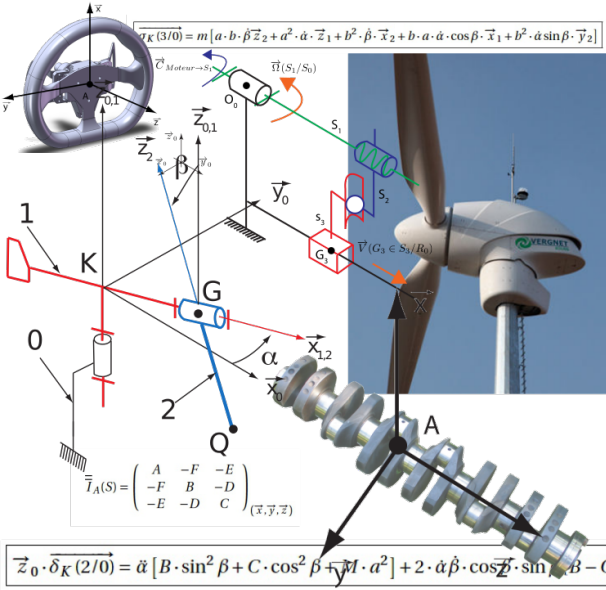
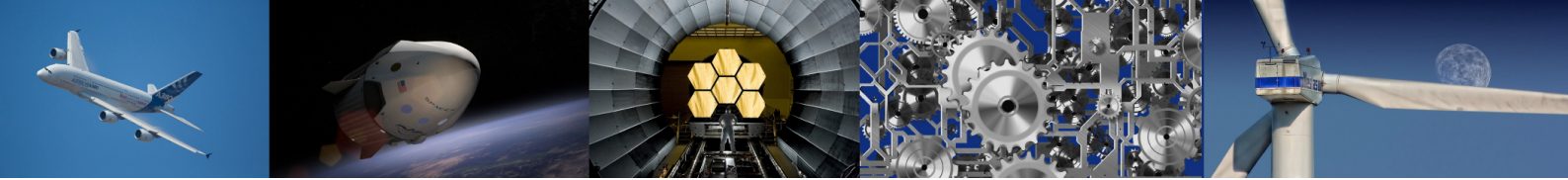




LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C4 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES DYNAMIQUES DES SYSTÈMES

TD 10 - Caractérisation inertielle des solides (C4-2)

Compétences

- **Modéliser**
 - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
 - Modéliser une action mécanique.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- **Communiquer**
 - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

Exercice 1 : Stabilisateur d'image mécanique

Source : CCMP 2018

1 Introduction

La stabilisation d'images - photo ou vidéo - est un domaine en pleine évolution. On peut distinguer deux types principaux : les stabilisateurs optiques qui améliorent la qualité par le traitement informatique des images et les stabilisateurs mécaniques qui s'opposent aux mouvements indésirables pendant la prise de vue. Nous nous intéressons à un stabilisateur actif représentés sur les figures 1. Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif.

2 Équilibrage statique

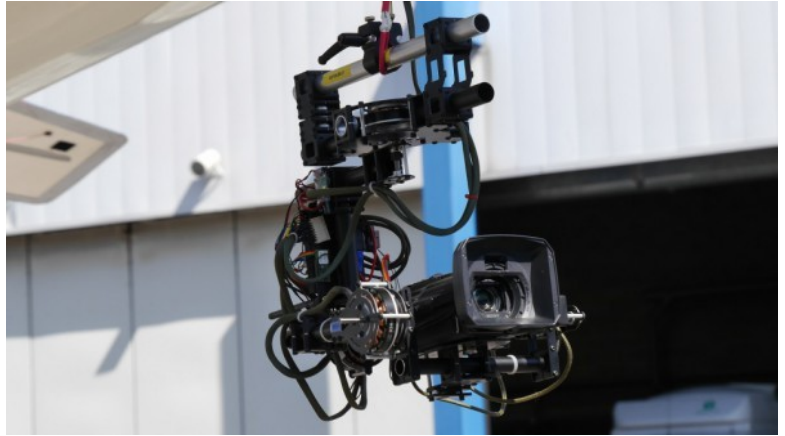
Q 1 : A l'aide des données en annexes justifier la forme du vecteur $\overrightarrow{OG_2}$, $\overrightarrow{O'G_3}$, $\overrightarrow{O'G_4}$ et $\overrightarrow{O_cG_c}$.

Notation adoptée : on appelle

- G_{4c} : le centre de gravité de l'ensemble {4, caméra},
- G_{34c} : le centre de gravité de l'ensemble {3, 4, caméra},
- et G_{234c} : le centre de gravité de l'ensemble {2, 3, 4, caméra}.



Skycam ou spydecam pour sport collectif ou tennis



Camera de télévision sous ballon

FIGURE 1 – Illustration de stabiliseurs d'images actifs

**Propriété 1 : Equilibrage statique**

- Le solide S est équilibré statiquement si G_s appartient à l'axe de rotation $(M, \vec{u})$.
- L'équilibrage est classiquement réalisé par ajout de masselottes (par exemple pour les roues de voitures) ou par enlèvement de matière par perçage (par exemple pour les vilbrequins).

Q 2 : En utilisant la définition du barycentre d'un ensemble à préciser, établir les expressions des deux valeurs réglables de position de la caméra sur le support (4) notées (y_c, z_c) en fonction des données massiques utiles (voir en annexe figures 4, 5, 6 et 7) assurant ainsi l'équilibrage de la nacelle selon l'axe de tangage. Donner une estimation numérique de y_c et de z_c (en millimètres) ;

Q 3 : A la fin de la procédure d'équilibrage de l'axe de tangage, exprimer $\overrightarrow{O'G_{4c}}$;

Q 4 : Compléter alors la 1^{ère} ligne du tableau du document-réponse en indiquant les solides concernés par la procédure d'équilibrage ainsi que le décalage à effectuer (utiliser le symbole P).

Q 5 : Sans faire de calculs, compléter les lignes 2 et 3 du tableau du document réponse en indiquant le nom de l'axe, les solides concernés par la procédure d'équilibrage ainsi que la direction du décalage à effectuer (utiliser le symbole P) .

Ordre	Nom de l'axe	Solides concernés	$\pm \vec{X}_i$	$\pm \vec{Y}_i$	$\pm \vec{Z}_i$
1 ^{er}	tangage	4+c		✓	✓
2 ^e	roulis	3+4+c	✓		
3 ^e	lacet	2+3+4+c		(✓)	

3 Modélisation dynamique

Pour modéliser dynamique le système on doit quantifier l'opérateur d'inertie de l'ensemble $\{2 + 3 + 4\}$ dans la base $b_c = (\vec{x}_x, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$. On notera A_i, B_i, C_i, D_i, E_i et F_i les termes de l'opérateur d'inertie du solide i exprimé dans la base associé au solide i au point O' .

- Lacet : $\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\theta}_{21} \vec{z}_{1,2}$ et $\theta_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
- Roulis : $\vec{\Omega}(3/2) = \dot{\theta}_{32} \vec{y}_{2,3}$ et $\theta_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$;
- Tangage : $\vec{\Omega}(4/3) = \dot{\theta}_{43} \vec{x}_{3,4}$ et $\theta_{43} = (\vec{y}_3, \vec{y}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$

Q 6 : Donner la forme des opérateurs d'inertie des solides 2, 3 et 4 dans leur bases respectives en tenant compte des symétries.

Q 7 : Dans le cas d'angles de roulis et de tangage nuls donner l'expression de l'opérateur d'inertie de l'ensemble $E_{234} = \{2, 3, 4\}$ dans la base $b_c = (\vec{x}_x, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ en O' .

Q 8 : Dans ces conditions, déterminer l'opérateur d'inertie de l'ensemble $E_{234c} = \{2, 3, 4, \text{caméra}\}$ en O' .

4 Annexes : données massiques des constituants de la nacelle

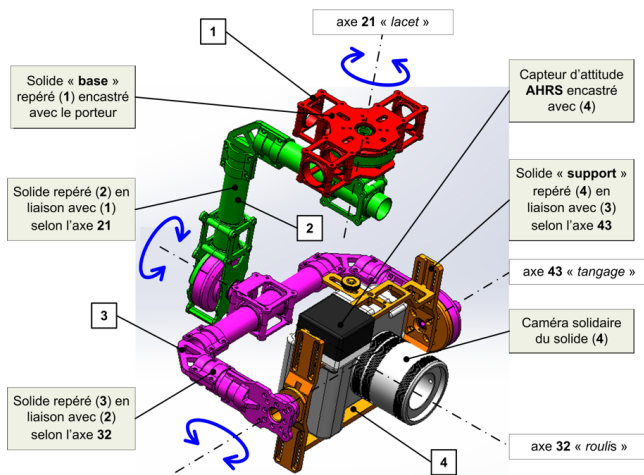


FIGURE 2 – Vue de la caméra stabilisée

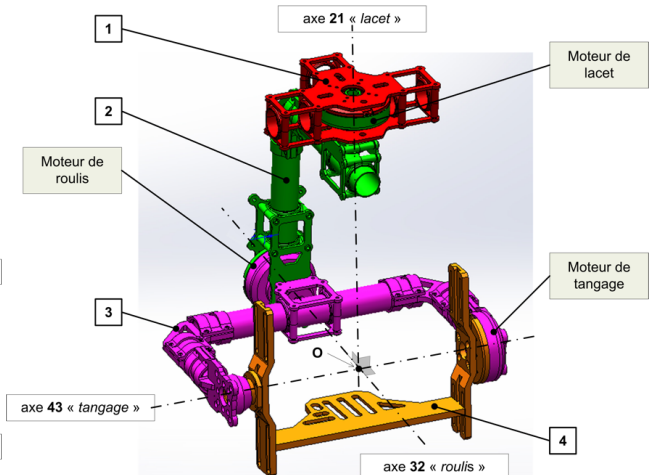


FIGURE 3 – Vue de la nacelle seule

Remarque importante : les données numériques sont fournies pour une configuration « primaire » de la nacelle (avant toute procédure d'équilibrage) pour laquelle **les points O et O' sont supposés parfaitement confondus**.

On rappelle que le **point O** se trouve toujours à l'intersection entre l'axe **lacet** et l'axe **roulis** alors que le **point O'** se trouve toujours à l'intersection entre l'axe **roulis** et l'axe **tangage**.

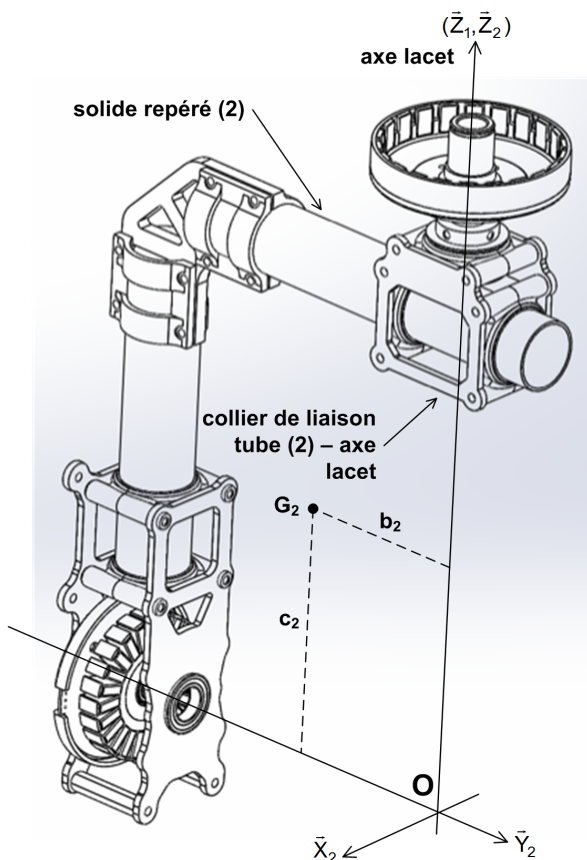


FIGURE 4 – Description du solide 2

SOLIDE (2)

- masse ; m_2
- centre de gravité G_2 tel que $\overrightarrow{OG_2} = -b_2 \vec{y}_2 + c_2 \vec{z}_2$
- données numériques *initiales* :

$$\begin{aligned} m_2 &= 340g \\ b_2 &= 80mm \\ c_2 &= 160mm \end{aligned}$$

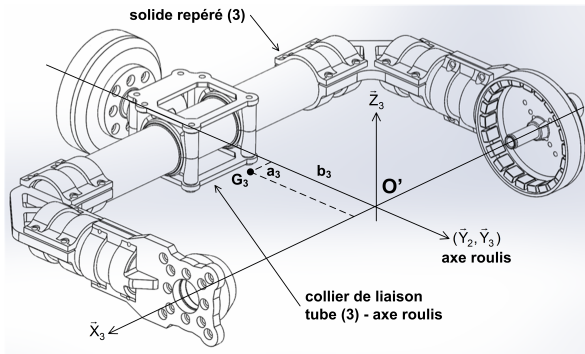


FIGURE 5 – Description du solide 3

SOLIDE (3)

- masse ; m_3
- centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{O'G_3} = -a_3 \vec{x}_3 - b_3 \vec{y}_3$
- données numériques *initiales* :

$$m_3 = 390g$$

$$a_3 = 4mm$$

$$b_3 = 82mm$$

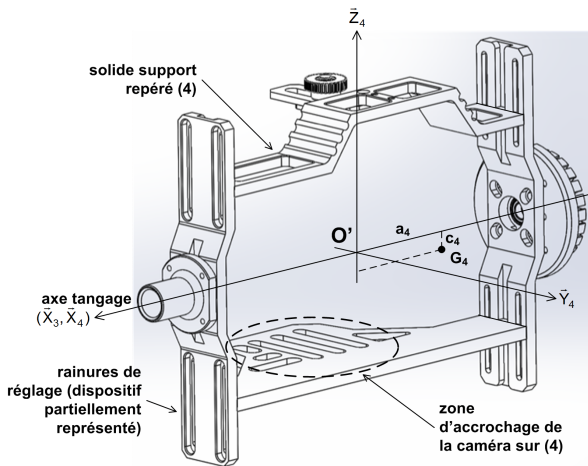


FIGURE 6 – Description du solide 4

SOLIDE (4) : support

- masse ; m_4
- centre de gravité G_4 tel que $\overrightarrow{O'G_4} = -a_4 \vec{x}_4 - c_4 \vec{z}_4$
- données numériques *initiales* :

$$m_4 = 350g$$

$$a_4 = 24mm$$

$$c_4 = 4mm$$

CAMERA COMPLETE (boitier, objectif, AHRS)

- masse ; m_c
- centre de gravité G_c tel que

$$\overrightarrow{O'O_c} = x_c \vec{x}_4 + y_c \vec{y}_4 + z_c \vec{z}_4$$

$$\overrightarrow{O_c G_c} = a_c \vec{x}_4 + b_c \vec{y}_4 + c_c \vec{z}_4$$

- Le point O_c représente le point d'accroche du boitier de la caméra sur le support (4)
- données numériques *initiales* :

$$m_c = 1000g$$

$$a_c = 16mm$$

$$b_c = 20mm$$

$$c_c = 48mm$$

- opérateur d'inertie en O_c exprimée dans la base B_c :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(cam) = \begin{pmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

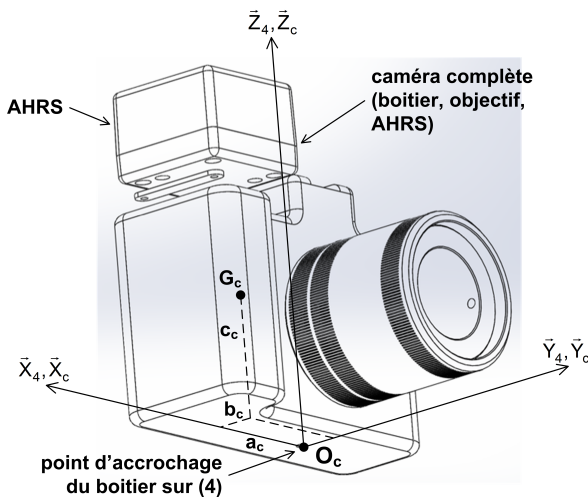


FIGURE 7 – Description de la caméra complète

Exercice 2 : Inertie d'un cadre de transport de moules d'injection plastique

Source : e3a PSI 2008

On s'intéresse à la détermination des caractéristiques inertielles d'un cadre support d'un moule destiné à l'injection plastique des tableaux de bord automobile (figure 8).



FIGURE 8 – Photo d'un tableau de bord

L'objectif de l'étude est de déterminer les caractéristiques inertielles nécessaires pour assurer les niveaux de la fonction technique : "assurer les déplacements des moules d'un poste à l'autre".

La matrice d'inertie du cadre au point O_c , milieu du cadre se trouvant sur l'axe de rotation $(O_c, \vec{x}_c)$ de celui-ci avec le plateau, dans la base $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ est la suivante :

$$\bar{I}_{O_c}(\text{cadre}) = \begin{pmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

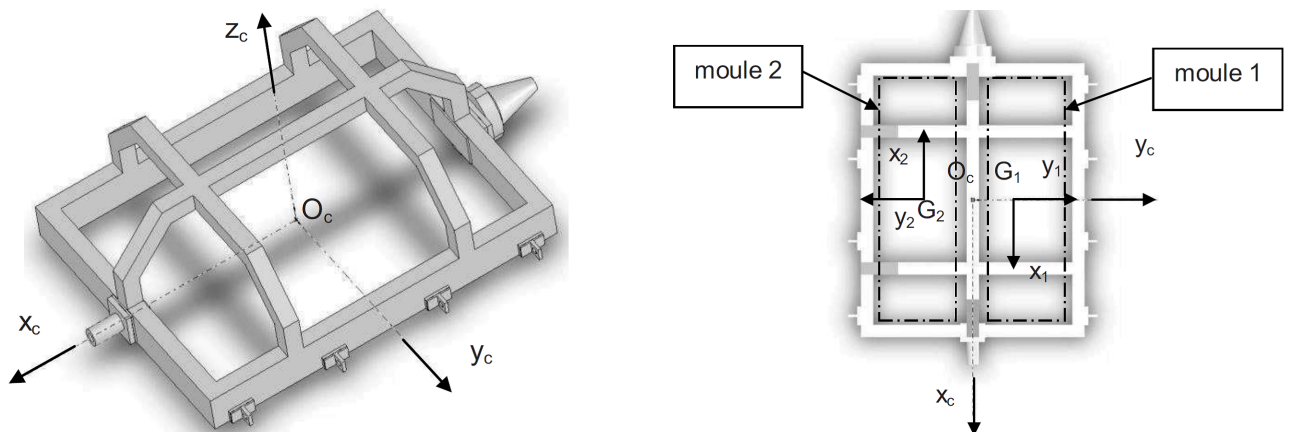


FIGURE 9 – Caractéristiques géométrique du cadre

Q 9 : Indiquer les termes nuls de cette matrice et préciser pourquoi.

Le cadre est équipé de deux moules identiques respectivement 1 et 2 montés en opposition (voir bases associées). Les matrices d'inertie des moules 1 et 2, au point O_c dans leurs bases respectives : $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $b_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ sont identiques :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(\text{moule1}) = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

et

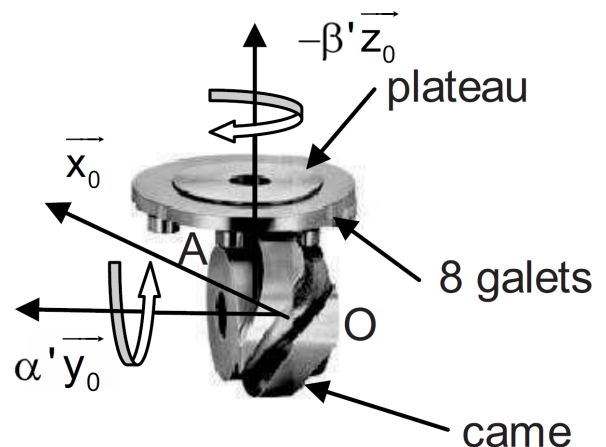
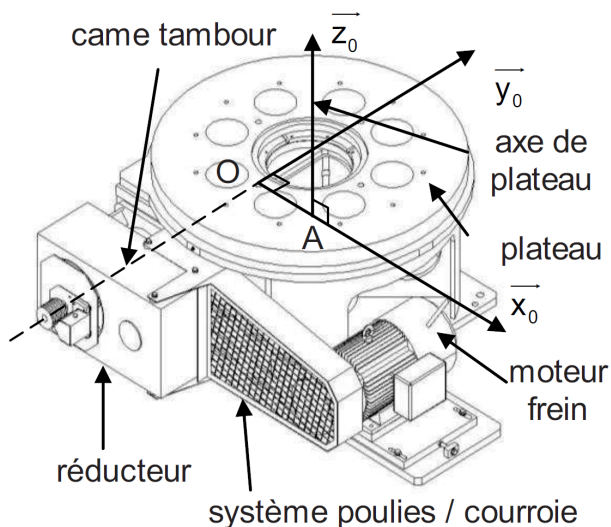
$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(\text{moule2}) = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Q 10 : Déterminer littéralement la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point O_c dans la base $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ en fonction des termes de la matrice précédente :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(\text{cadre} + \text{moules}) = \begin{pmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

Q 11 : Effectuer l'application numérique. $A_c = 159,22 \text{ kg.m}^2$, $B_c = 426,02 \text{ kg.m}^2$, $C_c = 531,77 \text{ kg.m}^2$, $E_c = 0,06 \text{ kg.m}^2$
 $A_m = 14,38 \text{ kg.m}^2$, $B_m = 15,43 \text{ kg.m}^2$, $C_m = 21,44 \text{ kg.m}^2$, $D_m = 5,32 \text{ kg.m}^2$, $E_m = 0,36 \text{ kg.m}^2$, $F_m = -0,04 \text{ kg.m}^2$
 On donne :

- La masse m_{cm} d'un cadre équipé de deux moules;
- Le moment d'inertie C_{cm} d'un cadre équipé de deux moules autour de l'axe $(O_c, \vec{z}_c)$;
- Le centre de gravité d'un cadre équipé de deux moules est sur l'axe $(O_c, \vec{z}_c)$ et situé à une distance d par rapport à l'axe de rotation $(A, \vec{z}_0)$ du plateau indexeur ($\vec{z}_0 = \vec{z}_c$) (voir les deux figures suivantes avec $O = O_c$);
- Le moment d'inertie C_p du plateau indexeur par rapport à l'axe de rotation $(A, \vec{z}_0)$.
- L'inertie des "peaux fabriquées" étant négligée par rapport à celle du cadre équipé de deux moules.



Q 12 : Déterminer littéralement le moment d'inertie C de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses quatre cadres et huit moules par rapport à l'axe de rotation $(A, \vec{z}_0)$ en fonction des termes précédents.

Q 13 : Application numérique avec $C_{cm} = 575 \text{ kg.m}^2$; $m_{cm} = 500 \text{ kg}$; $d = 2,95 \text{ m}$; $C_p = 1500 \text{ kg.m}^2$

Corrigé

Exercice 1 : Stabilisateur d'image mécanique

Q 1 : A l'aide des données en annexes justifier la forme du vecteur $\overrightarrow{OG_2}$, $\overrightarrow{O'G_3}$, $\overrightarrow{O'G_4}$ et $\overrightarrow{O_cG_c}$.

- $\overrightarrow{OG_2}$:
Le solide 2 possède un plan de symétrie $(O, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ donc $\overrightarrow{OG_2} \cdot \vec{x}_2 = 0$,
- $\overrightarrow{O'G_3}$
Le solide 3 possède un plan de symétrie $(O', \vec{x}_3, \vec{y}_3)$ donc $\overrightarrow{O'G_3} \cdot \vec{z}_3 = 0$
- $\overrightarrow{O'G_4}$
Le solide 4 possède un plan de symétrie $(O', \vec{x}_4, \vec{z}_4)$ donc $\overrightarrow{O'G_4} \cdot \vec{y}_4 = 0$
- $\overrightarrow{O_cG_c}$
Le solide S_c ne possède pas de symétrie donc le vecteur position du centre d'inertie est quelconque.

Q 2 : En utilisant la définition du barycentre d'un ensemble à préciser, établir les expressions des deux valeurs réglables de position de la caméra sur le support (4) notées (y_c , z_c) en fonction des données massiques utiles (voir en annexe figures 4, 5, 6 et 7) assurant ainsi l'équilibrage de la nacelle selon l'axe de tangage. Donner une estimation numérique de y_c et de z_c (en millimètres);

L'axe de tangage est l'axe $(O', \vec{x}_4)$. Pour assurer l'équilibrage statique autour de cet axe, il faut que G_{4c} soit sur l'axe, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{O'G_{4c}} \cdot \vec{y}_4 = 0 \\ \overrightarrow{O'G_{4c}} \cdot \vec{z}_4 = 0 \end{cases}$$

Or : $(m_4 + m_c)\overrightarrow{O'G_{4c}} = m_4\overrightarrow{O'G_4} + m_c\overrightarrow{O'G_c} = [-m_4a_4 + (x_c + a_c)m_c]\vec{x}_4 + [(y_c + b_c)m_c]\vec{y}_4 + [-m_4c_4 + (c_c + z_c)m_c]\vec{z}_4$
Les conditions de position de G_{4c} sur l'axe s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} y_c + b_c = 0 \\ -m_4c_4 + (c_c + z_c)m_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_c = -b_c \\ z_c = (m_4c_4 - m_cc_c)/m_c \end{cases} \quad \text{Application numérique : } \begin{cases} y_c = -20 \text{ mm} \\ z_c = -46,6 \text{ mm} \end{cases}$$

Q 3 : A la fin de la procédure d'équilibrage de l'axe de tangage, exprimer $\overrightarrow{O'G_{4c}}$;

$$\overrightarrow{O'G_{4c}} = \frac{-m_4a_4 + (x_c + a_c)m_c}{m_4 + m_c} \vec{x}_4$$

Q 4 : Compléter alors la 1^{ère} ligne du tableau du document-réponse en indiquant les solides concernés par la procédure d'équilibrage ainsi que le décalage à effectuer (utiliser le symbole P).

Ordre	Nom de l'axe	Solides concernés	$\pm \vec{X}_i$	$\pm \vec{Y}_i$	$\pm \vec{Z}_i$
1 ^{er}	tangage	4+c		✓	✓
2 ^e	roulis	3+4+c	✓		
3 ^e	lacet	2+3+4+c		(✓)	

D'après les données de l'énoncé, l'axe de roulis est déjà équilibré suivant Z_i car $\overrightarrow{O'G_3} \cdot \vec{z}_3 = 0$ et $\overrightarrow{O'G_{4c}} \cdot \vec{z}_3 = 0$ après équilibrage du tangage.

De même, d'après les données de l'énoncé, l'axe de lacet est déjà équilibré suivant X_i car $\overrightarrow{O'G_2} \cdot \vec{x}_2 = 0$ et $\overrightarrow{O'G_{4c}} \cdot \vec{x}_2 = 0$ après équilibrage du roulis.

Enfin, d'un point de vue *statique*, le poids ne travaille pas par rotation autour de l'axe de lacet suivant $\vec{z}_1$ donc l'équilibrage statique est inutile vis-à-vis du poids (mais pas des accélérations), d'où la case (✓).

Q 5 : Sans faire de calculs, compléter les lignes 2 et 3 du tableau du document réponse en indiquant le nom de l'axe, les solides concernés par la procédure d'équilibrage ainsi que la direction du décalage à effectuer (utiliser le symbole P).

Q 6 : Donner la forme des opérateurs d'inertie des solides 2, 3 et 4 dans leur bases respectives en tenant compte des symétries.

- **Solide 2** : le plan $(O', \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est plan principal d'inertie donc $\vec{x}_2$ est direction principale d'inertie.

$$\bar{\bar{I}}_{O'}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{1,2})}$$

- **Solide 3** : le plan $(O', \vec{x}_3, \vec{y}_3)$ est plan principal d'inertie donc $\vec{z}_3$ est direction principale d'inertie.

$$\bar{\bar{I}}_{O'}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_{2,3}, \vec{z}_3)}$$

- **Solide 4** : le plan $(O', \vec{x}_4, \vec{z}_4)$ est plan principal d'inertie donc $\vec{y}_4$ est direction principale d'inertie.

$$\bar{\bar{I}}_{O'}(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & -E_4 \\ 0 & B_4 & 0 \\ -E_4 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_{3,4}, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

Q 7 : Dans le cas d'angles de roulis et de tangage nuls donner l'expression de l'opérateur d'inertie de l'ensemble

$E_{234} = \{2, 3, 4\}$ dans la base $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$.

Dans ce cas particulier les 3 bases sont identiques, on peut donc sommer les opérateurs d'inerties :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{I}}_{O'}(E_{234}) &= \bar{\bar{I}}_{O'}(S_2) + \bar{\bar{I}}_{O'}(S_3) + \bar{\bar{I}}_{O'}(S_4) \\ &= \bar{\bar{I}}_{O'}(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 + A_3 + A_2 & -F_3 & -E_4 \\ -D_2 & B_4 + B_3 + B_2 & -D_2 \\ -E_4 & -F_3 & C_4 + C_3 + C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_{4,c}, \vec{y}_{4,c}, \vec{z}_{4,c})} \end{aligned}$$

Q 8 : Dans ces conditions, déterminer l'opérateur d'inertie de l'ensemble $E_{234c} = \{2, 3, 4, \text{caméra}\}$ en O' .

$$\bar{\bar{I}}_{O'}(E_{c234}) = \bar{\bar{I}}_{O'}(E_{234}) + \bar{\bar{I}}_{O'}(c)$$

On connaît uniquement $\bar{\bar{I}}_{O_c}(c)$. Ainsi pour déterminer $\bar{\bar{I}}_{O'}(c)$ on peut exprimer deux fois le théorème de Huygens :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(c) = \bar{\bar{I}}_{G_c}(c) + \bar{\bar{I}}_{O_c G_c}(c)$$

$$\bar{\bar{I}}_{O'}(c) = \bar{\bar{I}}_{G_c}(c) + \bar{\bar{I}}_{O' G_c}(c)$$

On soustrayant ces deux équations on obtient ;

$$\bar{\bar{I}}_{O'}(c) = \bar{\bar{I}}_{O_c}(c) - \bar{\bar{I}}_{O_c G_c}(c) + \bar{\bar{I}}_{O' G_c}(c)$$

On donne les vecteurs positions :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'O_c} &= x_c \vec{x}_4 + y_c \vec{y}_4 + z_c \vec{z}_4 \\ \overrightarrow{O_c G_c} &= a_c \vec{x}_4 + b_c \vec{y}_4 + c_c \vec{z}_4\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\bar{\bar{I}}_{O'}(c) =$$

$$\begin{pmatrix} A_c + mc[(z_c + c_c)^2 - c_c^2] + (y_c + b_c)^2 - b_c^2 & -F_c - mc[(x_c + a_c) \cdot (y_c + b_c) - a_c \cdot b_c] & -E_c - mc[(x_c + a_c) \cdot (z_c + c_c) - a_c \cdot c_c] \\ -F_c - mc[(x_c + a_c) \cdot (y_c + b_c) - a_c \cdot b_c] & B_c + mc[(z_c + c_c)^2 - c_c^2] + (x_c + a_c)^2 - a_c^2 & -D_c - mc[(y_c + b_c) \cdot (z_c + c_c) - b_c \cdot c_c] \\ -E_c - mc[(x_c + a_c) \cdot (z_c + c_c) - a_c \cdot c_c] & -D_c - mc[(y_c + b_c) \cdot (z_c + c_c) - b_c \cdot c_c] & C_c + mc[(x_c + a_c)^2 - a_c^2] + (y_c + b_c)^2 - b_c^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

Exercice 2 : Inertie d'un cadre de transport de moules d'injection plastique

Q 9 : Indiquer les termes nuls de cette matrice et préciser pourquoi.

Le plan $(O_c, \vec{z}_0, \vec{x}_c)$ est plan de symétrie.

Les produits d'inertie $F_c = 0$ et $D_c = 0$.

La matrice d'inertie s'écrit alors :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(cadre) = \begin{pmatrix} A_c & 0 & -E_c \\ 0 & B_c & 0 \\ -E_c & 0 & C_c \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

Q 10 : Déterminer littéralement la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point O_c dans la base $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ en fonction des termes de la matrice précédente :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(cadre + moules) = \begin{pmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(cadre + moules)_{b_c} = \bar{\bar{I}}_{O_c}(cadre)_{b_c} + \bar{\bar{I}}_{O_c}(moule1)_{b_{1,c}} + \bar{\bar{I}}_{O_c}(moule2)_{b_c}$$

On remarque que dans l'énoncé les trois matrices d'inertie sont exprimées au même point. Seules la base de la matrice d'inertie du moule 2 est différente. On effectue un changement de base avec la relation :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(moule2)_{b_c} = \bar{\bar{P}}^{-1}(b_2 \rightarrow b_c) \cdot \bar{\bar{I}}_{O_c}(moule2)_{b_2} \cdot \bar{\bar{P}}(b_2 \rightarrow b_c)$$

Or,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_c = -\vec{x}_2 \\ \vec{y}_c = -\vec{y}_2 \\ \vec{z}_c = \vec{z}_2 \end{array} \right. \quad \text{Donc,} \quad \overline{\overline{P}}(b_2 \rightarrow b_c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve alors :

$$\overline{\overline{I}}_{O_c}(\text{moule2})_{b_c} = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & E_m \\ -F_m & B_m & D_m \\ E_m & D_m & C_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

Et,

$$\overline{\overline{I}}_{O_c}(\text{moule2})_{b_c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot A_m + A_c & -2 \cdot F_m & -E_c \\ -2 \cdot F_m & 2 \cdot B_m + B_c & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot C_m + C_c \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

Q 11 : Effectuer l'application numérique. $A_c = 159,22 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $B_c = 426,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $C_c = 531,77 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $E_c = 0,06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
 $A_m = 14,38 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $B_m = 15,43 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $C_m = 21,44 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $D_m = 5,32 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $E_m = 0,36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $F_m = -0,04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{cm} = 187,88 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ B_{cm} = 456,88 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ C_{cm} = 574,65 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{cm} = 0,08 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ E_{cm} = 0,06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{array} \right.$$

Q 12 : Déterminer littéralement le moment d'inertie C de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses quatre cadres et huit moules par rapport à l'axe de rotation $(A, \vec{z}_0)$ en fonction des termes précédents.

Par application du théorème de Huygens pour le moment d'inertie sur z_c :

$$C = 4 \cdot (C_{cm} + m_{cm} \cdot d^2) + C_p$$

Q 13 : Application numérique avec $C_{cm} = 575 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $m_{cm} = 500 \text{ kg}$; $d = 2,95 \text{ m}$; $C_p = 1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$$C = 4 \cdot (575 + 500 \cdot 2,95^2) + 1500 = 21205 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$