En isolant le solide 3 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant  $C_{23}$  à(aux) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.

**Q 21 :** Dédire des questions précédentes l'expression de  $C_m$  en fonction de  $\ddot{z}_4$ ,  $M_4$ ,  $M_5$ ,  $g$ ,  $r_g$ , et  $J_1$ .

**Q 22 :** On souhaite piloter le moteur avec un trapèze en vitesse. Donner les caractéristiques du trapèze en fonction des données du cahier des charges.

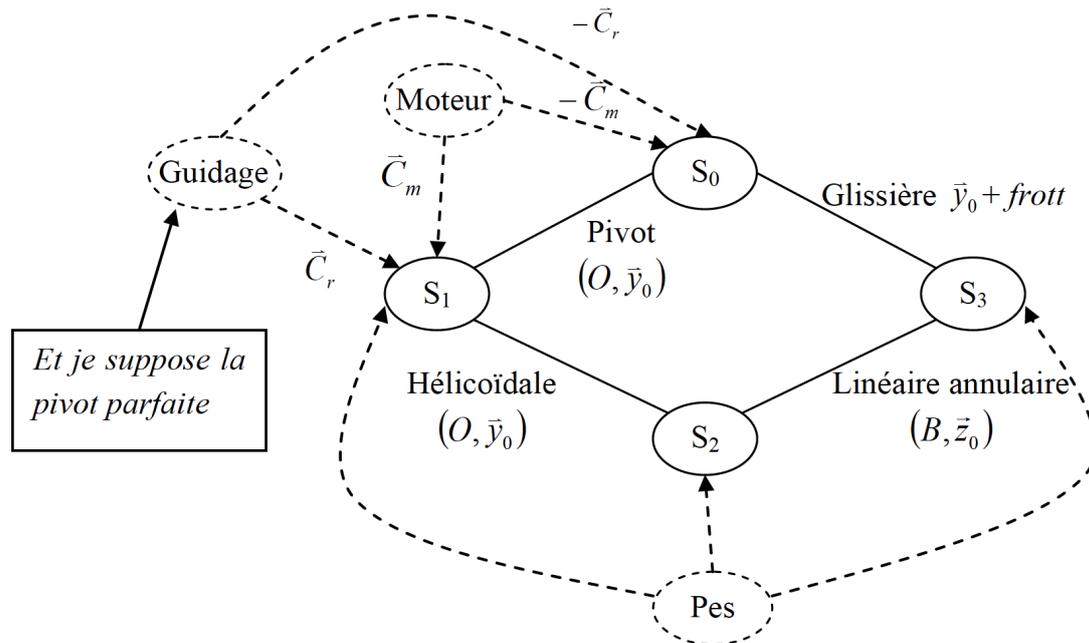


**Q 23 :** Pour chaque phase du trapèze, donner l'expression du couple moteur  $C_m$  ainsi que les applications numériques associées.

## Corrigé

### Exercice 1 : Système de dépose de composant

Q 1 : Tracer le graph de structure du système.



Q 2 : Proposer un ordonnancement des isoléments ainsi que les théorèmes généraux associés permettant de relier les paramètres d'entrée en fonction des paramètres de sortie du système (sans développer les calculs).

- L'entrée du système est le couple moteur :  $\vec{C}_{moteur \rightarrow S_1} = C_m \cdot \vec{y}_0$ .
- La sortie du système est le déplacement du solide  $S_3$ .

1. On isole  $S_1$  et on applique un théorème du moment dynamique selon  $(O_0, \vec{y}_0)$ .
2. On isole  $S_2$  et on applique un théorème de la résultante dynamique selon  $\vec{y}_0$ .
3. On isole  $S_3$  et on applique un théorème de la résultante dynamique selon  $\vec{z}_0$ .
4. On isole  $S_3$  et on applique un théorème de la résultante dynamique selon  $\vec{y}_0$ .

Q 3 : A l'aide des lois de Coulomb, proposer une modélisation de la résultante de l'action mécanique de  $S_0 \rightarrow S_3$

$$\vec{R}(S_0 \rightarrow S_3) = X_{03} \cdot \vec{x}_0 + Y_{03} \cdot \vec{y}_0 + Z_{03} \cdot \vec{z}_0$$

- La vitesse de glissement de  $S_3/S_0$  est dirigée selon  $+\vec{y}_0$ , ainsi l'action tangentielle de  $S_0 \rightarrow S_3$  est dirigée selon  $+\vec{y}_0$  :  $Y_{03} = -T_{03}$ .
- Dans le problème aucune action extérieure ne s'applique suivant  $\vec{x}_0$ , ainsi  $X_{03} = 0$ .
- L'action tangentielle est dirigée selon  $+\vec{z}_0$  :  $Z_{03} = N_{03}$ .
- Il y a glissement et ainsi on a la relation entre l'action tangentielle et normale :  $T_{03} = \mu \cdot N_{03}$ .

Q 4 : A l'aide des théorèmes généraux appliqués aux cas particuliers déterminer les équations reliant les paramètres du problème.

1. On isole  $S_1$  et on applique un théorème du moment dynamique selon  $(O_0, \vec{y}_0)$ .  
On appliquant un théorème du moment dynamique à  $S_1$  selon  $(O_0, \vec{y}_0)$

$$(I_m + I_v) \cdot \ddot{\theta} = C_m + M_{21} - C_r$$

2. On isole  $S_2$  et on applique un théorème de la résultante dynamique selon  $\vec{y}_0$ .

$$\boxed{(\vec{R}_{1 \rightarrow 2} + \vec{R}_{3 \rightarrow 2}) \cdot \vec{y}_0 = 0}$$

Or la définition de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$  donne :

$$M_{21} = -\frac{p}{2\pi} Y_{21}$$

Donc,

$$Y_{32} = -Y_{12} = Y_{21} = -\frac{2\pi}{p} M_{21}$$

D'où :

$$\boxed{Y_{23} = \frac{2\pi}{p} M_{21}}$$

3. On isole  $S_3$  et on applique un théorème de la résultante dynamique selon  $\vec{z}_0$ .

$$\boxed{0 = -M_3 \cdot g + N_{03}}$$

4. On isole  $S_3$  et on applique un théorème de la résultante dynamique selon  $\vec{y}_0$ .

$$M_3 \frac{d^2 \vec{a}(G_3/R_0)}{dt^2} \cdot \vec{y}_0 = \sum \vec{R}_{ext \rightarrow S_3} \cdot \vec{y}_0$$

$$\boxed{M_3 \cdot \ddot{y} = Y_{23} - T_{03}}$$

**Q 5 : Combiner ces équations pour obtenir une équation de mouvement reliant le couple moteur, à l'accélération de  $S_3$  par rapport à  $R_0$  selon  $\vec{y}_0$ .**

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{03} = \mu \cdot N_{03} \\ (I_m + I_v) \cdot \ddot{\theta} = C_m + M_{21} + C_r \\ Y_{23} = \frac{2\pi}{p} M_{21} \\ 0 = -M_3 \cdot g + N_{03} \\ M_3 \cdot \ddot{y} = Y_{23} - T_{03} \end{array} \right.$$

On peut par une fermeture cinématique que :

$$\dot{y} = -\frac{p}{2\pi} \dot{\theta}$$

$$\ddot{y} = -\frac{p}{2\pi} \ddot{\theta}$$

On obtient ainsi :

$$M_3 \cdot \ddot{y} = -\mu \cdot M_3 \cdot g + \frac{2\pi}{p} ((I_m + I_v) \cdot \ddot{\theta} - C_m - C_r)$$

$$\boxed{C_m = -\left[ \frac{p}{2\pi} \cdot M_3 (\mu \cdot g + \ddot{y}) + (I_m + I_v) \ddot{y} \frac{2\pi}{p} \right] - C_r = -3,79 N \cdot m}$$

**Q 6 : Afin de valider le dimensionnement de la vis à billes, calculer les valeurs suivantes :**

- couple moteur à fournir à la vis à bille ( $C_m$ ),
- fréquence critique de la vis à billes ( $N_{cr}$ ),

- vitesse maximale atteinte par la tête de dépose ( $V_{cr}$ ).
- Conclure sur le dimensionnement du système.

Vis à billes	Inertie équivalente, $I_v$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )	Diamètre en fond de filet $d_2$ (mm)	Couple moteur, $C_m$ (Nm)	Fréquence critique de la vis, $N_{cr}$ (tr/min)	Vitesse maxi. de la tête de dépose, $V_{cr}$ (m/s)
25x20 R	$2,15 \cdot 10^{-4}$	21,7	3,87	4774	1,59

Le système est correctement dimensionné

## Exercice 2 : Système de maintenance de Tramway

**Q 7 : Déterminer l'expression littérale des rapports de réduction en fonction des données concernant les roues dentées :**

1.  $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$ ,
2.  $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$ ,

$$r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}}$$

$$r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}} = -\frac{Z_{23}}{Z_{32}}$$

**Q 8 : En déduire les expressions de :**

1.  $\vec{\Omega}_{2/0}$ ,
2.  $\vec{\Omega}_{3/0}$ .

en fonction de  $\dot{\theta}_1$  et des données concernant les roues dentées

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{20} \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \vec{x}_0 = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}_{2/0} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \omega_{30} \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = -\frac{Z_{23}}{Z_{32}} \cdot \omega_{20} \cdot \vec{z}_0 = \frac{Z_{12} \cdot Z_{23}}{Z_{21} \cdot Z_{32}} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0$$

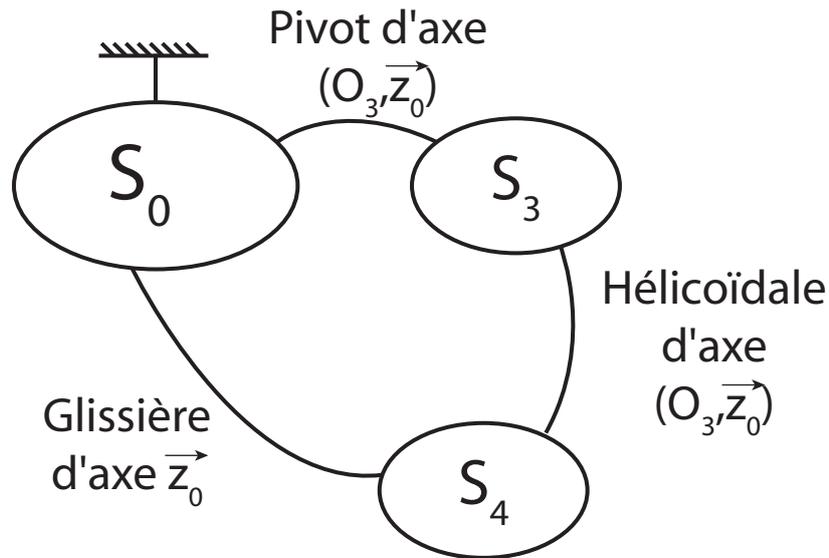
**Q 9 : Déterminer numériquement les rapports :**

1.  $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$ ,
2.  $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$ ,

On en déduit :

- $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}} = -\frac{15}{75} = -\frac{1}{5}$ ,
- $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}} = -\frac{Z_{23}}{Z_{32}} = -\frac{14}{35} = -\frac{2}{5}$ ,

**Q 10 : Tracer le graph des liaisons du système de transformation de mouvement constitué des solides 0 – 3 – 4.**



**Q 11 : Écrire les torseurs cinématiques associés à chaque liaison en précisant les lieux d'invariance.**

- $L_{03}$  : pivot d'axe  $(O_3, \vec{z}_0)$  :

$$\{\mathcal{V}_{(3/0)}\} =_{\forall P \in (O_3, \vec{z}_0)} \left\{ \begin{array}{c} \omega_{30} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- $L_{43}$  : hélicoïdale d'axe  $(O_3, \vec{z}_0)$  :

$$\{\mathcal{V}_{(4/3)}\} =_{\forall P \in (O_3, \vec{z}_0)} \left\{ \begin{array}{c} \omega_{43} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{V}(P \in 4/3) = u_{z43} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$$

avec  $u_{z43} = \frac{p_{34}}{2\pi} \omega_{43}$

- $L_{04}$  : glissière d'axe  $\vec{z}_0$  :

$$\{\mathcal{V}_{(4/0)}\} =_{\forall P} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(P \in 4/0) = u_{z40} \cdot \vec{z}_0 = V_L \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$$

**Q 12 : Écrire la fermeture cinématique.**

$$\{\mathcal{V}_{(4/0)}\} = \{\mathcal{V}_{(4/3)}\} + \{\mathcal{V}_{(3/0)}\}$$

**Q 13 : En déduire une relation entre la vitesse de levée :**  $V_L = \vec{V}(O_4 \in 4/0) \cdot \vec{z}_0$  **et**  $\omega_{30} = \vec{\Omega}_{3/0} \cdot \vec{z}_0$

On peut donc écrire la fermeture cinématique en  $O_3$  :

$$_{O_3} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_L \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} =_{O_3} \left\{ \begin{array}{c} \omega_{43} \cdot \vec{z}_0 \\ u_{z43} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} +_{O_3} \left\{ \begin{array}{c} \omega_{30} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

On obtient alors un système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{43} + \omega_{30} = 0 \\ V_L = u_{z43} = \frac{p_{34}}{2\pi} \omega_{43} \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$V_L = -\frac{p_{34}}{2\pi} \omega_{30}$$

**Q 14 : En déduire les rapports :**

1.  $r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}}$ ,
2.  $r_g = -\frac{V_L}{\omega_{10}}$ .

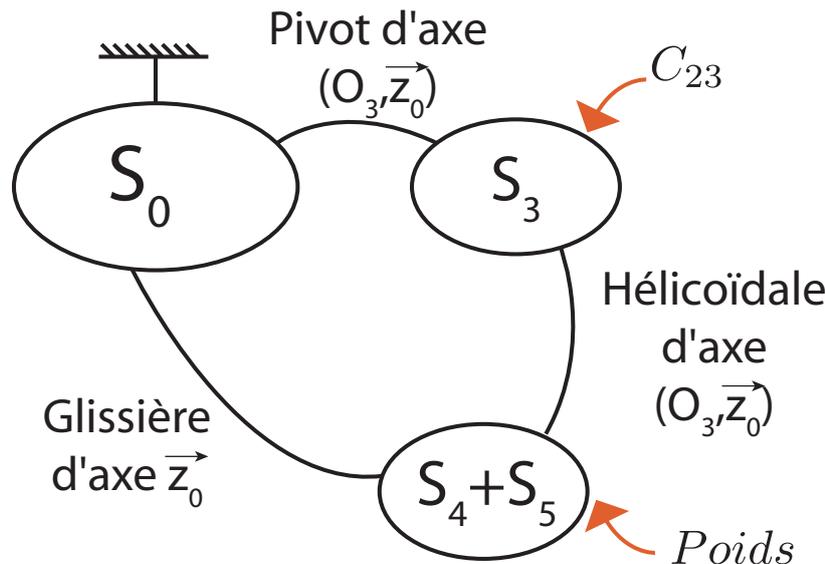
$$r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}} = -\frac{p_{34}}{2\pi}$$

$$r_g = -\frac{V_L}{\omega_{10}} = \frac{p_{34}}{2\pi} \frac{Z_{12} \cdot Z_{23}}{Z_{21} \cdot Z_{32}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \frac{2}{25}$$

**Q 15 : Déterminer la vitesse de rotation du moteur souhaitée (à exprimer en tours par minute) pour obtenir une vitesse de levée conforme au cahier des charges.**

$$N_{10} = \frac{60}{2\pi} \dot{\theta}_1 = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{V_L}{r_g} = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{V_L \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3}{2} = 150 \cdot 10^3 \cdot V_L = 150 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 = 1500 \text{ tr/min}$$

**Q 16 : Donner le graphe de structure de l'ensemble 0-3-4-5.**



**Q 17 : Donner la forme du torseur de l'action mécanique du à la liaison de 3 → 4.**

$$\{\mathcal{T}_{(3 \rightarrow 4)}\} = \begin{matrix} \\ M \end{matrix} \begin{pmatrix} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & N_{34} \end{pmatrix} \quad (=, =, \vec{z}_0)$$

avec  $N_{34} = -\frac{p_{34}}{2\pi} Z_{34}$

**Q 18 : En isolant l'ensemble  $E = \{4+5\}$  et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant  $\ddot{z}_4$ ,  $M_4$ ,  $M_5$ ,  $g$  et le(s) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.**

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à  $E$  selon  $\vec{z}_0$  donne :

$$(M_4 + M_5) \vec{a}(G_{4+5}/R_0) \cdot \vec{z}_0 = \sum \vec{R}_{ext \rightarrow E} \cdot \vec{z}_0$$

- $\vec{a}(G_{4+5}/R_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{a}(O_4/R_0) \cdot \vec{z}_0 = \ddot{z}_4$  car l'ensemble  $E$  est en mouvement de translation par rapport à  $R_0$
- $\sum \vec{R}_{ext \rightarrow E} \cdot \vec{z}_0 = Z_{34} - (M_4 + M_5) \cdot g$

On obtient alors, l'équation :

$$\boxed{(M_4 + M_5) \ddot{z}_4 = Z_{34} - (M_4 + M_5) \cdot g}$$

**Q 19 : En isolant le solide 1 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant  $\dot{\theta}_1$ ,  $J_1$ ,  $C_m$  et  $C_{21}$**

Le solide 1 est en mouvement de rotation par rapport à l'axe  $(O_1, \vec{x}_0)$  fixe par rapport à  $R_0$ . On peut donc appliquer le TMD par rapport à  $(O_1, \vec{x}_0)$  :

$$J_{(O_1, \vec{x}_0)}(S_1) \cdot \vec{\Omega}(1/0) \cdot \vec{x}_0 = \sum \vec{M}_{O_1}(ext \rightarrow S_1) \cdot \vec{x}_0.$$

- $J_{(O_1, \vec{x}_0)}(S_1) \cdot \vec{\Omega}(1/0) \cdot \vec{x}_0 = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1$  ;
- $\sum \vec{M}_{O_1}(ext \rightarrow S_1) \cdot \vec{x}_0 = C_m + C_{21}$

On trouve alors :

$$J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 = C_m + C_{21}$$

**Q 20 : En isolant le solide 3 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant  $C_{23}$  à(aux) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.**

Le solide 3 est en mouvement de rotation par rapport à l'axe  $(O_3, \vec{z}_0)$  fixe par rapport à  $R_0$ . On peut donc appliquer le TMD par rapport à  $(O_3, \vec{z}_0)$  :

$$J_{(O_3, \vec{z}_0)}(S_3) \cdot \vec{\Omega}(3/0) \cdot \vec{z}_0 = \sum \vec{M}_{O_3}(ext \rightarrow S_3) \cdot \vec{z}_0.$$

- $J_{(O_3, \vec{z}_0)}(S_3) \cdot \vec{\Omega}(3/0) \cdot \vec{z}_0 = 0$  car les inerties sont négligeables ;
- $\sum \vec{M}_{O_3}(ext \rightarrow S_3) \cdot \vec{z}_0 = C_{23} - N_{34}$

On trouve alors :

$$0 = C_{23} - N_{34}$$

**Q 21 : Dédurre des questions précédentes l'expression de  $C_m$  en fonction de  $\ddot{z}_4, M_4, M_5, g, r_g$ , et  $J_1$ .**

En combinant les équations précédentes, on en déduit,

$$(M_4 + M_5) \ddot{z}_4 = -\frac{2\pi}{p_{34}} N_{34} - (M_4 + M_5) \cdot g$$

$\Leftrightarrow$

$$(M_4 + M_5) \ddot{z}_4 = -\frac{2\pi}{p_{34}} C_{23} - (M_4 + M_5) \cdot g$$

$\Leftrightarrow$

$$(M_4 + M_5) \ddot{z}_4 = \frac{2\pi}{p_{34}} \frac{p_{34}}{r_g \cdot 2 \cdot \pi} \cdot C_{21} - (M_4 + M_5) \cdot g$$

$\Leftrightarrow$

$$(M_4 + M_5) \ddot{z}_4 = \frac{J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - C_m}{r_g} - (M_4 + M_5) \cdot g$$

$\Leftrightarrow$

$$(M_4 + M_5) \ddot{z}_4 = \frac{-J_1 \cdot \frac{\ddot{z}_4}{r_g} - C_m}{r_g} - (M_4 + M_5) \cdot g$$

On trouve au final :

$$C_m = -r_g (M_4 + M_5) \cdot (g + \ddot{z}_4) - J_1 \frac{\ddot{z}_4}{r_g}$$

**Q 22 : On souhaite piloter le moteur avec un trapèze en vitesse. Donner les caractéristiques du trapèze en fonction des données du cahier des charges.**

- $t_a = 0,5 \text{ s}$ ;
- $\omega_{10}^{max} = \frac{\dot{z}_4^{max}}{r_g} = \frac{1e-2}{6,36 \times 10^{-5}} = 157,23 \text{ rad/s}$
- Le déplacement maximal permet d'obtenir  $t_f$  :

$$\Delta z = \int_{t=0}^{t_f} \dot{z}_4 \cdot dt = \int_{t=0}^{t_f} r_g \omega_{10} \cdot dt = r_g (t_f - t_a) \omega_{10}^{max} = (t_f - t_a) \dot{z}_4^{max}$$

On obtient alors :

$$t_f = t_a + \frac{\Delta z}{\dot{z}_4^{max}}$$

L'application numérique donne :  $t_f = 170,5 \text{ s}$

**Q 23 : Pour chaque phase du trapèze, donner l'expression du couple moteur  $C_m$  ainsi que les applications numériques associées.**

- Phase 1  $t \in [0; t_a]$  :

$$\ddot{z}_4 = \frac{\dot{z}_4^{max}}{t_a} = \frac{10 \text{ mm/s}}{0,5 \text{ s}} = 2 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$C_m = 7,07 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- Phase 2  $t \in [t_a; t_f - t_a]$  :

$$\ddot{z}_4 = 0$$

$$C_m = -3,76 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- Phase 3  $t \in [t_f - t_a; t_f]$  :

$$\ddot{z}_4 = -\frac{\dot{z}_4^{max}}{t_a} = -\frac{10 \text{ mm/s}}{0,5 \text{ s}} = -2 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$C_m = -7,05 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**Q 24 : Déterminer la fonction de transfert  $H_1(p) = \frac{V_s(p)}{U_m(p)}$  et la mettre sous forme canonique.**  
La formule de Black permet d'obtenir :

$$H_1(p) = r_g \cdot \frac{\frac{K_m}{(R+L \cdot p) \cdot (f_v + J \cdot p)}}{1 + \frac{K_m \cdot K_e}{(R+L \cdot p) \cdot (f_v + J \cdot p)}}$$

Sous forme canonique :

$$H_1(p) = \frac{\frac{r_g \cdot K_m}{R \cdot f_v + K_m \cdot K_e}}{1 + \frac{(R \cdot J + L \cdot f_v)}{R \cdot f_v + K_m \cdot K_e} \cdot p + \frac{L \cdot J}{R \cdot f_v + K_m \cdot K_e} \cdot p^2}$$

**Q 25 : Déterminer l'expression de la valeur finale de la vitesse  $V_s$  en réponse à un échelon  $U_m(p)$  d'amplitude  $U_0$ .**  
Soit  $V_{s\infty 1}$  la valeur finale de  $V_s$  pour le système non perturbé. On a :

$$V_{s\infty 1} = \left( p \cdot \frac{U_0}{p} \cdot H_1(p) \right) = \frac{r_g \cdot K_m \cdot U_0}{R \cdot f_v + K_m \cdot K_e}$$

**Q 26 : En déduire la valeur de  $U_0$  pour obtenir une vitesse  $V_s = 10 \text{ mm/s}$ .**

On a donc  $U_0 = \frac{V_{s\infty 1} \cdot (R \cdot f_v + K_m \cdot K_e)}{r_g \cdot K_m} = 223,8 \text{ V}$ .

**Q 27 : Déterminer la fonction de transfert  $H_2(p) = \frac{V_s(p)}{C_r(p)}$  et la mettre sous forme canonique.**

On a :

$$H_2(p) = -r_g \cdot \frac{\frac{1}{(f_v + J \cdot p)}}{1 + \frac{K_m \cdot K_e}{(f_v + J \cdot p) \cdot (R + L \cdot p)}}$$

Soit, sous forme canonique :

$$H_2(p) = \frac{-\frac{r_g \cdot R \cdot (1 + \frac{L}{R} \cdot p)}{(R \cdot f_v + K_m \cdot K_e)}}{1 + \frac{(R \cdot J + L \cdot f_v)}{R \cdot f_v + K_m \cdot K_e} \cdot p + \frac{L \cdot J}{R \cdot f_v + K_m \cdot K_e} \cdot p^2}$$

**Q 28 : Déterminer l'expression de la valeur finale de la vitesse  $V_s$  en réponse à un échelon  $C_r(t)$  d'amplitude  $C_{r0}$ .** Soit  $V_{s\infty 2}$  la valeur finale de  $V_s$  pour le système soumis à la seule perturbation. On a :

$$V_{s\infty 2} = \left( p \cdot \frac{C_{r0}}{p} \cdot H_2(p) \right) = -\frac{r_g \cdot R \cdot C_{r0}}{(R \cdot f_v + K_m \cdot K_e)}$$

**Q 29 : Effectuer l'application numérique pour  $C_{r0} = 12 Nm$ .**

On obtient alors  $V_{s\infty 2} = -1,15 \cdot 10^{-3} m/s$

**Q 30 : Déterminer la valeur de l'amplitude de l'échelon  $U_m(p)$ , noté  $U_1$ , afin de compenser l'effet de la perturbation  $C_r(t)$ .**

Pour compenser la perte de vitesse  $V_{s\infty 2}$ , on doit appliquer une tension supplémentaire  $\Delta U_m$ . La question concernant la partie où  $C_r(p) = 0$  permet d'écrire :

$$\Delta U_0 = -\frac{V_{s\infty 2} \cdot (R \cdot f_v + K_m \cdot K_e)}{r_g \cdot K_m}$$

D'où  $U_1 = U_0 + \Delta U_0 = \frac{(V_{s\infty 1} - V_{s\infty 2}) \cdot (R \cdot f_v + K_m \cdot K_e)}{r_g \cdot K_m}$

**Q 31 : Effectuer l'application numérique.**

Donc  $U_1 = 249,5 V$ .

**Q 32 : Justifier qu'un correcteur proportionnel-intégral  $K_i \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$  permettrait d'avoir un système précis, en boucle fermée.**

Un correcteur proportionnel-intégral augmente la classe du système, qui passe à 1. L'erreur statique est donc nulle, sous réserve de stabilité. Ce correcteur, placé en amont de la perturbation, annule également l'effet de celle-ci.