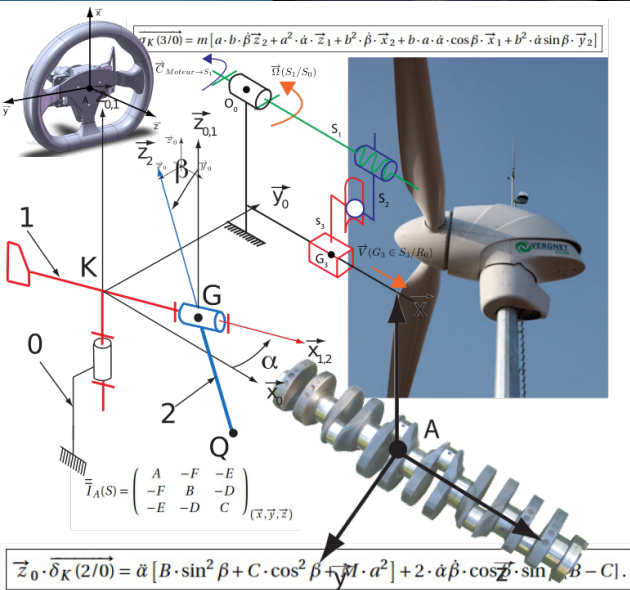
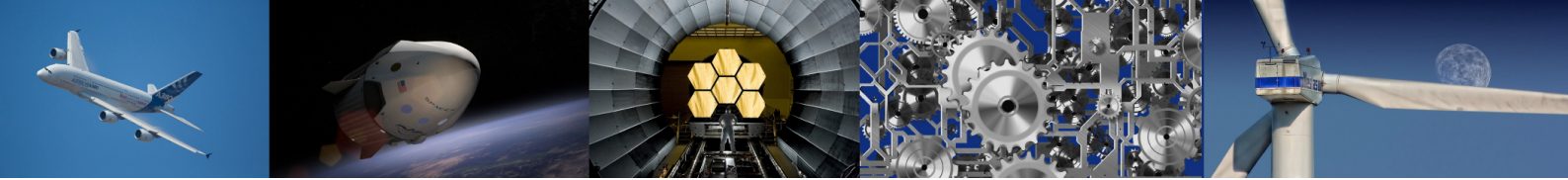




LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C4 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES DYNAMIQUES DES SYSTÈMES

TD 12 - Détermination des équations de mouvements des systèmes par l'approche dynamique (C4-1;4-2;4-3)

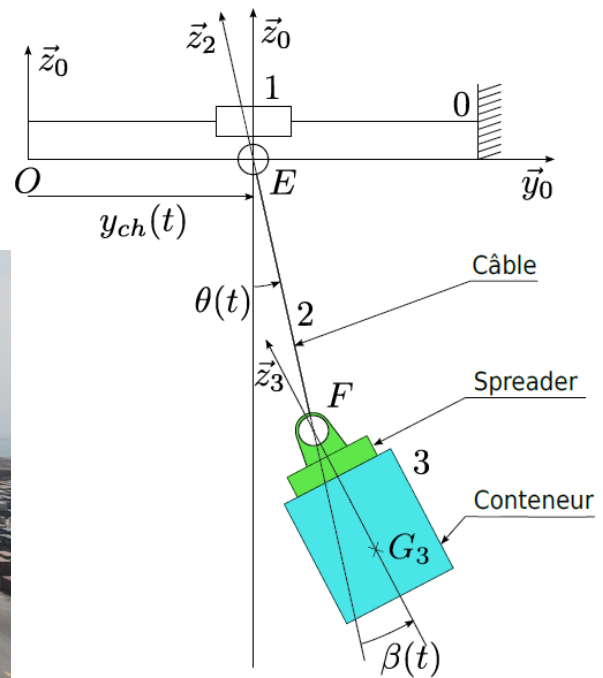
Compétences

- **Modéliser**
 - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
 - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
 - Modéliser une action mécanique.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
 - Déterminer les actions mécaniques en statique.
 - Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
 - Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.
 - Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations.
- **Communiquer**
 - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

Exercice 1 : Grue de chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs

Source : CCCS PSI 2013

1 Introduction



Objectif 1 :

Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

En vue d'élaborer une commande automatisée du déchargement des conteneurs, une bonne compréhension de la dynamique du système est nécessaire. Cette partie vise à établir les équations du mouvement du conteneur. La charge peut alors balancer selon le modèle présenté ci-après. Dans cette étude, la vitesse de vent nulle. On fait l'hypothèse que le conteneur est suspendu à un seul câble indéformable, en liaison pivot à ses extrémités. Les liaisons entre les solides 0, 1, 2 et 3 sont supposées parfaites. Le portique support du chariot est noté 0, le chariot 1, le câble 2 et l'ensemble {spreader + conteneur} 3.

2 Paramétrage

- Le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, x_0, y_0, z_0)$ est lié au portique fixe; il est supposé galiléen avec $\vec{z}_0$ l'axe vertical ascendant.
- La position du chariot telle que $\vec{OE} = y_{ch}(t)\vec{y}_0$ est notée $y_{ch}(t)$; l'angle $(\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ d'inclinaison du câble $\theta(t)$ et l'angle $(\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ d'inclinaison du conteneur par rapport au câble $\beta(t)$.

3 Données

- $\mathcal{R}_1 = (E, x_0, y_0, z_0)$ repère lié au chariot de levage 1.
 - $\mathcal{R}_2 = (E, x_0, y_2, z_2)$ repère lié au câble 2; $\ell_2 = 50\text{ m}$ la longueur EF du câble; la masse est négligée.
 - $\mathcal{R}_3 = (F, x_0, y_3, z_3)$ repère lié à l'ensemble {spreader + conteneur}; $m_3 = 50\text{ tonnes}$ la masse du solide 3; G_3 le centre de gravité du solide 3, tel que $\vec{G_3F} = h_3\vec{z}_3$ où $h_3 = 2.5\text{ m}$; la matrice d'inertie du solide 3 s'écrit $I_3(G_3) =$
- $$\begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} \quad \text{où} \quad \begin{cases} A_3 = 52 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ B_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ C_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \end{cases}$$

- la motorisation M_D du mouvement de direction exerce, par l'intermédiaire de câbles, des actions mécaniques sur (1) qui se réduisent à un glisseur de la forme $\overrightarrow{R}(M_D \rightarrow 1) = F \overrightarrow{y_0}$;
- l'action mécanique du câble sur le spreader est notée $\overrightarrow{R}(2 \rightarrow 3) = F_{23} \overrightarrow{z_2}$.

4 Modélisation

Q 1 : Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

5 Résolution

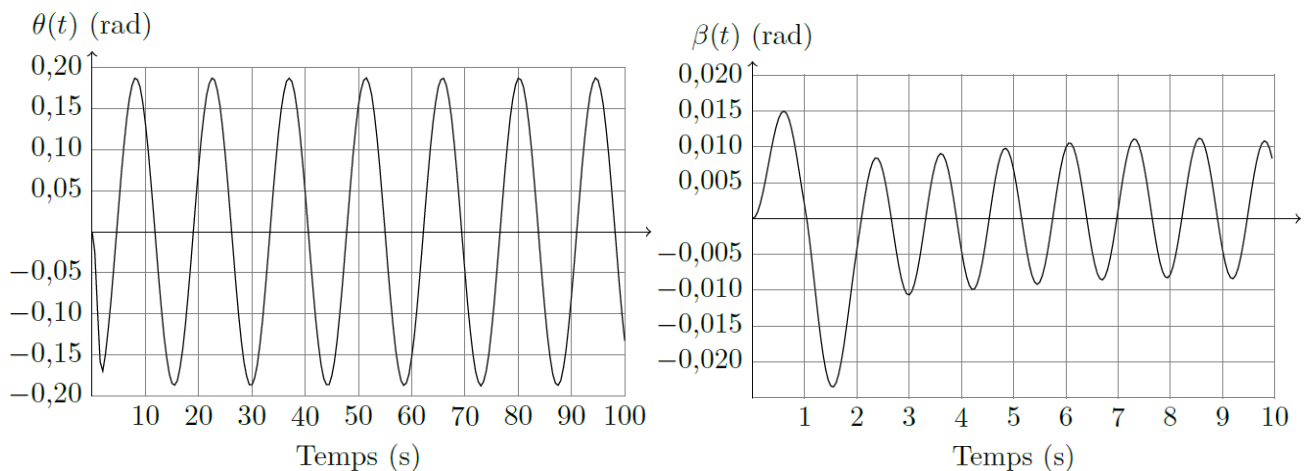
Q 2 : Déterminer littéralement, au point G_3 , la vitesse $\overrightarrow{V}(G_3 \in 3/0)$ puis le torseur dynamique $\{\delta(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0$.

Q 3 : En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

Q 4 : En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

Q 5 : En supposant que θ , β , $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.



Q 6 : Proposer une simplification de la modélisation précédente.

Exercice 2 : Modélisation dynamique du Segway

Source : Emilien DURIF

1 Étude du gyropode segway

a) Présentation du système

Le Segway est un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. La conduite du Segway se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière de façon à accélérer ou freiner le mouvement. Une fois monté sur la plate-forme, le conducteur reste en équilibre bien que le centre de gravité de l'ensemble (Segway et conducteur) soit situé au-dessus de l'axe des roues. Les exigences du système sont en partie détaillées dans le diagramme des exigences ci-dessous.

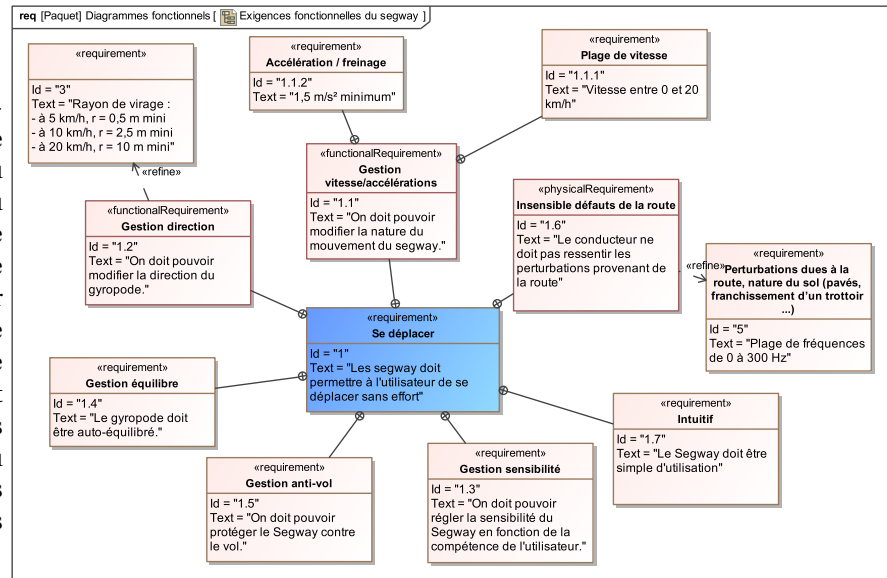


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel du Segway

b) Modélisation dynamique

On donne le paramétrage en deux dimensions du segway avec une vue sur le côté (figure 2).

Paramètre dynamique des solides :

Châssis S_1 de centre d'inertie G_1 et de masse m_1

- Repère associé : $R_1 = (G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- Opérateur d'inertie :

$$\bar{\bar{I}}_A(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Roue S_2 de centre d'inertie A et de masse m_2

- Repère associé : $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- Opérateur d'inertie :

$$\bar{\bar{I}}_A(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

- Le sol est noté S_0 et le repère associé $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé galiléen.
- Le point I est le point de contact de la roue S_2 avec le sol S_0 . A est un point de l'axe de rotation des roues S_2 par rapport au châssis S_1 .
- $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ est l'angle de rotation du châssis par rapport au sol ($\alpha = 0$) lorsque le support du châssis est parfaitement horizontal et donc lorsque la tige de guidage est verticale.
- $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est l'angle de rotation de la roue par rapport au châssis.
- On note $R = \|\vec{IA}\|$ le rayon de la roue et $L_1 = \|\vec{AG}\|$ la distance du centre de gravité G à l'axe des roues.
- Soit $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$ l'accélération de la pesanteur (avec $g = 9,81 m \cdot s^{-2}$).
- on pose $\dot{x}(t)$ le paramètre de mouvement de déplacement de translation du véhicule tel que $\vec{V}(A \in 2/0) = \dot{x} \vec{x}_0$.
- Le moteur est composé d'un stator fixé à S_1 et d'un rotor solidaire de S_2 , on note C_m le couple qu'exerce le stator sur le moteur selon la direction $\vec{z}_0$.

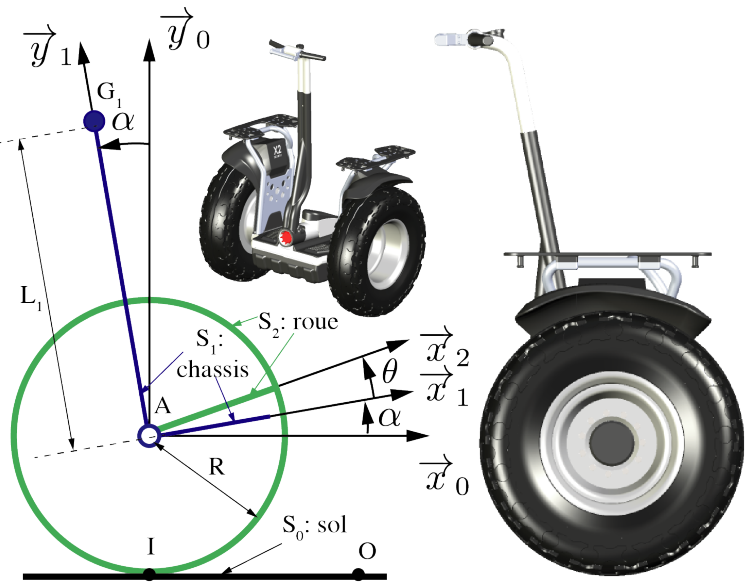


FIGURE 2 – Paramétrage cinématique du Segway

Q 7 : Donner le graphe de structure du problème.

Q 8 : Traduire la condition de roulement sans glissement en I et donner une relation en $\dot{x}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\theta}$ et R .

Q 9 : Proposer un ordonnancement des isolements permettant d'obtenir une équation de mouvement.

Q 10 : Mettre en oeuvre les isolements et traduire les équilibres dynamiques et obtenir deux équations de mouvement en fonction des paramètres de mouvement $\alpha(t)$, $\theta(t)$, $x(t)$, de C_m et des constantes géométriques du problème.

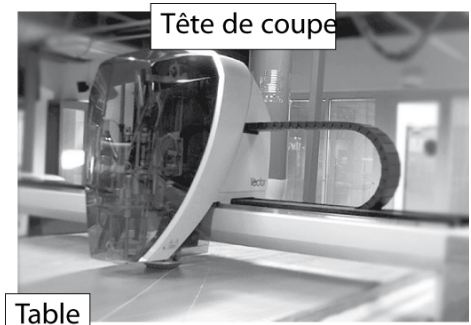
Exercice 3 : Tete de découpe de tissu

Source : CCP MP 2018

1 Présentation

Le système étudié dans ce sujet est une tête de coupe de tissus conçue et réalisée par la société française Lectra, leader mondial dans la découpe automatisée des tissus. Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure 3) :

- d'une table de découpe sur laquelle le tissu à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration ;
- d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction $\vec{y}_0$ par rapport à la table ;
- d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction $\vec{x}_0$ par rapport au bras transversal ;
- d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.



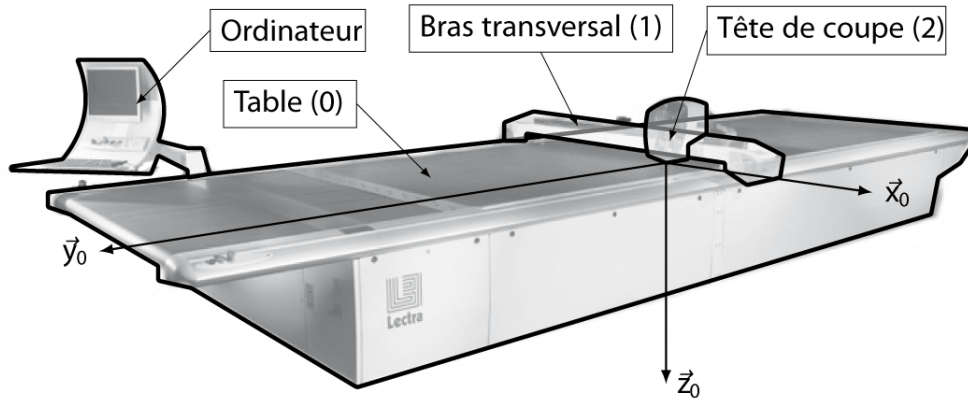


FIGURE 3 – Structure d'une table de découpe de tissus

Dans ce sujet, nous nous intéresserons plus particulièrement à la tête de coupe proposée par Lectra dans deux versions (initiale et améliorée) dont le diagramme partiel des exigences pour la solution de découpe (logiciel/machine) est présenté dans la figure 4.

2 Modélisation du comportement mécanique de la tête de coupe



Objectif 2 :

Modéliser le comportement dynamique de la tête de coupe afin d'identifier un phénomène de vibration néfaste au regard de l'exigence 1.2.2.

a) Modélisation du comportement cinématique de la tête de coupe

La découpe du tissu est réalisée par un mouvement de translation alternative d'une lame par rapport au matelas de tissus. Ce mouvement est obtenu par un système bielle-manivelle dont le schéma cinématique est donné par la figure 5. Les mouvements de translation de la tête de coupe par rapport à la table impliquent que les bases $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, liées respectivement à la tête de coupe et à la table, sont identiques (figure 1).

Modélisation des liaisons et paramétrage du système

- On associe le repère $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ à la tête 2, le repère $\mathcal{R}_3 = (A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ à la manivelle 3, le repère $\mathcal{R}_4 = (B, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ à la bielle 4 et le repère $\mathcal{R}_5 = (C, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ à la lame 5.
- La manivelle 3 est en liaison pivot avec la tête 2, d'axe $(A, \vec{y}_2)$ et d'angle $\theta_{32}(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$.
- La manivelle 3 est en liaison pivot avec la bielle 4, d'axe $(B, \vec{y}_2)$ et d'angle $\theta_{43}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$.
- La bielle 4 est en liaison pivot avec la lame 5, d'axe $(C, \vec{y}_0)$ et d'angle $\theta_{54}(t) = (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = (\vec{z}_4, \vec{z}_2)$.
- La lame 5 est en liaison glissière avec la tête 2, de direction $\vec{z}_2$ et de paramètre linéaire $\lambda(t)$.

- On pose $\omega_{ij}(t) = \frac{d\theta_{ij}(t)}{dt} = \dot{\theta}_{ij}(t)$, $\vec{AB} = L_3 \vec{z}_3$ avec $L_3 = 12,5 \text{ mm}$, $\vec{BC} = L_4 \vec{z}_4$ avec $L_4 = 80 \text{ mm}$ et $\vec{AC} = \lambda(t) \vec{z}_2$.

On peut montrer en résolvant le problème cinématique et sous certaines hypothèses :

Loi d'entrée sortie géométrique :

$$\lambda(t) = L_3 \cos \theta_{32}(t) + L_4$$

Loi d'entrée-sortie cinématique :

$$\dot{\lambda}(t) = -\dot{\theta}_{32} L_3 \sin \theta_{32} = -\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32}$$

- Simplification de loi géométrique :** en exploitant les résultats de l'étude géométrique précédente, on peut montrer que :

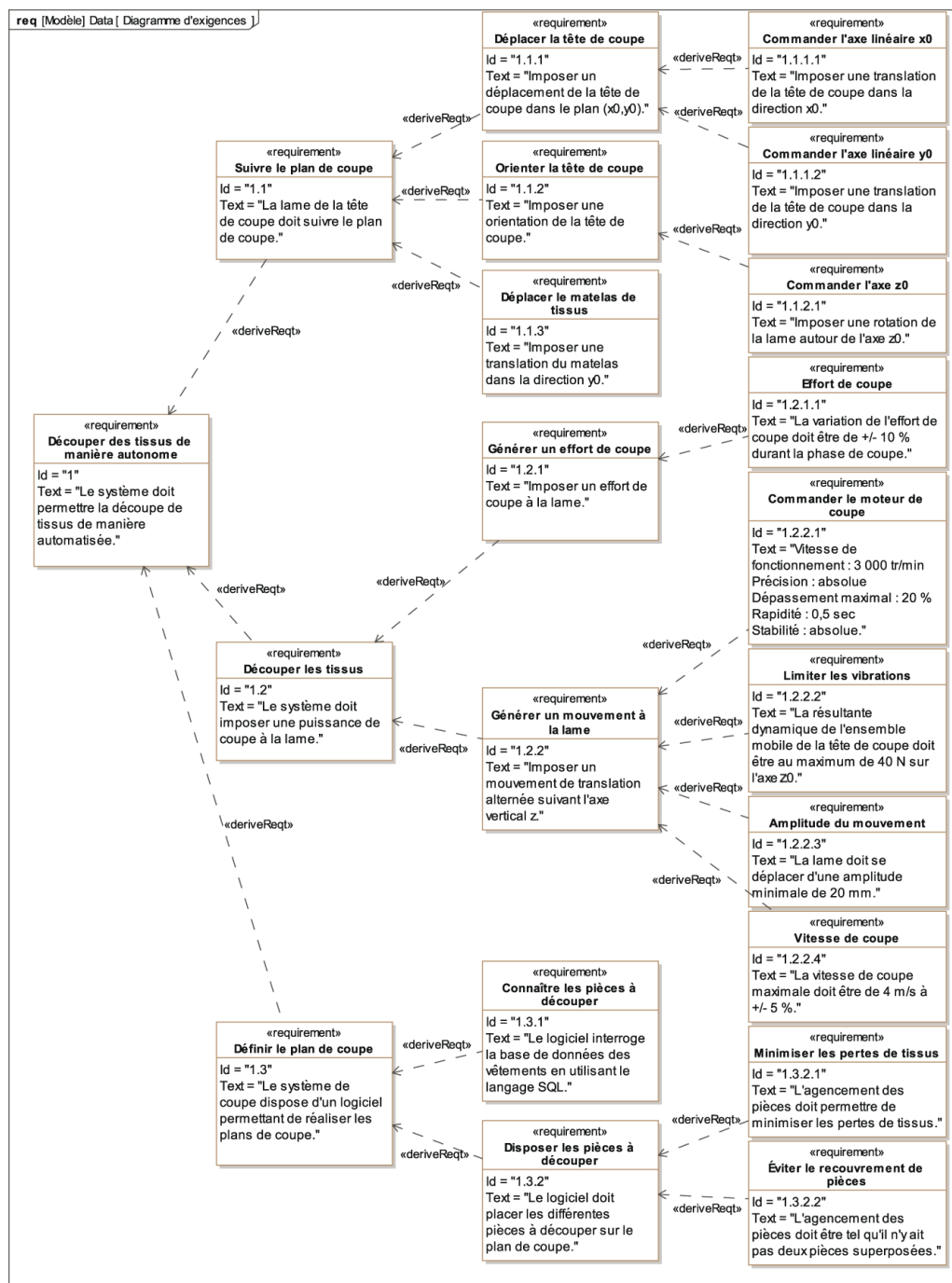


FIGURE 4 – Diagramme des exigences

$$\frac{\sin \theta_{43}}{\cos \theta_{54}} \approx \sin \theta_{32}.$$

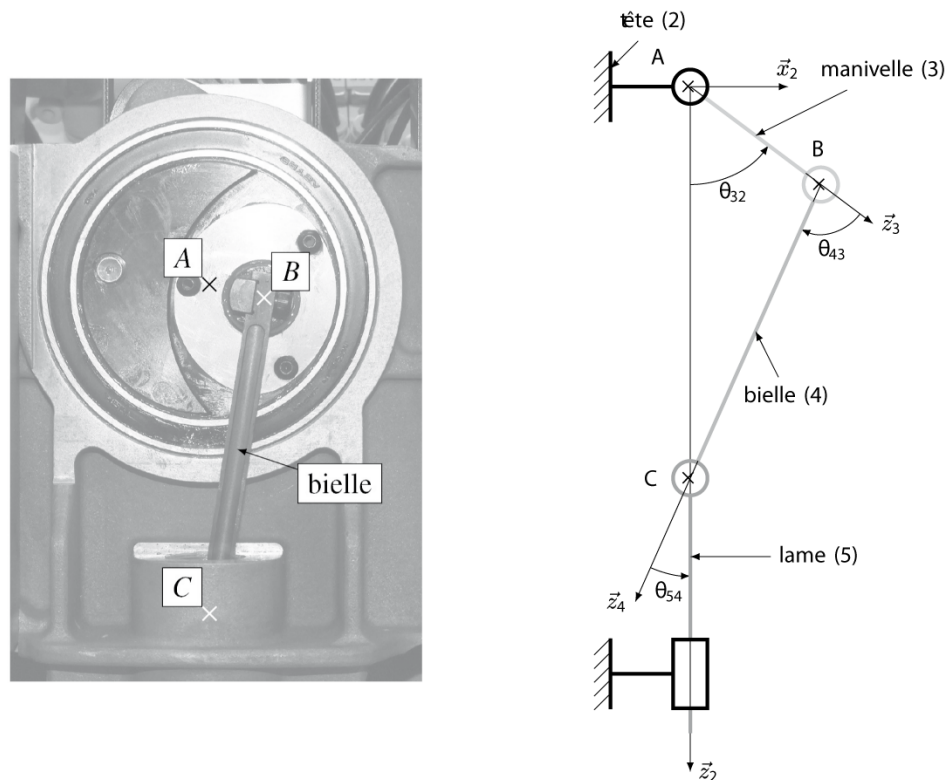


FIGURE 5 – Système d'entraînement de la lame de coupe et schéma cinématique associé

b) Modélisation du comportement dynamique de la tête de coupe

**Objectif 3 :**

Identifier la cause des vibrations à partir de la modélisation dynamique du comportement de la tête de coupe.

Hypothèses de modélisation et notations

- le référentiel lié à la tête de découpe (2) est supposé galiléen ;
- les liaisons sont supposées parfaites ;
- l'action mécanique du moteur sur la manivelle 3 est modélisée par un couple $\vec{C}_m = C_m(t) \vec{y}_2$;
- lors de la coupe, le matelas de tissus exerce une action mécanique sur la lame (5)

$$\vec{F}_{matelas \rightarrow 5} = F_c \cdot \vec{z}_0$$

avec F_c l'effort de coupe ;

- La vitesse de coupe ($\vec{V}(G_5/R_2) = V_c \cdot \vec{z}_2 = \dot{\lambda}(t) \cdot \vec{z}_2$) telle que $\dot{\lambda}(t) = -L_3 \omega_{32} \sin \theta_{32}(t)$;
- l'effet de la pesanteur est négligeable devant les autres actions mécaniques ;
- le moment d'inertie suivant l'axe $(A, \vec{y}_2)$ de la manivelle (3), de masse $M_3 = 0,350 \text{ kg}$, ramenée à l'arbre moteur est $I_{(A, \vec{y}_2)}(3) = J_3 = 1,2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
- la masse et l'inertie de la bielle (4) sont négligées ce qui revient à considérer que **son équilibre dynamique équivaut à un équilibre statique** ;
- la masse de l'ensemble mobile lié à la lame (5) est $M_5 = 0,1 \text{ kg}$.

Q 11 : Dessiner le graphe de structure complet décrivant le mécanisme et le problème dynamique associé.

Q 12 : Proposer une méthode permettant d'obtenir une équation de mouvement.

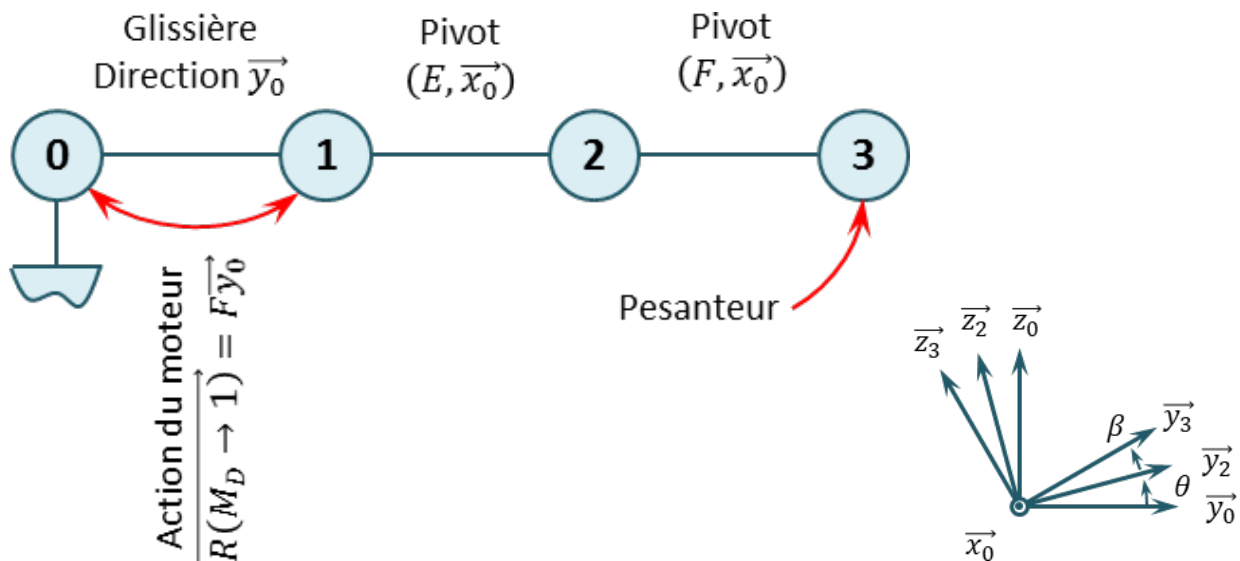
Q 13 : Déterminer l'équation de mouvement en régime permanent ($\dot{\theta}_{32} = cte$) reliant $C_m, F_c, M_5, \theta_{32}, \dot{\theta}_{32}$

Q 14 : Pourquoi le couple moteur n'est-il pas constant en régime permanent ? Quelle en est la conséquence sur le comportement du système ?

Corrigé

Exercice 1 : Grue de chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs

Q 1 : Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?



Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur $y_{ch}(t)$ (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle $\theta(t)$ (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle $\beta(t)$ (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

Q 2 : Déterminer littéralement, au point G_3 , la vitesse $\vec{V}(G_3 \in 3/0)$ puis le torseur dynamique $\{\delta(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0$.

$$\overrightarrow{V(G_3 \in 3/0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3}) \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} (y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} - \ell_2\overrightarrow{z_2} - h_3\overrightarrow{z_3}) \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

On a :

- $\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta}\overrightarrow{y_2};$
- $\left[\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{z_3} = (\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = -(\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{y_3};$
- $\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_2};$
- $\left[\frac{d\overrightarrow{y_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{z_3}.$

$$\overrightarrow{V(G_3 \in 3/0)} = \dot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\dot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{y_3}.$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} = \ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2\overrightarrow{z_3}.$$

Par ailleurs, G_3 étant le centre d'inertie, de 3, on a $\overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dA_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\overrightarrow{x_0}.$

On a donc, $\{\delta(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} M_3(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2\overrightarrow{z_3}) \\ A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_{G_3}$

Q 3 : En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant $\overrightarrow{z_2}$, on peut donc suggérer de réaliser le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur $\overrightarrow{y_2}$.

Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3;
- action de 2 sur 3.

$$\text{On a donc : } -M_3g\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{y_2} = \left(M_3(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2\overrightarrow{z_3}) \right) \cdot \overrightarrow{y_2}$$

$$\Leftrightarrow -M_3g \sin \theta = M_3(\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2\ddot{\theta} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$$

Résolution faisant intervenir F – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc **(1+2+3)** et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_0}$.

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$);
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$);
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$);
- action du moteur sur 1.

$$\text{On applique le TRD sur } \overrightarrow{y_0} : F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)} \cdot \overrightarrow{y_0} = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)} \cdot \overrightarrow{y_0}}_{=0(\text{masse négligée})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{y_0}}_{=0(\text{masse négligée})} + \overrightarrow{R_d(3/0)} \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\Rightarrow F = \left(M_3(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2\overrightarrow{z_3}) \right) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\Leftrightarrow F = M_3(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} \cos \theta + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\beta + \theta) - \ell_2\dot{\theta}^2 \sin \theta - h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\beta + \theta))$$

Q 4 : En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

Le TRD appliqué à 3 en projection suivant $\overrightarrow{z_2}$ se traduit par :

$$F - M_3g\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{z_2} = \left(M_3(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2\overrightarrow{z_3}) \right) \cdot \overrightarrow{z_2}$$

$$\Leftrightarrow F - M_3g \cos \theta = M_3(-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta).$$

Le TMD appliqué à 3 au point F en projection suivant $\overrightarrow{x_0}$ se traduit par :

$$\overrightarrow{FG_3} \wedge (-M_3g\overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = \left(\overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} + \overrightarrow{FG_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)} \right) \cdot \overrightarrow{x_0}$$

$$\Leftrightarrow -h_3\overrightarrow{z_3} \wedge (-M_3g\overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$$

$$\Leftrightarrow -M_3gh_3 \sin(\beta + \theta) = A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}).$$

Q 5 : En supposant que θ , β , $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.

- On a $-M_3 g \sin \theta = M_3 \left(\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta \right)$. En linéarisant, on obtient $-M_3 g \theta = M_3 \left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \right)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $-M_3 g \theta = M_3 \left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \right)$.
- On a : $F - M_3 g \cos \theta = M_3 \left(-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta \right)$. En linéarisant, on obtient : $F - M_3 g = M_3 \left(-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \right)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $F - M_3 g = M_3 \left(-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta \right)$.
- On a : $M_3 g h_3 \sin (\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$. En linéarisant, on obtient $M_3 g h_3 (\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$.

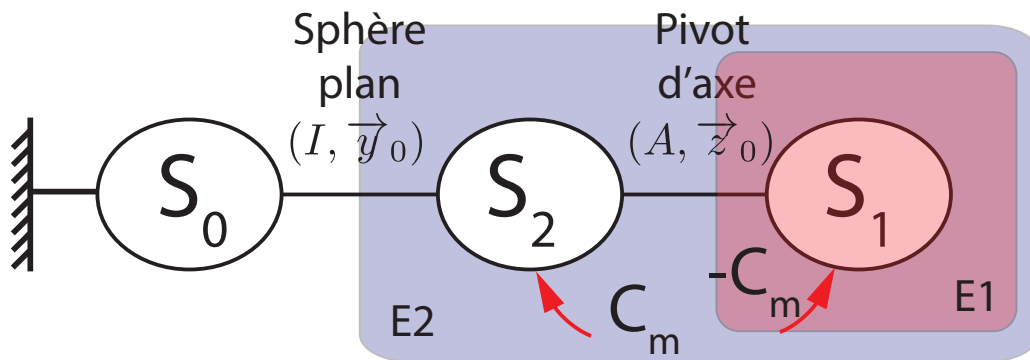
Q 6 : Proposer une simplification de la modélisation précédente.

L'amplitude des oscillations de β est 10 fois inférieure aux oscillations de θ . En conséquences, on pourrait poser $\beta = 0$ et :

- $-g\theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 \ddot{\theta}$;
- $F - M_3 g = -M_3 \ddot{y}_{ch}(t) \theta$;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3 \ddot{\theta}$.

Exercice 2 : Modélisation dynamique du Segway

Q 7 : Donner le graphe de structure du problème.



Q 8 : Traduire la condition de roulement sans glissement en I et donner une relation en $\dot{x}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\theta}$ et R .
La condition de roulement sans glissement en I donne :

$$\vec{V}(I \in 2/0) = \vec{0}$$

On sait que $\vec{V}(A \in 2/0) = \dot{x} \vec{x}_0$.

Par changement de point :

$$\vec{V}(A \in 2/0) = \vec{V}(I \in 2/0) + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = \dot{x} \vec{x}_0 - R \vec{y}_0 \wedge (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \vec{z}_0$$

On obtient alors,

$$\boxed{\dot{x} = R(\dot{\alpha} + \dot{\theta})}$$

Q 9 : Proposer un ordonnancement des isolements permettant d'obtenir une équation de mouvement.

- **E1** : On isole S_1 et on applique un TMD selon l'axe $(A, \vec{z}_0)$;

$$\vec{\delta}(A, S_1/R_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(A, ext \rightarrow S_1) \cdot \vec{z}_0$$

- **E2** : On isole $S_1 + S_2$ et on applique un TMD selon l'axe $(I, \vec{z}_0)$;

$$\left(\vec{\delta}(I, S_1/R_0) + \vec{\delta}(I, S_2/R_0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(I, ext \rightarrow \{S_1 + S_2\}) \cdot \vec{z}_0$$

Q 10 : Mettre en oeuvre les isolements et traduire les équilibres dynamiques et obtenir deux équations de mouvement en fonction des paramètres de mouvement $\alpha(t)$, $\theta(t)$, $x(t)$, de C_m et des constantes géométriques du pro-

blème.

- E1 : On isole S_1 et on applique un TMD selon l'axe $(A, \vec{z}_0)$;

$$\vec{\delta}(A, S_1/R_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(A, ext \rightarrow S_1) \cdot \vec{z}_0$$

- Composante dynamique :

$$\vec{\delta}(A, S_1/R_0) \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d\vec{\sigma}(A, S_1/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \cdot \vec{z}_0 + \left(m_1 \vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{V}(G_1/R_0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d\vec{\sigma}(A, S_1/R_0) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right] + \left(m_1 \vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{V}(G_1/R_0) \right) \cdot \vec{z}_0$$

Or,

$$\vec{V}(G_1/R_0) = \vec{V}(G_1 \in S_1/R_0) = \vec{V}(G_1 \in S_1/S_2) + \vec{V}(G_1 \in S_2/R_0) = \vec{G_1 A} \wedge \vec{\Omega}(1/2) + \vec{V}(A \in S_2/R_0) \vec{G_1 A} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = -L_1 \vec{y}_1 \wedge -\dot{\theta} \vec{z}_0 + \dot{x} \vec{x}_0 - L_1 \vec{y}_1 \wedge (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \vec{z}_0 = \dot{x} \vec{x}_0 - L_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(A, S_1/R_0) \cdot \vec{z}_0 &= \left(\vec{I}_A(S_1) \cdot \dot{\alpha} \vec{z}_0 + m_1 \vec{AG_1} \wedge \vec{V}(A \in 1/0) \right) \cdot \vec{z}_0 \\ &= C_1 \dot{\alpha} + (m_1 L_1 \vec{y}_1 \wedge \dot{x} \vec{x}_0) \cdot \vec{z}_0 = C_1 \dot{\alpha} - m_1 L_1 \cos \alpha \dot{x} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}(A, S_1/R_0) \cdot \vec{z}_0}{dt} = C_1 \ddot{\alpha} - m_1 L_1 (\cos \alpha \ddot{x} - \sin \alpha \dot{x} \dot{\alpha})$$

et

$$(m_1 \vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{V}(G_1/R_0)) \cdot \vec{z}_0 = (m_1 \dot{x} \vec{x}_0 \wedge (\dot{x} \vec{x}_0 - L_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1)) \cdot \vec{z}_0 = -m_1 L_1 \dot{x} \dot{\alpha} \sin \alpha$$

Ainsi,

$$\vec{\delta}(A, S_1/R_0) \cdot \vec{z}_0 = C_1 \ddot{\alpha} - m_1 L_1 \cos \alpha \ddot{x}$$

- Le bilan en moment des actions mécanique s'appliquant sur S_1 donne :

$$\vec{M}(A, ext \rightarrow S_1) \cdot \vec{z}_0 = -C_m + \vec{M}(A, poids \rightarrow S_1) \cdot \vec{z}_0$$

Or,

$$\vec{M}(A, poids \rightarrow S_1) \cdot \vec{z}_0 = [\vec{AG_1} \wedge -m_1 g \vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = [L_1 \vec{y}_1 \wedge -m_1 g \vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = L_1 g m_1 \sin \alpha$$

- L'équation de mouvement obtenue est :

$$\boxed{C_1 \cdot \ddot{\alpha}(t) - m_1 L_1 \cos \alpha \ddot{x}(t) - L_1 g m_1 \sin \alpha(t) = -C_m}$$

- **E2** : On isole $S_1 + S_2$ et on applique un TMD selon l'axe $(I, \vec{z}_0)$;

$$\left(\vec{\delta}(I, S_1/R_0) + \vec{\delta}(I, S_2/R_0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(I, ext \rightarrow \{S_1 + S_2\}) \cdot \vec{z}_0$$

- Composante dynamique :

> **Pour S_1** :

$$\vec{\delta}(I, S_1/R_0) \cdot \vec{z}_0 = \left[\vec{\delta}(A, S_1/R_0) + \vec{IA} \wedge m_1 \vec{a}(G_1/R_0) \right] \cdot \vec{z}_0$$

Or,

$$\vec{a}(G_1/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G_1/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

Ainsi, $\vec{a}(G_1/R_0) = \ddot{x}\vec{x}_0 - L_1(\ddot{\alpha}\vec{x}_1 + \dot{\alpha}^2\vec{y}_1)$

et

$$\begin{aligned} \left[\vec{IA} \wedge m_1 \vec{a}(G_1/R_0) \right] \cdot \vec{z}_0 &= \left[R\vec{y}_0 \wedge m_1(\ddot{x}\vec{x}_0 - L_1(\ddot{\alpha}\vec{x}_1 + \dot{\alpha}^2\vec{y}_1)) \right] \cdot \vec{z}_0 \\ &= m_1 R \left[-\ddot{x} + L_1(\cos\alpha\ddot{\alpha} - \sin\alpha\dot{\alpha}^2) \right] \end{aligned}$$

d'où,

$$\boxed{\vec{\delta}(I, S_1/R_0) \cdot \vec{z}_0 = (C_1 + m_1 L_1 R \cos\alpha) \ddot{\alpha} - m_1 (R + L_1 \cos\alpha) \ddot{x} - m_1 R L_1 \sin\alpha \dot{\alpha}^2}$$

> **Pour S_2** :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(I, S_2/R_0) \cdot \vec{z}_0 &= \left[\vec{\delta}(A, S_2/R_0) + \vec{IA} \wedge m_2 \vec{a}(G_2/R_0) \right] \cdot \vec{z}_0 \\ C_2(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + (R\vec{y}_0 \wedge m_2 \ddot{x}\vec{x}_0) \cdot \vec{z}_0 &= C_2(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) - m_2 R \ddot{x} \end{aligned}$$

> **Pour S_1 et S_2** :

$$\boxed{\left(\vec{\delta}(I, S_1/R_0) + \vec{\delta}(I, S_2/R_0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \ddot{\alpha}(C_1 + C_2 + m_1 L_1 R \cos\alpha) - \ddot{x}(m_1(R + L_1 \cos\alpha) + m_2 R) - m_1 R L_1 \sin\alpha \dot{\alpha}^2 + C_2 \ddot{\theta}}$$

- Le bilan en moment des actions mécaniques s'appliquant sur $\{S_1 + S_2\}$ donne :

$$\vec{M}(I, ext \rightarrow S_1 + S_2) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(I, poids \rightarrow S_1) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}(I, poids \rightarrow S_2) \cdot \vec{z}_0$$

Or,

$$\vec{M}(I, poids \rightarrow S_1) \cdot \vec{z}_0 = \left[\vec{IG}_1 \wedge -m_1 g \vec{y}_0 \right] \cdot \vec{z}_0 = \left[(R\vec{y}_0 + L_1 \vec{y}_1) \wedge -m_1 g \vec{y}_0 \right] \cdot \vec{z}_0 = L_1 g m_1 \sin\alpha$$

$$\vec{M}(I, poids \rightarrow S_2) \cdot \vec{z}_0 = \left[\vec{IA} \wedge -m_2 g \vec{y}_0 \right] \cdot \vec{z}_0 = \left[R\vec{y}_0 \wedge -m_2 g \vec{y}_0 \right] \cdot \vec{z}_0 = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{M}(I, ext \rightarrow S_1 + S_2) \cdot \vec{z}_0 = L_1 g m_1 \sin\alpha}$$

- L'équation de mouvement obtenue est :

$$\boxed{\ddot{\alpha}(C_1 + C_2 + m_1 L_1 R \cos\alpha) - \ddot{x}(m_1(R + L_1 \cos\alpha) + m_2 R) - m_1 R L_1 \sin\alpha \dot{\alpha}^2 + C_2 \ddot{\theta} = L_1 g m_1 \sin\alpha}$$

Q 11 : En linéarisant ces deux équations en supposant des petites variations de α et en utilisant la condition de roulement sans glissement, montrer que l'on peut obtenir une équation différentielle de mouvement en fonction de $\alpha(t)$, $\theta(t)$, de C_m et des constantes géométriques du problème.

- Pour des petites variation de α :

$$\cos \alpha \approx 1$$

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

$$\sin \alpha \dot{\alpha}^2 \ll 1$$

- avec la condition de roulement dans glissement $\dot{x} = R(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \Rightarrow \ddot{x} = R(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})$,
on obtient alors deux équations :

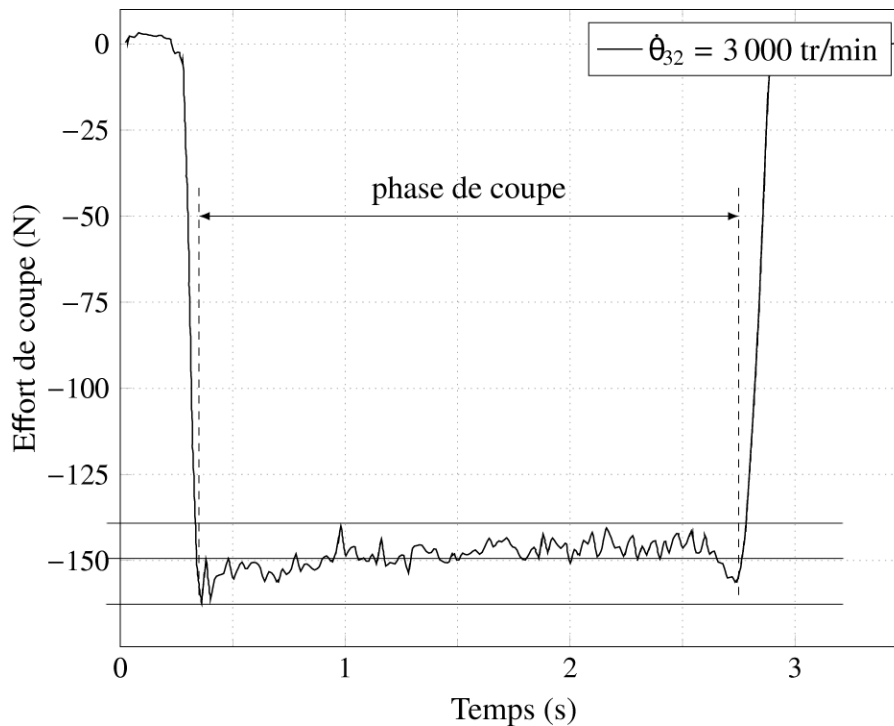
$$\begin{cases} (a) & \ddot{\alpha}(t)(C_1 + C_2 - (m_1 + m_2)R^2) - \ddot{\theta}(t)((m_1 + m_2)R^2 + m_1 L_1 R - C_2) - L_1 g m_1 \alpha(t) = 0 \\ (b) & C_1 \cdot \ddot{\alpha}(t) - m_1 L_1 R(\ddot{\alpha}(t) + \ddot{\theta}) - L_1 g m_1 \alpha(t) = -C_m(t) \end{cases}$$

- En combinant les deux équations précédentes (a) – (b), on obtient finalement :

$$\ddot{\alpha}(C_2 + m_1 L_1 R - (m_1 + m_2)R^2) = C_m + ((m_1 + m_2)R^2 - C_2)\ddot{\theta}$$

Exercice 3 : Tete de découpe de tissu

Q 12 : Durant la phase de coupe, déterminer les valeurs moyenne, maximale et minimale de l'effort de coupe.



Si on raisonne en norme :

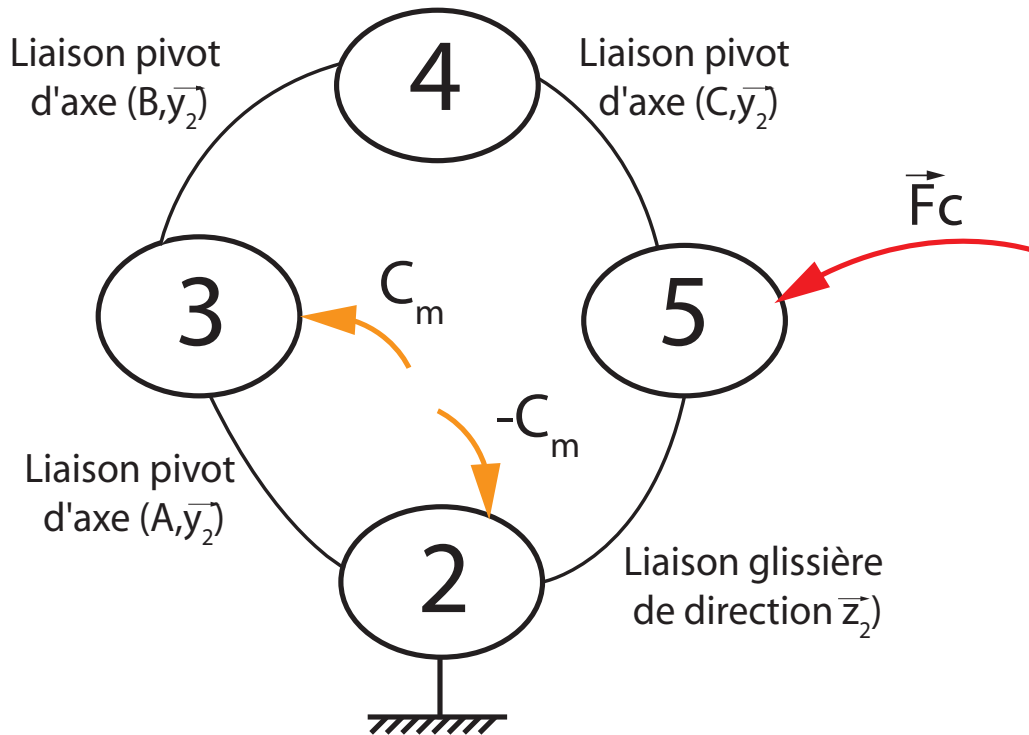
Valeur maximale : 162.5N Valeur minimale : 140N Valeur moyenne : 150 N

Q 13 : Conclure sur la validation de l'exigence 1.2.1.1. Justifier.

$$\frac{\max - \min}{\text{moy}} = \frac{162.5 - 140}{150} = 15\%$$

L'effort de coupe varie donc de $\pm 7.5\% < \pm 10\%$ par rapport à la valeur moyenne, l'exigence 1.2.1.1 est respectée

Q 14 : Dessiner le graphe de structure complet décrivant le mécanisme et le problème dynamique associé.



Q 15 : Proposer une méthode permettant d'obtenir une équation de mouvement.

- On isole le solide (4) (solide soumis à 2 glisseurs) et en déduire la direction des résultantes des actions mécaniques de $\vec{R}_{3 \rightarrow 4}$ et de $\vec{R}_{5 \rightarrow 4}$.
- On isole 3 et on applique le théorème du moment dynamique appliqué selon l'axe $(A, \vec{y}_2)$.
- On isole la lame (5) qui est animée d'un mouvement de translation selon la direction $\vec{z}_2$ par rapport au référentiel galiléen R_2 , on peut appliquer le théorème de la résultante dynamique

Q 16 : Déterminer l'équation de mouvement en régime permanent ($\dot{\theta}_{32} = cte$) reliant $C_m, F_c, M_5, \theta_{32}, \dot{\theta}_{32}$

- On isole le solide (4) qui est seulement soumis à deux actions mécaniques de type glisseur du à la possibilité d'utiliser une modélisation plane. Ainsi $\vec{R}_{3 \rightarrow 4}$ et de $\vec{R}_{5 \rightarrow 4}$ sont directement opposées, donc :

$$\vec{R}_{3 \rightarrow 4} = -\vec{R}_{5 \rightarrow 4}$$

$$\vec{R}_{3 \rightarrow 4} // \vec{R}_{5 \rightarrow 4} // \vec{z}_4$$

$$\vec{R}_{3 \rightarrow 4} = R_{34} \cdot \vec{z}_4.$$

- On isole la manivelle (3) qui est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe $(A, \vec{y}_2)$ par rapport au référentiel galiléen R_2 , on peut appliquer le théorème du moment dynamique :

$$I(3)_{(A, \vec{y}_2)} \cdot \frac{d\vec{\Omega}(3/2) \cdot \vec{y}_2}{dt} = \vec{M}_A(ext \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2.$$

- Le bilan des moments des actions mécaniques s'appliquant sur 3 selon l'axe $(A, \vec{y}_2)$ donne :
 - Action du moteur : $\vec{M}_A(moteur \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = C_m$;

- Action de 4 → 3 : $\vec{M}_A(4 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = -L_3 \cdot R_{34} \cdot \sin \theta_{43}$;
- Action de 2 → 3 : $\vec{M}_A(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = 0$ car liaison pivot parfaite ;
- On calcule le moment $\vec{M}_A(4 \rightarrow 3)$ en fonction de R_{34} , θ_{43} et L_3 .

$$\vec{M}_A(4 \rightarrow 3) = \vec{M}_B(4 \rightarrow 3) + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{4 \rightarrow 3}$$

Or, $\vec{R}_{4 \rightarrow 3} = -\vec{R}_{3 \rightarrow 4} = -R_{3 \rightarrow 4} \cdot \vec{z}_4$, $\vec{M}_B(4 \rightarrow 3) = \vec{0}$ et $\vec{AB} = L_3 \cdot \vec{z}_3$.
ainsi :

$$\vec{M}_A(4 \rightarrow 3) = L_3 \cdot \vec{z}_3 \wedge (-R_{3 \rightarrow 4} \cdot \vec{z}_4) = -L_3 \cdot R_{34} \cdot \sin \theta_{43} \cdot \vec{y}_2.$$

- La projection du moment dynamique est donnée par :

$$I(3)_{(A, \vec{y}_2)} \cdot \frac{d\vec{\Omega}(3/2) \cdot \vec{y}_2}{dt} = J_3 \ddot{\theta}_{32}.$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$J_3 \ddot{\theta}_{32} = C_m - L_3 \cdot R_{34} \cdot \sin \theta_{43}.$$

- On isole la lame (5) qui est animée d'un mouvement de translation selon la direction $\vec{z}_2$ par rapport au référentiel galiléen R_2 , on peut appliquer le théorème de la résultante dynamique :

$$M_5 \cdot \overrightarrow{a(G_5/R_2)} \cdot \vec{z}_2 = \vec{F}(ext \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_2.$$

- On en déduit une relation entre M_5 , $\ddot{\lambda}(t)$, R_{34} , F_c et les paramètres géométriques du problème.
Le bilan des résultantes des actions mécaniques s'appliquant sur 5 selon la direction $\vec{z}_2$ donne :
 - Action de coupe : $\vec{R}(coupe \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_2 = F_c$;
 - Action de 4 → 5 : $\vec{R}(4 \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_2 = -\vec{R}(5 \rightarrow 4) \cdot \vec{z}_2 = \vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{z}_2 = R_{34} \cdot \vec{z}_4 \cdot \vec{z}_2 = R_{34} \cos \theta_{54}$;
 - Action de 2 → 5 : $\vec{R}(2 \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_2 = 0$ car liaison glissière parfaite ;
- La projection résultante dynamique est donnée par :

$$M_5 \cdot \overrightarrow{a(G_5/R_2)} \cdot \vec{z}_2 = M_5 \ddot{\lambda}(t).$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$M_5 \ddot{\lambda}(t) = F_c + R_{34} \cos \theta_{54}.$$

$$\begin{cases} -L_4 \sin \theta_{54} + L_3 \sin \theta_{32} = 0 \\ L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \cos \theta_{54} = \lambda \end{cases}$$

La deuxième équation donne :

$$\cos \theta_{54} = \frac{\lambda - L_3 \cos \theta_{32}}{L_4}$$

Or d'après l'expression simplifiée de λ : $\lambda \approx L_3 \cos \theta_{32} + L_4$,
on obtient

$$\cos \theta_{54} \approx 1.$$

En projetant la fermeture géométrique sur $\vec{x}_4$, on obtient :

$$(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) \cdot \vec{x}_4 = 0$$

$$L_3 \vec{z}_3 \cdot \vec{x}_4 + L_4 \vec{z}_4 \cdot \vec{x}_4 - \lambda(t) \cdot \vec{z}_2 \cdot \vec{x}_4$$

$$-L_3 \sin \theta_{43} + 0 + \lambda(t) \sin \theta_{54} = 0$$

d'où,

$$\sin \theta_{43} = \frac{\lambda \sin \theta_{54}}{L_3}$$

Or $L_3 \sin \theta_{32} = L_4 \sin \theta_{54}$
donc,

$$\sin \theta_{43} = \lambda \frac{\sin \theta_{32}}{L_4} = \frac{(L_3 \cos \theta_{32} + L_4) \sin \theta_{32}}{L_4} = \sin \theta_{32} + \frac{L_3}{L_4} \cos \theta_{32}$$

En faisant l'hypothèse que $L_3 \ll L_4$, on obtient bien : $\sin \theta_{43} \approx \sin \theta_{32}$.

En combinant les équations provenant des théorèmes en résultante et en moment dynamique, on obtient :

$$J_3 \ddot{\theta}_{32} = C_m - L_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot \left(\frac{M_5 \ddot{\lambda}(t) - F_c}{\cos \theta_{54}} \right).$$

Or,

$$\ddot{\lambda}(t) = \ddot{\theta}_{32} \sin \theta_{32}(t) - \omega_{32}^2 \cdot \cos \theta_{32}(t)$$

Donc dans le cas du régime permanent :

$$\ddot{\lambda}(t) = -\omega_{32}^2 \cdot \cos \theta_{32}(t)$$

On obtient alors,

$$J_3 \ddot{\theta}_{32} = C_m - L_3 \cdot \sin \theta_{32} \cdot (-M_5 L_3 \cdot \omega_{32}^2 \cdot \cos \theta_{32}(t) - F_c).$$

Au final,

$$C_m = L_3 \cdot \sin \theta_{32} \cdot (-M_5 L_3 \cdot \omega_{32}^2 \cdot \cos \theta_{32}(t) - F_c)$$

Q 17 : Pourquoi le couple moteur n'est-il pas constant en régime permanent ? Quelle en est la conséquence sur le comportement du système ?

Le coulisseau a un mouvement de va et vient donc même en régime permanent (vitesse de rotation constante du moteur) *l'accélération du coulisseau n'est pas constante.*

De plus la pesanteur sur le coulisseau *est motrice durant la phase de descente et résistante durant la phase de montée.*

Ces 2 phénomènes sont à l'origine du couple moteur variable en régime permanent et *vont provoquer des vibrations.*