

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C5 : MODÉLISATION PAR L'APPROCHE ÉNERGÉTIQUE DES
PERFORMANCES DES SYSTÈMES

TD 14 - Application à l'approche énergétique des systèmes (C5-2)

Compétences

- **Analyser**
 - Caractériser un constituant de la chaîne de puissance.
 - Analyser les performances et les écarts
 - Caractériser les écarts entre les performances.
 - Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement.
- **Modéliser**
 - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
 - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.
 - Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
 - Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.
- **Expérimenter**
 - Choisir le protocole en fonction de l'objectif visé.
- **Communiquer**
 - Faire preuve d'écoute et confronter des points de vue.
 - Présenter de manière argumentée une synthèse des résultats.
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

Exercice 1 : Modélisation durobot dropic

Source : CCINP 2020 PSI

1 Présentation du contexte et des exigences du robot

Dans le domaine musical, la robotique est utilisée pour deux cas d'application distincts :

- jouer d'un ou de plusieurs instrument(s) de musique pour les robots musiciens ;

- reproduire les gestes musicaux pour les robots d'étude des instruments.

Selon les cas, les robots développés peuvent être inspirés de l'être humain (anthropomorphes) ou d'architecture plus libres.

Les robots d'étude des instruments permettent d'analyser et de comprendre l'interaction complexe qui existe entre le musicien et son instrument, en réalisant de nombreuses mesures, afin d'en extraire les paramètres pertinents. Il s'agit notamment de quantifier et de reproduire les sollicitations des instruments, par exemple la pression et le débit pour les instruments à vents ou encore le déplacement et la vitesse pour les instruments à cordes. L'étude se focalisera ici sur le clavecin, instrument à cordes pincées et à clavier. L'enfoncement des touches du clavier du clavecin permet d'actionner un sautereau, qui vient alors pincer la corde (**figure 1**).

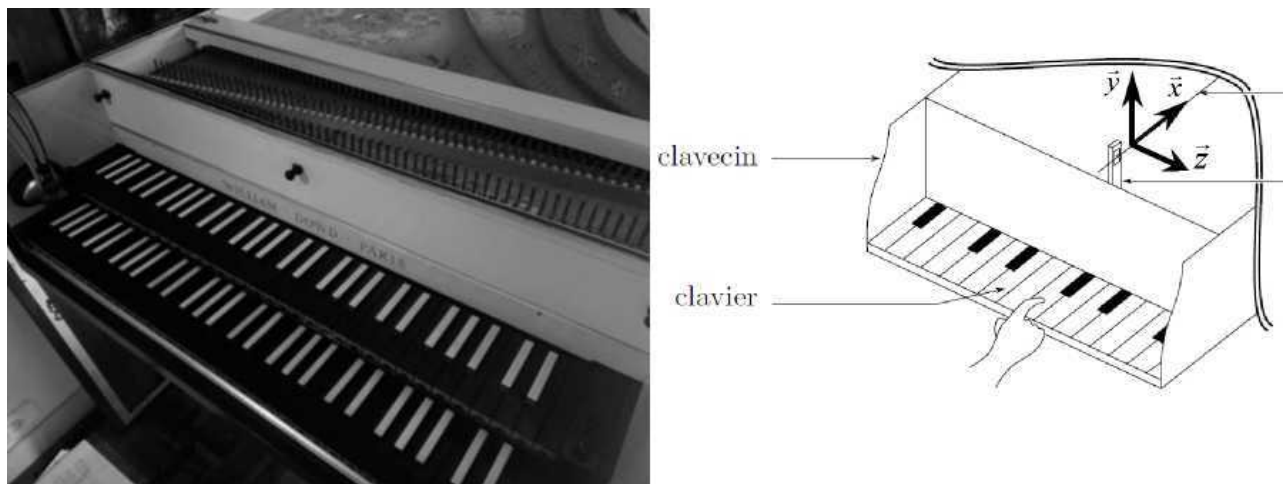


FIGURE 1 – Clavecin

Les robots d'étude sont capables :

- de générer les trajectoires réalistes d'un doigt de joueur de clavecin, ce qui permet plutôt d'analyser les efforts articulaires mis en jeu dans le doigt pendant un morceau de musique;
- d'imposer directement les conditions initiales idéales, indépendamment des trajectoires, ce qui permet d'obtenir un outil juste et répétable d'étude du clavecin, utilisable par exemple pour son harmonisation (processus de réglage).

2 Exigences de la plate-forme robotisée

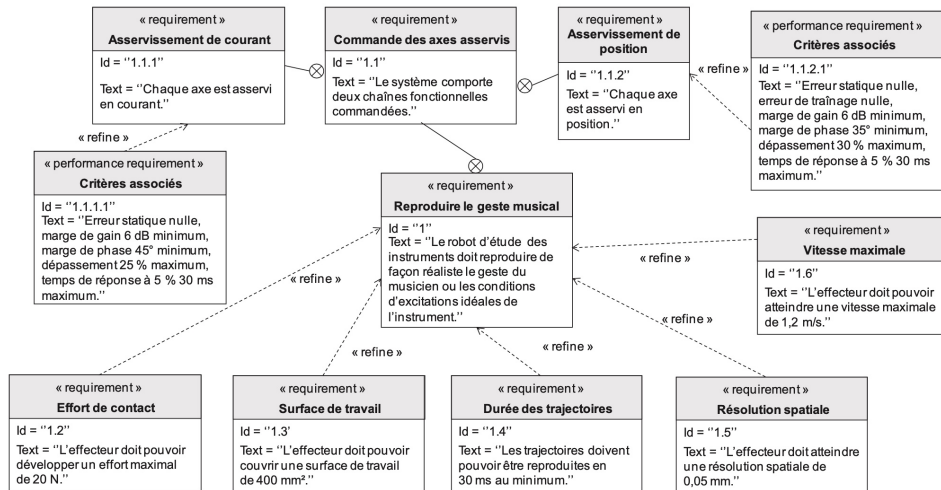


FIGURE 2 – Clavecin

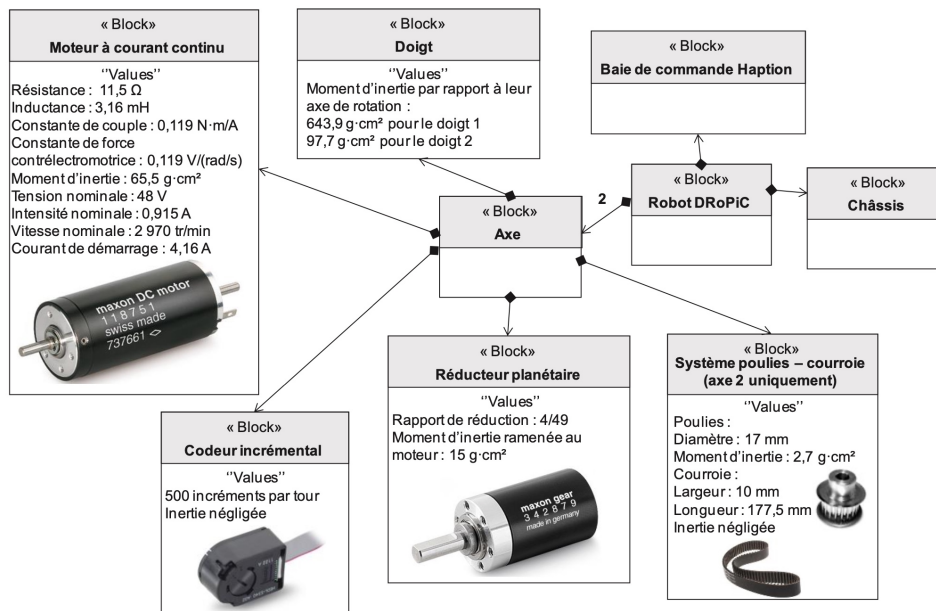


FIGURE 3 – Diagramme SysML de définition de blocs

3 Architecture du robot DRoPiC et modèles géométrique et cinématique

Les modèles géométrique et cinématique, ainsi que les données utiles à la résolution des questions de cette **partie**, sont représentés en figures 5 et 6.

Le robot DRoPiC, schématisé **figure 4**, est constitué de deux doigts notés 1 et 2.

- Le doigt 1 est en liaison pivot avec le bâti 0 d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$, il dispose donc d'un degré de liberté noté $\theta_1(t)$ par rapport à 0. La rotation est actionnée par un motoréducteur 1 exerçant un couple $C_{r1} \vec{z}_0$ sur le doigt 1.
- Le doigt 2 est en liaison pivot avec le doigt 1 d'axe $(O_2, \vec{z}_0)$, il dispose donc d'un degré de liberté noté $\theta_2(t)$ par rapport à 0. La rotation est actionnée par un motoréducteur 2 exerçant un couple $C_{r2} \vec{z}_0$ sur le doigt 2 par l'intermédiaire d'une transmission à poulies-courroie. Le stator du groupe motoréducteur 2 est donc solidaire du bâti 0.

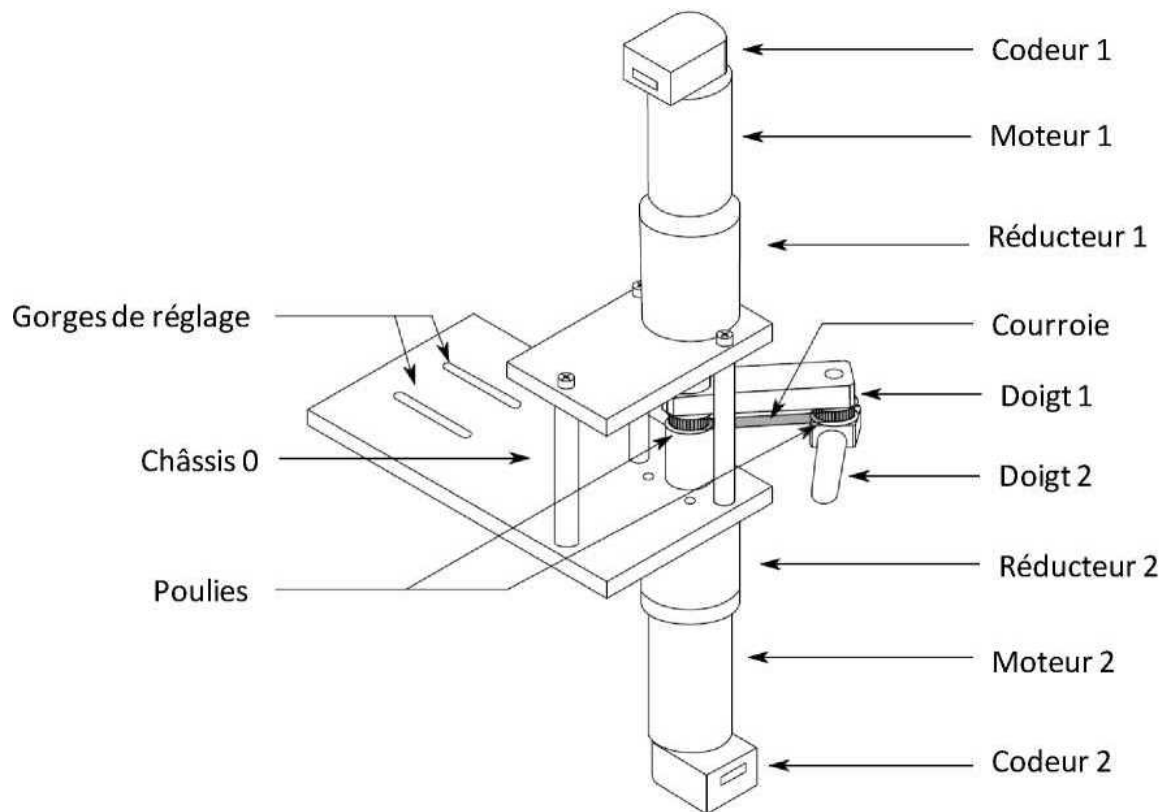


FIGURE 4 – Schéma d'ensemble du robot DRoPiC

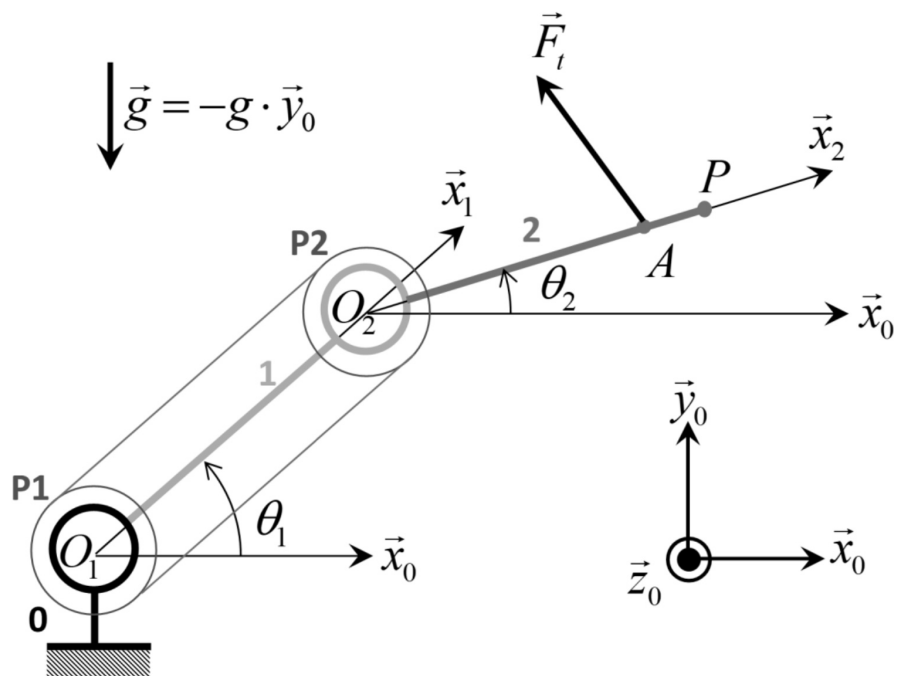


FIGURE 5 – Modèle géométrique du robot DroPiC

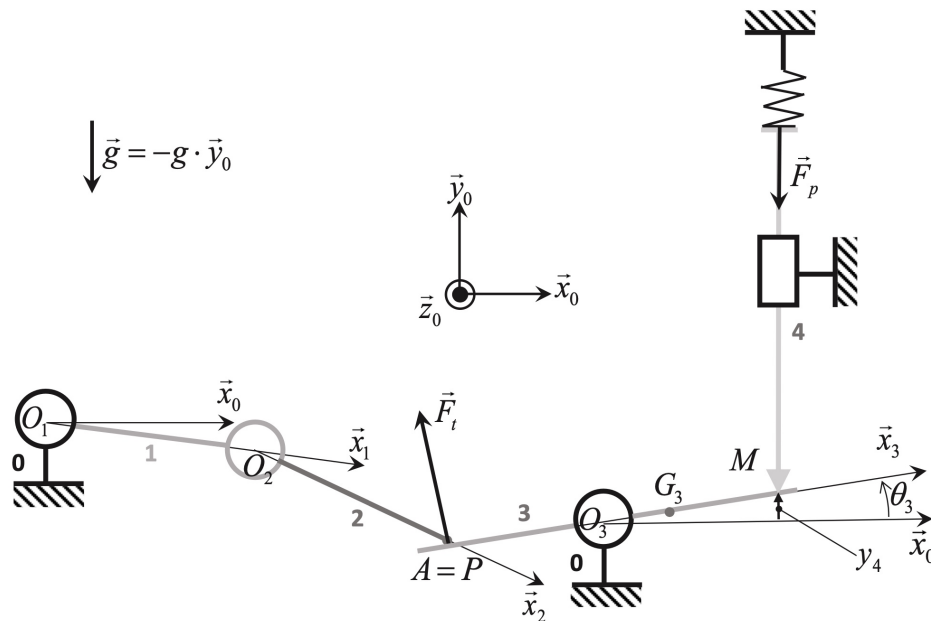


FIGURE 6 – Modèle de l'ensemble robot + clavecin

4 Modèle du mécanisme d'excitation de la corde : détermination de l'effort de contact

La touche et le sautereau du clavecin seront notés respectivement 3 et 4. On s'intéresse dans cette partie à la détermination de l'effort de contact entre la touche 3 et le doigt 2. On considère que le contact se fait au niveau de l'extrémité du doigt 2, le point P est donc confondu avec le point A , point d'application de l'effort de contact. Le modèle de l'ensemble étudié est présenté **figure 6, annexe 2 et en annexe 3**.

Q 1 : A l'aide des données de l'annexe 3, donner l'expression du moment d'inertie du solide 3 par rapport à l'axe $(O_3, \vec{z}_0)$ que l'on notera J_3 .

Q 2 : Tracer le graphe de structure modélisant le problème défini en annexe 2 sur la figure 6.

a) Approche par les théorèmes généraux

On considère maintenant E constitué de la touche 3 et du sautereau 4. Les liaisons entre solides sont considérées comme parfaites, ainsi les solides 1 et 2 seront considérés comme extérieurs au problème.

On souhaite obtenir une équation de mouvement de la forme :

$$A_1 \ddot{\theta}_3 + A_2 \theta_3 = A_3 F_t + A_4$$

Q 3 : Justifier l'utilisation de l'hypothèse d'un problème plan.

Q 4 : Proposer et justifier un ordonnancement des isolements pour obtenir cette équation de mouvement traduisant le comportement dynamique de l'ensemble E . On énoncera rigoureusement les théorèmes généraux à utiliser et leur axes de projection.

Q 5 : Donner la forme du torseur de la liaison entre 4 et 3 en tenant compte de l'hypothèse d'un problème plan.

Q 6 : Faire le bilan en résultante d'actions mécaniques s'appliquant à 4 selon la direction $\vec{y}_0$.

Q 7 : Faire le bilan en moment d'actions mécaniques s'appliquant à 3 selon l'axe $(O_3, \vec{z}_0)$.

Q 8 : Appliquer les théorèmes généraux issus de l'ordonnancement proposé pour obtenir deux équations différentielles couplées fonction de $y_4(t)$ et $\theta_3(t)$ et dépendantes des paramètres géométriques et cinétiques du problème et d'actions mécaniques.

$y_4(t)$ et $\theta_3(t)$ sont reliés par :

$$y_4(t) = a_3 \tan \theta_3(t)$$

On peut linéariser les équations en considérant des petites variations de $\theta_3(t)$ et en supposant donc :

$$\cos \theta_3(t) \approx 1$$

$$\sin \theta_3(t) \approx \theta_3(t)$$

$$\tan \theta_3(t) \approx \theta_3(t)$$

$$\theta_3(t)^2 \text{ négligeables}$$

Q 9 : Montrer alors que les deux équations différentielles obtenues aux questions précédentes peuvent se mettre sous la forme d'une seule équation différentielle $A_1 \ddot{\theta}_3 + A_2 \theta_3 = A_3 F_t + A_4$.

Q 10 : Déterminer alors les constantes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction des paramètres géométriques et cinétiques du problème.

b) Approche énergétique

On isole l'ensemble E constitué de la touche 3 et du sautereau 4. Les liaisons entre solides sont considérées comme parfaites.

Q 11 : Exprimer l'énergie cinétique $Ec(4/0)$ du sautereau 4 par rapport au bâti 0 en fonction du paramètre cinématique $\dot{y}_4(t)$ et des autres données utiles.

Q 12 : Exprimer l'énergie cinétique $Ec(3/0)$ de la touche 3 par rapport au bâti 0 en fonction du paramètre cinématique $\dot{\theta}_3(t)$ et des autres données utiles.

Q 13 : Exprimer l'énergie cinétique $Ec(E/0)$ de l'ensemble E par rapport au bâti 0 en fonction des paramètres cinématiques $\dot{\theta}_3(t)$, $\dot{y}_4(t)$ et des autres données utiles.

Q 14 : Exprimer la puissance P_{int} des inter-efforts de l'ensemble E .

Q 15 : Exprimer la puissance par rapport au bâti 0 des actions extérieures $P_{\text{ext} \rightarrow E/0}$ s'exerçant sur l'ensemble E .

Q 16 : L'angle $\theta_3(t)$ restant petit au cours du mouvement de la touche, donner une relation linéaire liant $y_4(t)$ et $\theta_3(t)$. Montrer alors que l'on peut obtenir l'équation de mouvement suivante où vous explicitez les termes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 :

$$A_1 \ddot{\theta}_3 + A_2 \theta_3 = A_3 F_t + A_4$$

c) Résolution

On résout numériquement l'équation de mouvement obtenue. La **figure 7** présente le mouvement imposé de l'angle de la touche $\theta_3(t)$ et l'effort simulé de contact sur la touche.

Q 17 : Commenter la courbe d'effort de contact vis-à-vis des exigences du robot.

d) Architecture du robot DRoPiC et modèles géométrique et cinématique

- Le doigt 1 est en liaison pivot avec le bâti 0 d'axe $(O_1, \vec{z}_{0,1})$ il dispose donc d'un degré de liberté noté $\theta_1(t)$ par rapport à 0. La rotation est actionnée par un motoréducteur 1 exerçant un couple $C_{r1} \vec{z}_0$ sur le doigt 1.
- Le doigt 2 est en liaison pivot avec le doigt 1 d'axe $(O_2, \vec{z}_0)$, il dispose donc d'un degré de liberté noté $\theta_2(t)$ par rapport à 0. La rotation est actionnée par un motoréducteur 2 exerçant un couple $C_{r2} \vec{z}_0$ sur le doigt 2 par l'intermédiaire d'une transmission à poulies-courroie. Le stator du groupe motoréducteur 2 est donc solidaire du bâti 0.

e) Modèle complet

Afin de suivre les trajectoires de consigne, les deux axes du robot sont commandés par l'intermédiaire d'un asservissement de position articulaire (figure 8). Pour cette partie l'axe 1 est considéré comme immobile, seul l'axe 2 est en mouvement.

Q 18 : À partir des caractéristiques du réducteur planétaire et du système poulies-courroie données dans le diagramme de définition de blocs (figure 3) et figure 5), déterminer le gain R_2 du transmetteur situé entre l'axe moteur et l'axe 2.

Le réducteur planétaire et le système poulies-courroie sont considérés de rendement unitaire.

Q 19 : À partir des caractéristiques de l'axe 2 données dans le diagramme de définition de blocs (figure 3), exprimer l'énergie cinétique $E_c(\Sigma/0)$ de l'ensemble de l'axe 2 mis en mouvement par le moteur, par rapport au châssis du robot. En déduire l'inertie équivalente J_{eq} ramenée au moteur. Faire l'application numérique.

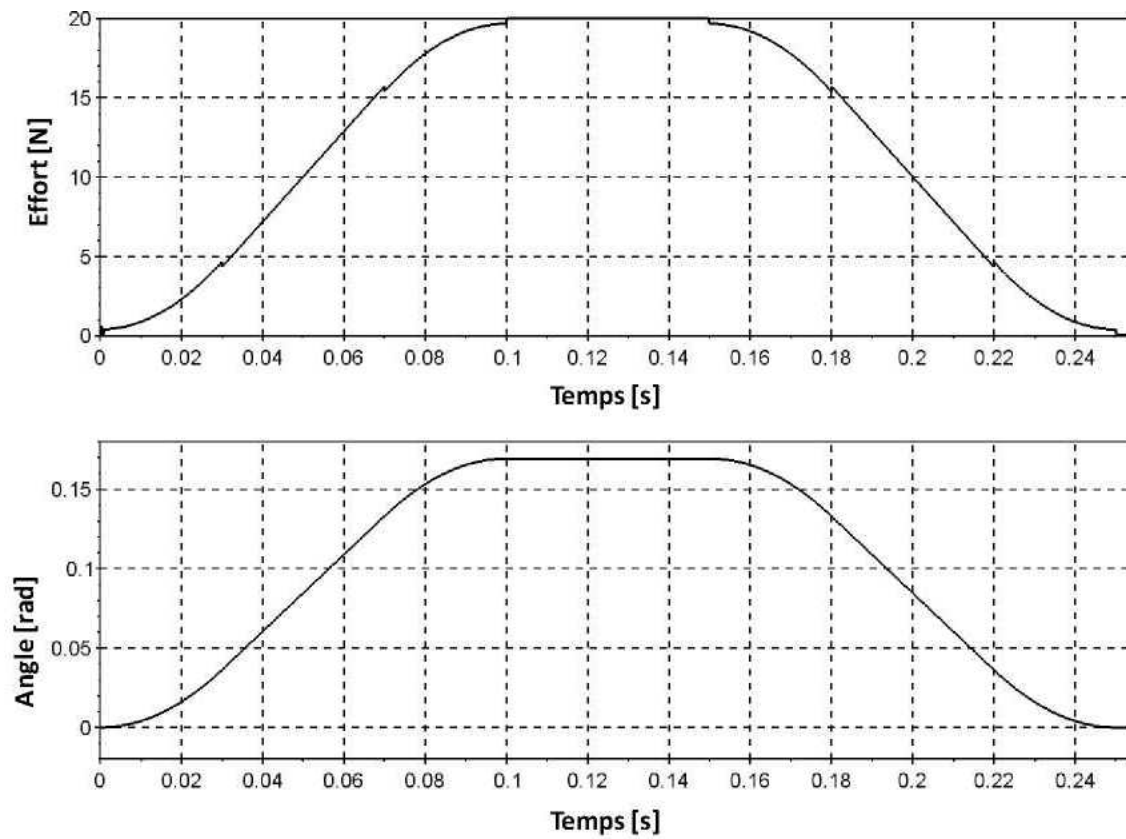


FIGURE 7 – Effort de contact sur la touche et angle de la touche

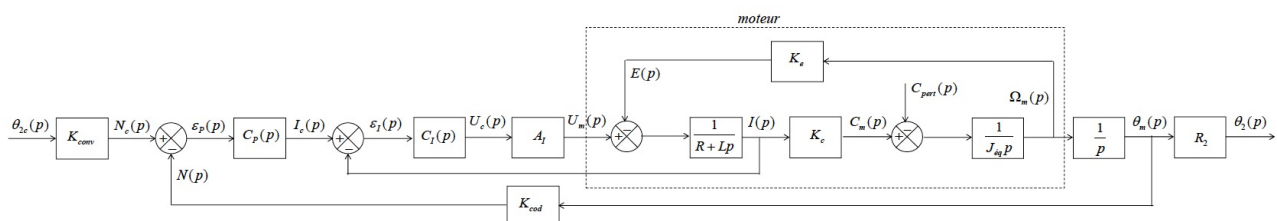


FIGURE 8 – Modélisation de l'asservissement du système

Solides	1	2	3	4
Paramétrage géométrique	$\overrightarrow{O_1O_2} = l_1 \vec{x}_1$	$\overrightarrow{O_2P} = l_2 \vec{x}_2$ $\overrightarrow{O_2A} = a_2 \vec{x}_2$	$\overrightarrow{O_3P} = -l_3 \vec{x}_3$ $\overrightarrow{O_3M} \cdot \vec{x}_0 = a_3$	-
	$l_1 = 45 \text{ mm}$	$l_2 = 45 \text{ mm}$	$l_3 = 120 \text{ mm}$ $a_3 = 210 \text{ mm}$	-
Centre de gravité	$\overrightarrow{O_1G_1} = c_1 \vec{x}_1$	$\overrightarrow{O_2G_2} = c_2 \vec{x}_2$	$\overrightarrow{O_3G_3} = c_3 \vec{x}_3$	-
	$c_1 = \frac{l_1}{2}$	$c_2 = \frac{l_2}{2}$	$c_3 = 32,8 \text{ mm}$	-
Masses	$m_1 = 22,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	$m_2 = 22,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	$m_3 = 4,78 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$	$m_4 = 4,93 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$
Moment d'inertie	I_1 selon l'axe $(G_1, \vec{z}_0)$	I_2 selon l'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	I_3 selon l'axe $(G_3, \vec{z}_0)$	-
	$I_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_3 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	-

Solides/0	Mouvements	Paramètres
1/0	Rotation d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$	$\theta_1(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
2/0	Rotation d'axe $(O_2, \vec{z}_0)$	$\theta_2(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$
3/0	Rotation d'axe $(O_3, \vec{z}_0)$	$\theta_3(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$
4/0	Translation de direction $\vec{y}_0$	$y_4(t) = \overrightarrow{O_3M} \cdot \vec{y}_0$

TABLE 1 – Paramétrage cinétique et géométrique

Exercice 2 : Modélisation d'un train d'atterrissage d'hélicoptère

Source : Banque PT SIA 2014

1 Présentation

Parmi les hélicoptères lourds de dernière génération, le NH90 (NATO Helicopter) est un hélicoptère biturbine européen de transport militaire de la classe des 10 tonnes conçu entre la France, l'Allemagne, l'Italie et les Pays Bas, rejoints par le Portugal en juin 2001 et la Belgique en 2006. Le NH90 se décline en 2 versions : TTH (transport tactique) et NFH (lutte anti-surface et anti-sous-marine). Les quatre groupes industriels, Agusta- Westland (Italie), Eurocopter (France), Eurocopter Deutschland et Fokker-Stork (Pays-Bas) ont constitué une coentreprise sous le nom de NHIndustries.

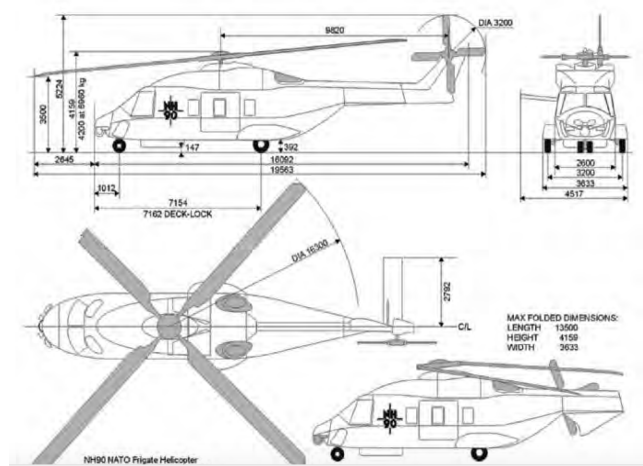


FIGURE 9 – NH90 NFH (© : MARINE NATIONALE)

Le NH90 est propulsé par 2 turbines Turbomeca Rolls-Royce RTM 322-01/9. Ses dimensions sont précisées par la figure 2 ci-contre et ses principales caractéristiques sont les suivantes :

Puissance moteur décollage/continue	1566/877 kW
Masse à vide/en charge	6400/10600 kg
Autonomie	5 h 30 min
Vitesse croisière/maximale	260/295 km/h

2 Cahier des charges du train d'atterrissage

L'interface de contact sol-hélicoptère doit répondre à un certain nombre d'exigences dont le cahier des charges partiel représenté par le diagramme d'exigence partiel est donné en figure 10 en annexe. Le complément de la caractérisation des différentes exigences peut être donné par le tableau suivant.

Exigences	Critères	Niveaux	Flexibilité
1	Capacité à supporter la vitesse d'impact	$< 4 m/s$	$0,2 m/s$
	Accélération angulaire du pylône de queue à l'impact	$< 3 rad/s^2$	$0,2 rad/s^2$
	Pulsation forcée des oscillations du pylône de queue	$< \text{pulsation propre}$	Aucune
1.1	Traînée aérodynamique ajoutée	$< 2\%$ traînée initiale	$0,5\%$
1.2	Effort de roulage	$< 1\%$ du poids	$0,2\%$
	Manoeuvrabilité	rotation sur place	
1.3	Retournement de roulis	Nul	aucune

3 Modélisation du comportement du train principal



Objectif 1 :

On cherche à obtenir les deux équations différentielles en z et θ décrivant les mouvements des solides 1 et 2. Cette partie s'appuie sur le modèle défini sur la figure 11 de l'annexe.

Notations et hypothèses Les notations sont fournies sur la figure 11 de l'annexe.

- Le repère $R_g : (O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ est un repère galiléen.
- Le problème est plan dans le plan de symétrie géométrique $(O, \vec{z}_g, \vec{x}_g)$
- En conséquence les solides 4 et 5 représentent deux vérins amortisseurs avec des caractéristiques k et λ doubles des caractéristiques d'un seul vérin amortisseur.
- L'hypothèse faite sur l'angle β conduit à considérer que $\overrightarrow{CD}$ est constamment colinéaire à $\vec{z}_0$, soit $\overrightarrow{CD} = l \cdot \vec{z}_0$.
- Le mouvement du solide 1 est réduit à un mouvement de translation vertical. En conséquence la roue 6 est fixe dans le repère galiléen.
- On rappelle que la masse des solides 3, 4, 5, 6 est négligée devant la masse des solides 1 et 2.
- On suppose toutes les liaisons énergétiquement parfaites.
- La liaison pivot entre 1 et 2 aussi bien que la liaison pivot glissant entre 4 et 5 sont actionnées par des ressorts de raideurs respectives k_θ et k et amorties en parallèle aux ressorts avec des facteurs d'amortissement λ_θ et λ .
- Dans ces conditions, pour la liaison pivot entre 1 et 2, on note :
 - le couple de rappel élastique $\vec{C}_r(1 \rightarrow 2) = C_r \cdot \vec{y}_g$ avec $C_r = -k_\theta \cdot \theta$,
 - le couple d'amortissement $\vec{C}_v(1 \rightarrow 2) = C_v \cdot \vec{y}_g$ avec $C_v = -\lambda_\theta \cdot \dot{\theta}$.
- De même pour la liaison pivot glissant entre 4 et 5, on note
 - la force de rappel élastique $\vec{F}_r(4 \rightarrow 5) = F_r \cdot \vec{z}_g$ avec $F_r = -k(l - l_0)$ où l_0 est la valeur de l quand le ressort est à vide,
 - la force d'amortissement $\vec{F}_v(4 \rightarrow 5) = F_v \cdot \vec{z}_g$ avec $F_v = -\lambda \dot{l}$.
 - Le solide 2 est toujours considéré comme une masse ponctuelle concentrée en G_2 .

On peut montrer que :

- $F_r(t)$ peut se mettre sous la forme $F_r(t) = -k_{eq} \cdot (z(t) - z_0)$ où k_{eq} est la raideur équivalente et z_0 la valeur de $z(t)$ quand l vaut l_0 avec $k_{eq} = k \cdot \frac{a}{a+b}$.
- $F_v(t)$ peut se mettre sous la forme $F_v = -\lambda_{eq} \cdot \dot{z}(t)$ où λ_{eq} est le facteur d'amortissement équivalent. $\lambda_{eq} = \lambda \cdot \frac{a}{a+b}$

Modèle du comportement du solide 2



Objectif 2 :

Il s'agit de déterminer l'équation différentielle issue de l'application du principe fondamental de la dynamique au solide 2 c'est-à-dire au pylône de queue.

On suppose que l'angle $\theta(t)$ varie peu et que par conséquent on peut faire l'approximation $\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1$.

Q 20 : Exprimer le moment dynamique du solide 2 au point H dans son mouvement par rapport au repère galiléen, soit $\delta(H, 2/R\vec{g})$ en fonction de $m_2, L, \ddot{\theta}(t)$ et $\ddot{z}(t)$.

Q 21 : Après un bilan rigoureux des actions mécaniques extérieures au solide 2, isoler le solide 2 et écrire le théorème du moment dynamique au point H en projection sur $\vec{y}_g$. En déduire l'équation différentielle :

$$m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta}(t) + \lambda_\theta(t) \cdot \dot{\theta}(t) + k_\theta \cdot \theta(t) = m_2 \cdot L \cdot \ddot{z}(t) + m_2 \cdot L \cdot g \quad (1)$$

Modèle de comportement du solide 1



Objectif 3 :

Il s'agit de déterminer une équation différentielle issue de l'application du théorème de l'énergie puissance (ou théorème de l'énergie cinétique ou encore théorème de la puissance cinétique) afin de modéliser le comportement du fuselage 1.

Voir hypothèses générales de la partie 3. On suppose toujours que l'angle θ varie peu et que par conséquent on peut faire l'approximation $\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1$.

On note Σ l'ensemble (1+2+3+4+5+6).

Q 22 : Exprimer la puissance galiléenne développée par les actions mécaniques extérieures à l'ensemble Σ , en fonction de $m_1, m_2, g, L, \dot{\theta}(t)$ et $\dot{z}(t)$.

Q 23 : Exprimer la puissance développée par les interactions mécaniques internes à l'ensemble Σ , en fonction de $k_\theta, k_{eq}, \lambda_\theta, \lambda_{eq}, L, \theta(t), z(t), z_0, \dot{\theta}(t)$ et $\dot{z}(t)$.

Q 24 : Exprimer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble Σ en fonction de $m_1, m_2, L, \dot{\theta}(t)$ et $\dot{z}(t)$.

Q 25 : Appliquer le théorème de l'énergie puissance à l'ensemble Σ . L'équation obtenue sera notée équation 2

(2)

Q 26 : En combinant les équations 1 et 2, montrer que l'on obtient l'équation différentielle :

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{z}(t) + [\lambda_{eq} \cdot \dot{z}(t) + k_{eq} \cdot (z(t) - z_0)] = m_2 \cdot L \cdot \ddot{\theta}(t) - (m_1 + m_2) \cdot g \quad (3)$$

Q 27 : Déterminer avec l'équation 1, la valeur de $\theta = \theta_0$ quand le système est à l'équilibre en fonction de m_2, L et k_θ . En déduire que l'on obtient l'équation 1 sous la forme :

$$m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta}(t) + \lambda_\theta \cdot \dot{\theta}(t) + k_\theta (\theta(t) - \theta_0) = m_2 \cdot L \cdot \ddot{z}(t). \quad (4)$$

4 Annexes

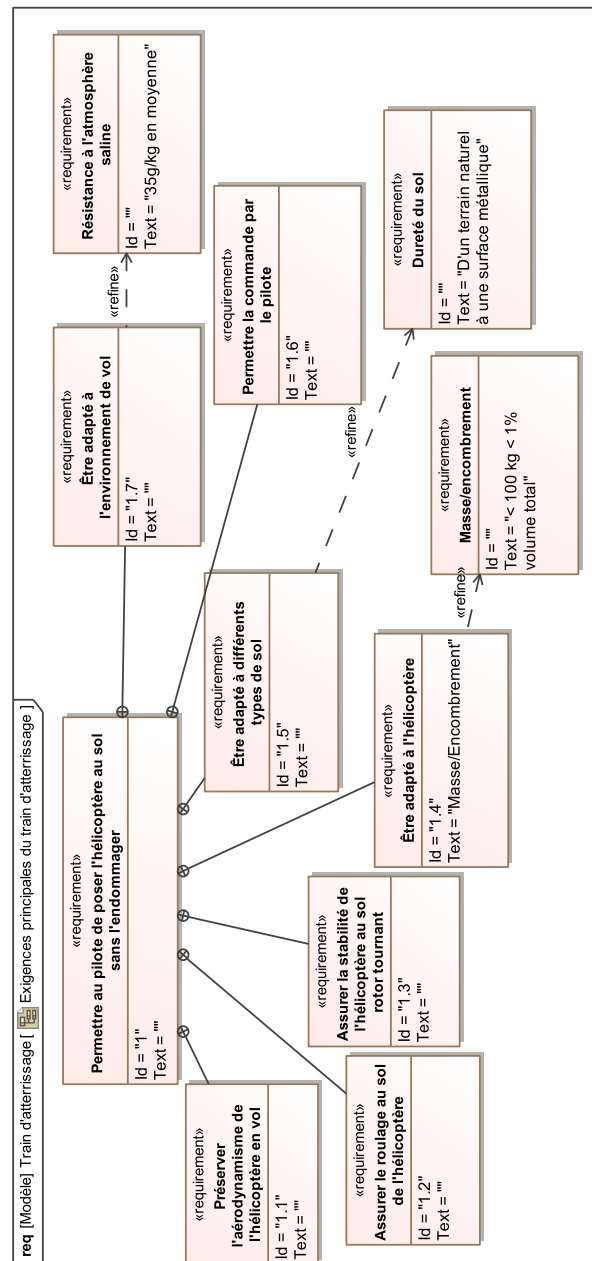


FIGURE 10 – Diagramme des exigences partiel du train d'atterrissage

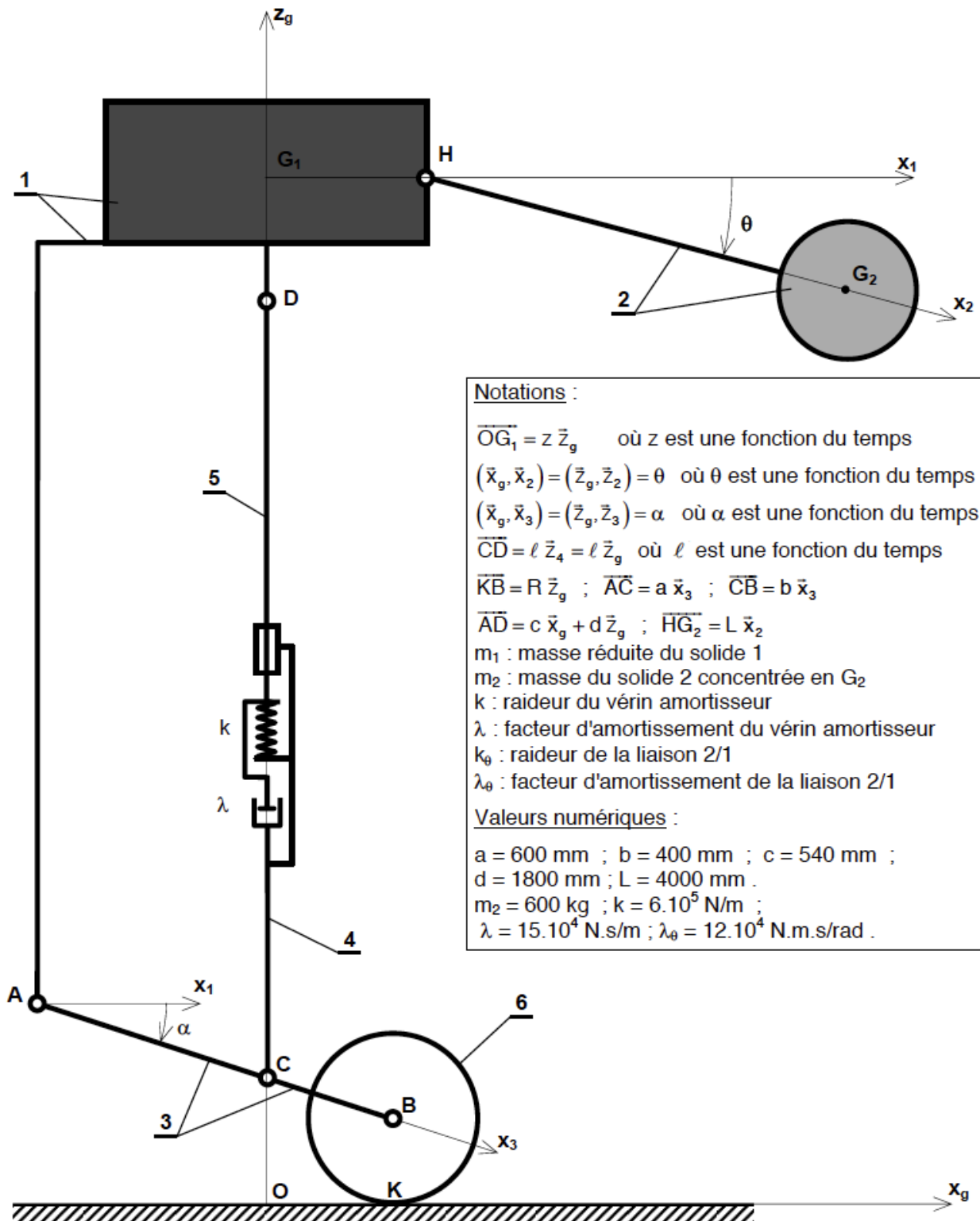


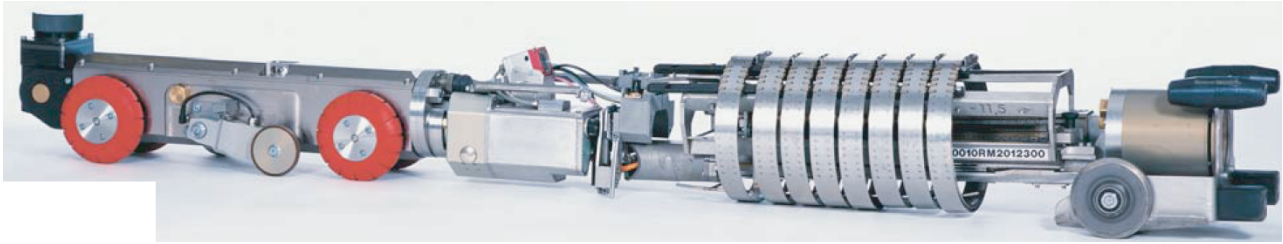
FIGURE 11 – Modélisation cinématique de la structure pour l'étude du comportement

Exercice 3 : Robot poseur de fibre optique

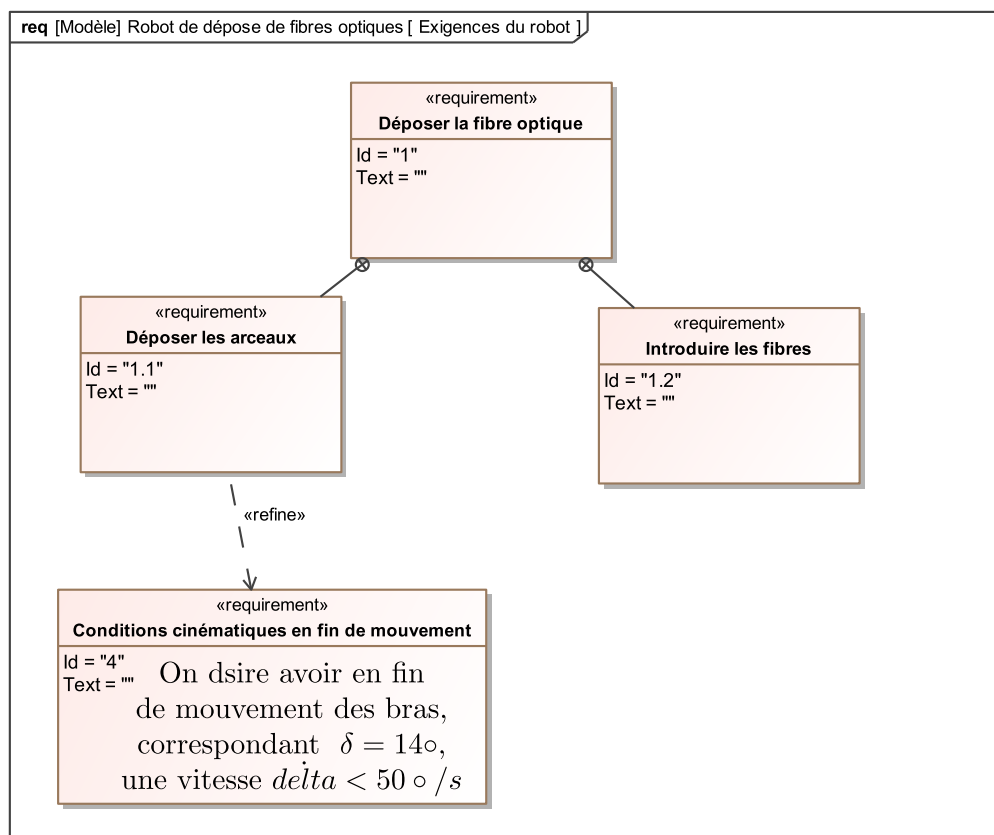
Source : Mines pont si MP 2004

1 Présentation

L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.



On donne le diagramme des exigences partiel du systèmes ci-dessous :



De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.

Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action F du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. A l'instant où un anneau métallique doit être installé, les roues du train arrière sont bloquées par rapport au chariot. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. A un instant " t ", le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :

2 Hypothèses

- L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

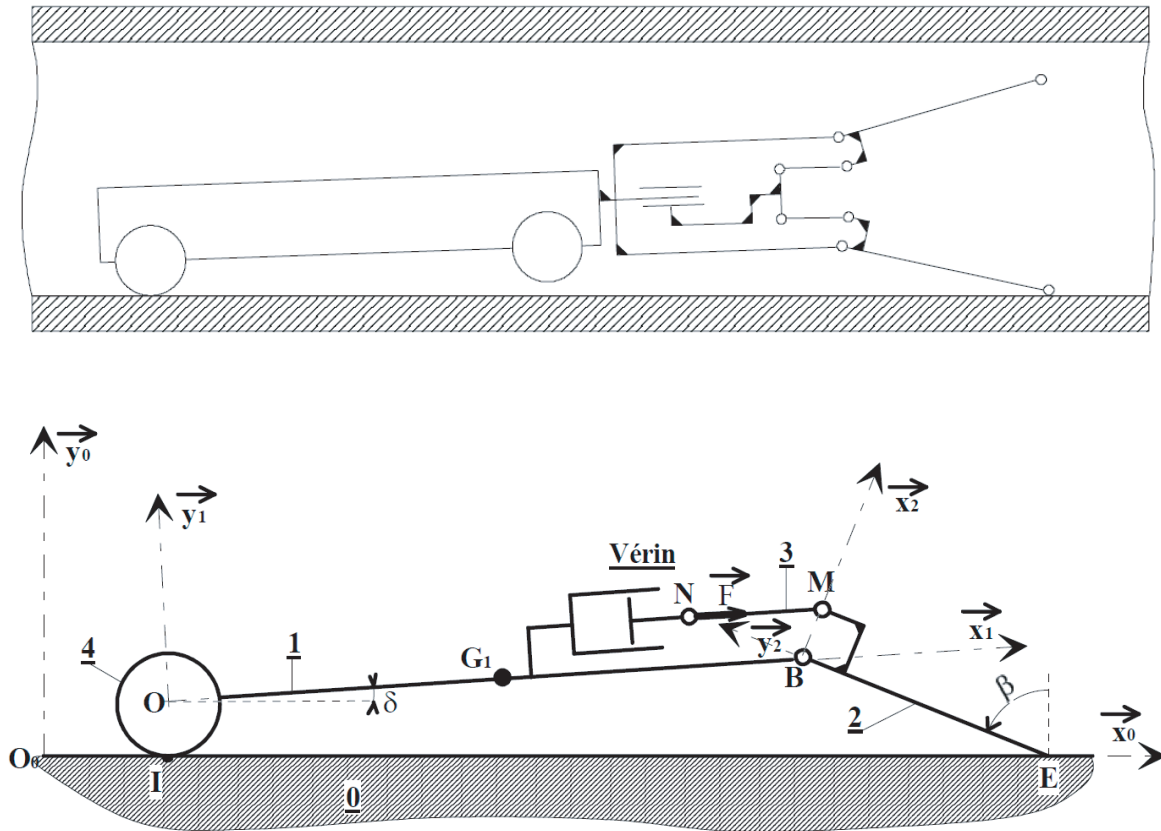


FIGURE 12 – Modélisation du robot

- Le robot est modélisé par le schéma 12. Il comprend :
 - Une tige 1 de longueur $OB = L_1$, de section négligeable, de masse m_1 , et de centre d'inertie G_1 , tel que $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2} \vec{x}_1$.
 - Une roue 4, de centre O , de rayon $R = 0,07m$, de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec 1.
 - Un bras 2 constitué de deux éléments BE et BM tels que $\overrightarrow{BE} = -a\vec{y}_2$ et $\overrightarrow{BM} = b\vec{x}_2$, de section et de masse négligeables.
 - Une bielle 3 (NM) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige 1.
 - Un vérin hydraulique de masse négligeable.
- En I, le contact entre la roue 4 et la paroi 0 se fait par roulement sans glissement.
- En E, le contact entre le bras 2 et la paroi 0 se fait sans frottement.
- L'action $\vec{F}$ du vérin sur la bielle 3a, à chaque instant, pour direction $\vec{x}_1$:

$$\vec{F} = F\vec{x}_1.$$

3 Repères et paramétrage

- $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, repère associée à la canalisation O et supposé galiléen.
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, repère associé à la tige 1.
- $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, repère associé au bras 2.
- $\delta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.

4 Cahier des charges

On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à $\delta = 14^\circ$, une vitesse $\dot{\delta}$ inférieur à $50^\circ/s$

5 Modélisation dynamique

Q 28 : Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$.

Q 29 : Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ .

Q 30 : Donner la puissance intérieure à Σ .

Q 31 : Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F , δ , et β .

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure 13) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Q 32 : Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.

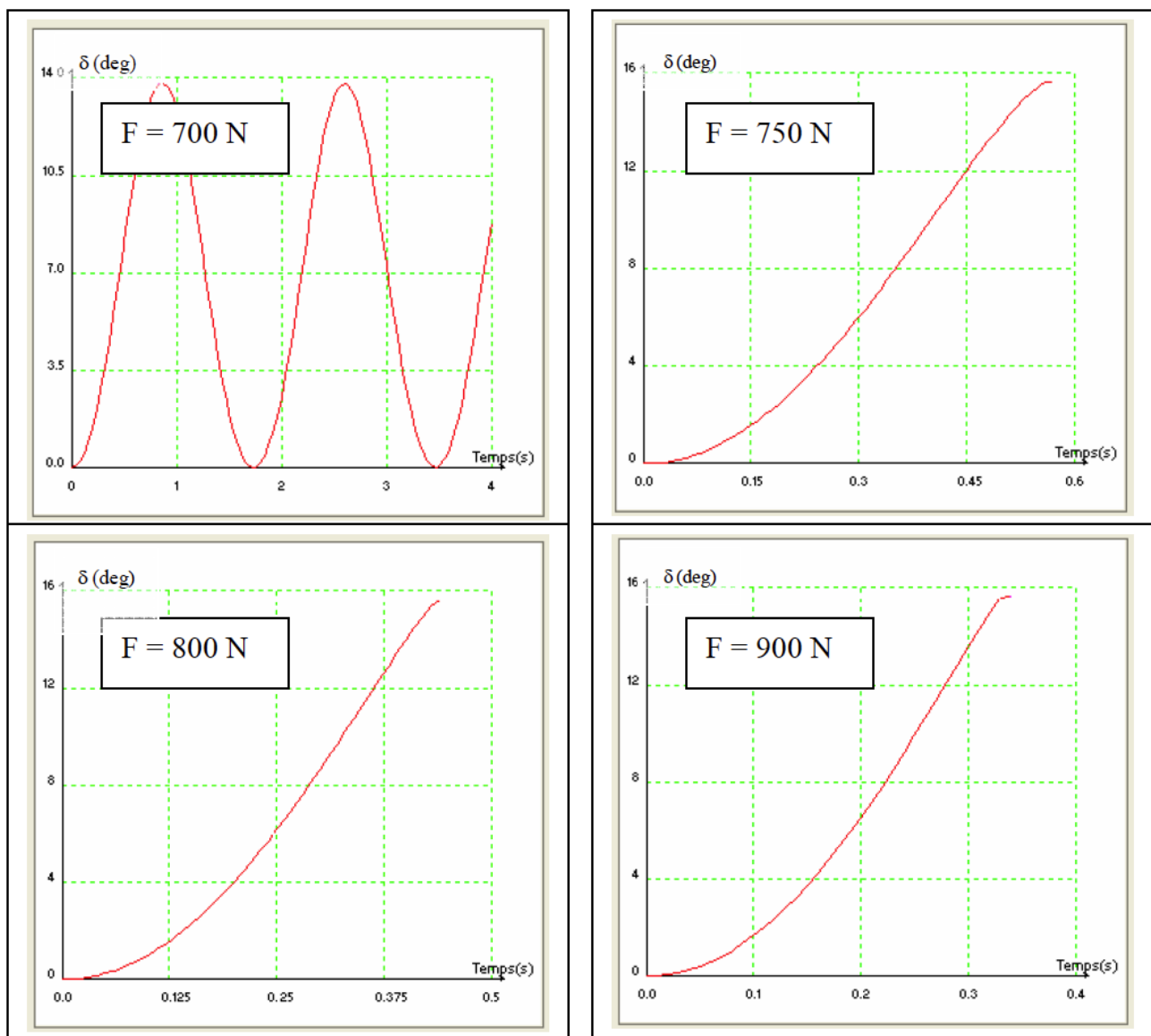


FIGURE 13 – Résultats de la simulation dynamique du système

Corrigé

Exercice 1 : Modélisation d'un robot dropic

Q 1 : A l'aide des données de l'annexe 3, donner l'expression du moment d'inertie du solide 3 par rapport à l'axe $(O_3, \vec{z}_0)$ que l'on notera J_3 .

L'annexe 3 donne le moment d'inertie de 3 selon l'axe $(G_3, \vec{z}_0)$.

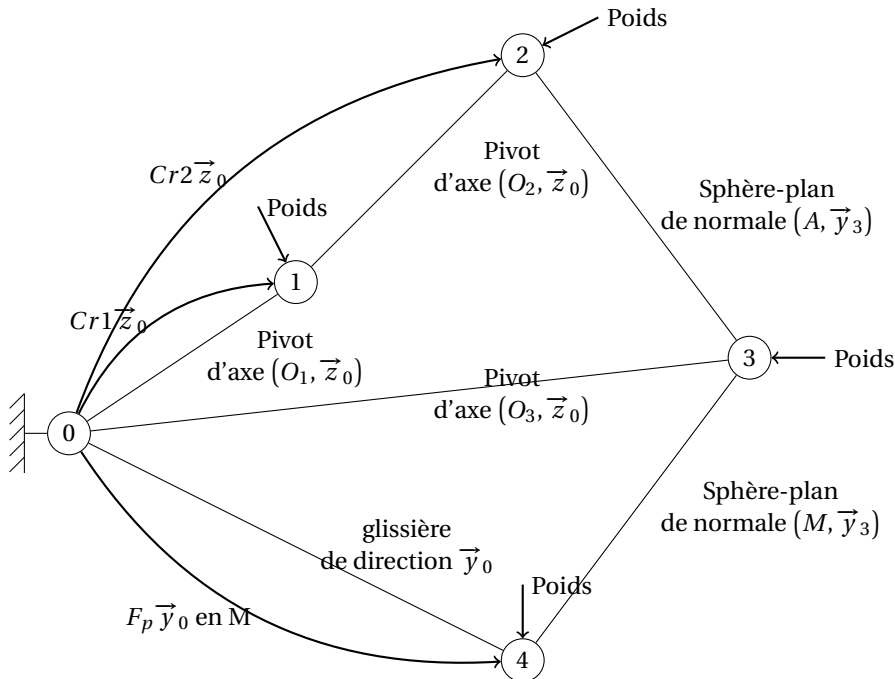
On peut alors utiliser le théorème de Huygens pour l'obtenir selon l'axe $(O_3, \vec{z}_0)$:

$$J_3 = I_{(O_3, \vec{z}_0)}(S_3) = I_{(G_3, \vec{z}_0)}(S_3) + m_3 \cdot \overline{C_3 G_3}^2$$

On trouve alors :

$$J_3 = I_3 + m_3 \cdot c_3^2$$

Q 2 : Tracer le graphe de structure modélisant le problème défini en annexe 2 sur la figure 6.



Q 3 : Justifier l'utilisation de l'hypothèse d'un problème plan.

Les rotations sont toutes selon la même direction $(\vec{z}_0)$ et les translations sont toutes $\perp$ à $\vec{z}_0$. On peut donc traiter le problème comme un problème plan de normale $\vec{z}_0$.

Q 4 : Proposer et justifier un ordonnancement des isolements pour obtenir cette équation de mouvement traduisant le comportement dynamique de l'ensemble E. On énoncera rigoureusement les théorèmes généraux à utiliser et leur axes de projection.

- le solide 3 est en mouvement de rotation autour de l'axe $(O_3, \vec{z}_0)$ fixe par rapport au référentiel R_0 supposé galiléen. On peut donc utiliser le Théorème du Moment Dynamique selon $(O_3, \vec{z}_0)$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_3(3 \rightarrow 3)}} \cdot \vec{z}_0 = I_{(O_3, \vec{z}_0)}(3) \cdot \ddot{\theta}_3$$

- le solide 4 est en mouvement de translation selon la direction $\vec{y}_0$ par rapport au référentiel R_0 supposé galiléen. On peut donc utiliser le Théorème de la résultante Dynamique selon $\vec{y}_0$:

$$m \vec{a}(G_4/R_g) \cdot \vec{y}_0 = \overrightarrow{R_{(4 \rightarrow 4)}} \cdot \vec{y}_0$$

Q 5 : Donner la forme du torseur de la liaison entre 4 et 3 en tenant compte de l'hypothèse d'un problème plan.

On prendra soin de bien préciser le lieu d'invariance du torseur.

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{34} = Y_{34} \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P \in (M, \vec{y}_3)}$$

Q 6 : Faire le bilan en résultante d'actions mécaniques s'appliquant à 4 selon la direction $\vec{y}_0$.

Le bilan nous donne :

$$\overrightarrow{R_{(4 \rightarrow 4)}} \cdot \vec{y}_0 = \vec{R}_{43} \cdot \vec{y}_0 + \vec{F}_p \cdot \vec{y}_0 + \overrightarrow{Poids \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0$$

- $\vec{R}_{34} \cdot \vec{y}_0 = Y_{34} \vec{y}_3 \cdot \vec{y}_0 = Y_{34} \cos \theta_3$
- $\vec{F}_p \cdot \vec{y}_0 = -F_p$
- $\overrightarrow{Poids \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0 = -m_4 \cdot g$

$$\boxed{\overrightarrow{R_{(4 \rightarrow 4)}} \cdot \vec{y}_0 = Y_{34} \cos \theta_3 - F_p - m_4 \cdot g}$$

Q 7 : Faire le bilan en moment d'actions mécaniques s'appliquant à 3 selon l'axe $(O_3, \vec{z}_0)$.

Le bilan nous donne :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_3(\vec{z}_0)}} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(O_3, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}(O_3, 0 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}(O_3, poids \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}(O_3, 4 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0$$

- $\vec{M}(O_3, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 :$

$$\vec{M}(O_3, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(P, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 + (\overrightarrow{O_3P} \wedge -\vec{F}_t) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0} + (-l_3 \vec{x}_3 \wedge -F_t \vec{y}_3) \cdot \vec{z}_0 = l_3 F_t$$

- $\vec{M}(O_3, 0 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = 0$ car liaison pivot parfaite.
- $\vec{M}(O_3, poids \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 :$

$$\begin{aligned} \vec{M}(O_3, poids \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 &= \vec{M}(G_3, poids \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 + (\overrightarrow{O_3G_3} \wedge -m_3 g \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 = (c_3 \vec{x}_3 \wedge -m_3 g \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 \\ &= -m_3 g c_3 \cos \theta_3 \end{aligned}$$

- $\vec{M}(O_3, 4 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 :$

$$\begin{aligned} \vec{M}(O_3, 4 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 &= \vec{M}(M, 4 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 + (\overrightarrow{O_3M} \wedge -\vec{R}_{34}) \cdot \vec{z}_0 = [(a_3 \vec{x}_0 + y_4 \vec{x}_0) \wedge -Y_{34} \vec{y}_3] \cdot \vec{z}_0 \\ &= -Y_{34} [a_3 \cos \theta_3 + y_4 \sin \theta_3] \end{aligned}$$

avec $y_4 = a_3 \tan \theta_3$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_3(\vec{z}_0)}} \cdot \vec{z}_0 = l_3 F_t - m_3 g c_3 \cos \theta_3 - Y_{34} [a_3 \cos \theta_3 + y_4 \sin \theta_3]}$$

Q 8 : Appliquer les théorèmes généraux issus de l'ordonnancement proposé pour obtenir deux équations différentielles couplées fonction de $y_4(t)$ et $\theta_3(t)$ et dépendantes des paramètres géométriques et cinétiques du problème et d'actions mécaniques.

On obtient alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} m_4 \ddot{y}_4(t) = Y_{34} \cos \theta_3 - F_p - m_4 \cdot g \\ (I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \ddot{\theta}_3(t) = l_3 F_t - m_3 g c_3 \cos \theta_3 - Y_{34} [a_3 \cos \theta_3 + y_4 \sin \theta_3] \end{array} \right.$$

Q 9 : Montrer alors que les deux équations différentielles obtenues aux questions précédentes peuvent se mettre sous la forme d'une seule équation différentielle $A_1 \ddot{\theta}_3 + A_2 \theta_3 = A_3 F_t + A_4$.

Avec,

De plus

$$\cos \theta_3(t) \approx 1$$

$$y_4(t) \approx a_3 \theta_3(t)$$

$$\sin \theta_3(t) \approx \theta_3(t)$$

$$\dot{y}_4(t) \approx a_3 \dot{\theta}_3(t)$$

$$\tan \theta_3(t) \approx \theta_3(t)$$

$$\ddot{y}_4(t) \approx a_3 \ddot{\theta}_3(t)$$

$$\theta_3(t)^2 \text{ négligeables}$$

$$F_p = K_{eq} y_4(t) \approx K_{eq} a_3 \theta_3(t)$$

Les équations différentielles deviennent alors

$$\begin{cases} (a) & m_4 a_3 \ddot{\theta}_3(t) = Y_{34} - F_p - m_4 \cdot g \\ (b) & (I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \ddot{\theta}_3(t) = l_3 F_t - m_3 g c_3 - Y_{34} a_3 \end{cases}$$

On combine alors les équations avec $a_3 \times (a) + (b)$:

$$(m_4 a_3^2 + I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \ddot{\theta}_3(t) = -K_{eq} a_3^2 \theta_3(t) - g(a_3 m_4 + m_3 c_3) + l_3 F_t$$

Q 10 : Déterminer alors les constantes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction des paramètres géométriques et cinétiques du problème.

On obtient alors,

$$(m_4 a_3^2 + I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \ddot{\theta}_3(t) + K_{eq} a_3^2 \theta_3(t) = l_3 F_t - g(a_3 m_4 + m_3 c_3)$$

Ce qui donne :

$$A_1 = m_4 a_3^2 + I_3 + m_3 \cdot c_3^2$$

$$A_2 = K_{eq} a_3^2$$

$$A_3 = l_3$$

$$A_4 = -g(a_3 m_4 + m_3 c_3)$$

Q 11 : Exprimer l'énergie cinétique $Ec(4/0)$ du sautereau 4 par rapport au bâti 0 en fonction du paramètre cinématique $\dot{y}_4(t)$ et des autres données utiles.

Le solide 4 est en translation dans le bâti 0, donc

$$Ec\left(\frac{4}{0}\right) = \frac{1}{2} m_4 \cdot \dot{y}_4(t)^2$$

Q 12 : Exprimer l'énergie cinétique $Ec(3/0)$ de la touche 3 par rapport au bâti 0 en fonction du paramètre cinématique $\dot{\theta}_3(t)$ et des autres données utiles.

Le solide 3 est en rotation d'axe $(O_3, \vec{z}_0)$ dans le bâti 0, donc

$$Ec\left(\frac{3}{0}\right) = \frac{1}{2} I_{(O_3, \vec{z}_0)}(3) \cdot \dot{\theta}_3(t)^2$$

Or le moment d'inertie $I_{(O_3, \vec{z}_0)}(3)$ s'exprime grâce à Huygens : $I_{(O_3, \vec{z}_0)}(3) = I_{(O_3, \vec{z}_0)}(G_3) + I_{(G_3, \vec{z}_0)}(3)$

$$\text{D'où } Ec\left(\frac{3}{0}\right) = \frac{1}{2} (I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \cdot \dot{\theta}_3(t)^2$$

Remarque : une autre possibilité aurait été d'utiliser l'expression de l'énergie cinétique dans le cas d'un mouvement plan.

$$Ec\left(\frac{3}{0}\right) = \frac{1}{2} m_3 V\left(\frac{G_3}{0}\right)^2 + \frac{1}{2} I_3 \cdot \dot{\theta}_3(t)^2$$

Q 13 : Exprimer l'énergie cinétique $Ec(E/0)$ de l'ensemble E par rapport au bâti 0 en fonction des paramètres cinématiques $\dot{\theta}_3(t)$, $\dot{y}_4(t)$ et des autres données utiles.

$$Ec(E/0) = Ec(3/0) + Ec(4/0) = \frac{1}{2} (I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \cdot \dot{\theta}_3(t)^2 + \frac{1}{2} m_4 \cdot \dot{y}_4(t)^2$$

Q 14 : Exprimer la puissance P_{int} des inter-efforts de l'ensemble E.

La seule action intérieure est ici due aux inter-efforts $3 \leftrightarrow 4$ qui est liée à une liaison ponctuelle parfaite, donc

$$P_{\text{int}} = P(3 \leftrightarrow 4) = 0$$

Q 15 : Exprimer la puissance par rapport au bâti 0 des actions extérieures $P_{\text{ext} \rightarrow E/0}$ s'exerçant sur l'ensemble E.

Les puissances extérieures sont :

- $P(0 \rightarrow 3/0)$ qui s'exprime comme $P(0 \leftrightarrow 3)$ qui est nulle car la liaison est parfaite.
- De la même façon $P(0 \rightarrow 4/0) = 0$
-

$$P(2 \rightarrow 3/0) = (-\vec{F}_t) \cdot \vec{V}\left(P, \frac{3}{0}\right) = F_t \cdot l_3 \cdot \dot{\theta}_3$$

on vérifie que cette puissance est positive si $\dot{\theta}_3 > 0$ car motrice

-

$$P(\text{corde} \rightarrow 4/0) = \vec{F}_p \cdot \vec{V}\left(M, \frac{4}{0}\right) = -F_p \cdot \dot{y}_4$$

on vérifie que cette puissance est négative si $\dot{y}_4 > 0$ car résistante

- La pesanteur

$$P(\text{pesanteur} \rightarrow E/0) = P(\text{pesanteur} \rightarrow 3/0) + P(\text{pesanteur} \rightarrow 4/0) = -m_3 g \cdot c_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \cos \theta_3 - m_4 g \cdot \dot{y}_4$$

Soit

$$P(\vec{E} \rightarrow E/0) = F_t \cdot l_3 \cdot \dot{\theta}_3 - F_p \cdot \dot{y}_4 - m_3 g \cdot c_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \cos \theta_3 - m_4 g \cdot \dot{y}_4$$

Q 16 : L'angle $\theta_3(t)$ restant petit au cours du mouvement de la touche, donner une relation linéaire liant $y_4(t)$ et $\theta_3(t)$. Montrer alors que l'on peut obtenir l'équation de mouvement suivante où vous explicitez les termes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 :

On a $y_4(t) = a_3 \tan \theta_3(t)$. Or si l'angle $\theta_3(t)$ est petit il vient $y_4(t) = a_3 \theta_3(t)$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à E donne :

$$\frac{dEc(E/0)}{dt} = P(\vec{E} \rightarrow E/0) + P_{\text{int}}$$

L'énergie cinétique peut maintenant s'écrire en fonction d'un unique paramètre

$$Ec(E/0) = \frac{1}{2} (I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \cdot \dot{\theta}_3(t)^2 + \frac{1}{2} m_4 (a_3 \dot{\theta}_3(t))^2$$

De même pour les puissances :

$$P(\vec{E} \rightarrow E/0) = F_t \cdot l_3 \cdot \dot{\theta}_3 - K_{\text{eq}} a_3^2 \theta_3 \cdot \dot{\theta}_3 - m_3 g \cdot c_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \cos \theta_3 - m_4 g \cdot a_3 \cdot \dot{\theta}_3$$

D'où la loi de mouvement :

$$(I_3 + m_3 \cdot c_3^2 + m_4 \cdot a_3^2) \cdot \ddot{\theta}_3(t) = F_t \cdot l_3 \cdot \dot{\theta}_3 - K_{\text{eq}} a_3^2 \theta_3 \cdot \dot{\theta}_3 - m_3 g \cdot c_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \cos \theta_3 - m_4 g \cdot a_3 \cdot \dot{\theta}_3$$

Soit par identification :

$$A_1 = I_3 + m_3 \cdot c_3^2 + m_4 \cdot a_3^2$$

$$A_2 = K_{\text{eq}} a_3^2$$

$$A_3 = l_3$$

$$A_4 = -g(m_3 \cdot c_3 + m_4 \cdot a_3)$$

Q 17 : Commenter la courbe d'effort de contact vis-à-vis des exigences du robot.

Pour cette loi de déplacement imposé (appui et relâchement d'une touche en 0,25s soit tempo lente à 230 battements par minutes), l'effort maximal ne dépasse pas l'exigence d'effort de 20N. Il resterait à vérifier que cela est aussi le cas pour le tempo rapide.

Q 18 : Expliquer succinctement ce qui rend difficile la résolution des équations associées au modèle de la figure

?? et quels moyens et/ou hypothèses vous mettriez en œuvre pour les résoudre.

Deux difficultés :

- Équations non-linéaires (présence de fonctions trigo et termes en $\dot{\theta}^2$)
 - Les deux équations de mouvement sont couplées
- Mise en place d'un calcul numérique approché.

Q 19 : En considérant la situation $\theta_1(t) = \theta_2(t) = 0 \text{ rad}$ et le réducteur de rendement unitaire, établir l'expression du couple statique $C_{r1}(t)$ puis du couple statique $C_{m1}(t)$.

En statique il vient :

$$C_{r1} = c_1 m_1 g + l_1 m_2 g - l_1 F_y$$

En appliquant le TEC en quasi-statique, on retrouve aisément que $\dot{\theta}_1 \cdot C_{r1} = \dot{\theta}_{m1} \cdot C_{m1}$

D'où $C_{m1} = \frac{4}{49} \cdot C_{r1}$

Q 20 : Conclure quant à la capacité des moteurs à imposer l'effort maximal sur la touche.

AN : on prend un effort en P de 20N dans le sens du poids afin d'avoir un couple maximum (le sens de l'effort change peu la valeur du couple car l'effet du poids est faible).

$$C_{r1} = \frac{3.45 \cdot 10^{-3} \cdot 22 + 3 \cdot 10^{-3} \cdot 9.81}{2} + 45 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0.914 \text{ N.m}$$

Et $C_{m1} = \frac{4}{49} \cdot C_{r1} = 0.074 \text{ N.m}$

Or le couple nominal peut se déduire des données du moteur (Constante de couple x Intensité nominale) :

$C_{\text{nominal}} = 0.119 \cdot 0.915 = 0.11 \text{ N.m}$

Conclusion : le moteur peut aisément fournir le couple statique avec un coefficient de sécurité de 1,5. Il resterait à valider ce résultat en dynamique.

Q 21 : À partir des caractéristiques du réducteur planétaire et du système poulies-courroie données dans le diagramme de définition de blocs (figure 3, annexe 1 et figure 5, annexe 2), déterminer le gain R_2 du transmetteur situé entre l'axe moteur et l'axe 2.

Le réducteur planétaire et le système poulies-courroie sont considérés de rendement unitaire

$\dot{\theta}_2 = R_2 \cdot \dot{\theta}_m$ d'une part et $\dot{\theta}_2 = \frac{4}{49} \cdot \dot{\theta}_m$ d'autre part.

Donc R_2 est le rapport de réduction du réducteur.

$$R_2 = \frac{4}{49}$$

Exercice 2 : Modélisation d'un train d'atterrissage d'hélicoptère

Q 22 : Exprimer le moment dynamique du solide 2 au point H dans son mouvement par rapport au repère galiléen, soit $\delta(H, 2/Rg)$ en fonction de m_2 , L , $\ddot{\theta}(t)$ et $\ddot{z}(t)$.

$$\vec{\delta}_H(2/R_g) = \vec{\delta}_{G_2}(2/R_g) + \overrightarrow{HG_2} \wedge m_2 \vec{a}(G_2 \in 2/R_g)$$

Or,

$$\vec{V}(G_2 \in 2/R_g) = \left[\frac{d(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{G_1H} + \overrightarrow{HG_2})}{dt} \right]_{R_g} = \dot{z} \vec{z}_g + L \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_g}$$

On a :

$$\begin{cases} \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_g} = -\dot{\theta}(t) \vec{z}_2 \\ \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_g} = \dot{\theta}(t) \vec{x}_2 \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} \vec{V}(G_2 \in 2/R_g) = \dot{z} \vec{z}_g - L\dot{\theta}(t) \vec{z}_2 \\ \vec{a}(G_2 \in 2/R_g) = \ddot{z} \vec{z}_g - L(\ddot{\theta}(t) \vec{z}_2 + \dot{\theta}^2(t) \vec{x}_2) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_H(2/R_g) &= \vec{0} + L\vec{x}_2 \wedge m_2 [\ddot{z} \vec{z}_g - L(\ddot{\theta}(t) \vec{z}_2 + \dot{\theta}^2(t) \vec{x}_2)] \\ &= m_2 \cdot L(-\ddot{z} \cos \theta + L\ddot{\theta}) \vec{y}_g \approx m_2 \cdot L(L\ddot{\theta} - \ddot{z}) \vec{y}_g \end{aligned}$$

Q 23 : Après un bilan rigoureux des actions mécaniques extérieures au solide 2, isoler le solide 2 et écrire le théorème du moment dynamique au point H en projection sur $\vec{y}_g$. En déduire l'équation différentielle :

$$m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta}(t) + \lambda_{\theta}(t) \cdot \dot{\theta}(t) + k_{\theta} \cdot \theta(t) = m_2 \cdot L \cdot \ddot{z}(t) + m_2 \cdot L \cdot g$$

- ✓ Action de la liaison pivot avec 1, telle que : $\overrightarrow{M_H}(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_g = 0$,
- ✓ Pesanteur : $-m_2 \cdot g \vec{z}_g$ en G_2 ,
- ✓ Couples : $\overrightarrow{C_v}(1 \rightarrow 2)$ et $\overrightarrow{C_r}(1 \rightarrow 2)$.

$$\text{Moment en H des actions de la pesanteur sur 2 : } \overrightarrow{M_H}(g \rightarrow 2) = L \vec{x}_2 \wedge (-m_2 \cdot g \vec{z}_g) = m_2 \cdot L \cdot g \cdot \cos(\theta) \vec{y}_g \approx m_2 \cdot L \cdot g \vec{y}_g.$$

$$\text{Théorème du moment dynamique en H en projection suivant } \vec{y}_g : m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} - m_2 \cdot L \cdot \ddot{z} = -k_{\theta} \cdot \theta - \lambda_{\theta} \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot L \cdot g \quad (1)$$

Q 24 : Exprimer la puissance galiléenne développée par les actions mécaniques extérieures à l'ensemble Σ , en fonction de m_1 , m_2 , g , L , $\dot{\theta}(t)$ et $\dot{z}(t)$.

- ✓ $P(0 \rightarrow 6/R_g) = 0$, car on considère la roue fixe,
- ✓ $P(g \rightarrow 3 + 4 + 5 + 6/R_g) = 0$, car masses de 3, 4, 5 et 6 négligées,
- ✓ $P(g \rightarrow 1/R_g) = -m_1 \cdot g \cdot \dot{z}$
- ✓ $P(g \rightarrow 2/R_g) = -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_g \cdot (\dot{z} \vec{z}_g - L\dot{\theta} \vec{z}_2) = -m_2 \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta} \cos(\theta) = -m_2 \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta}$

$$\text{Soit finalement : } P_{\text{ext}} = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta}$$

Q 25 : Exprimer la puissance développée par les interactions mécaniques internes à l'ensemble Σ , en fonction de k_{θ} , k_{eq} , λ_{θ} , λ_{eq} , L , $\theta(t)$, $z(t)$, z_0 , $\dot{\theta}(t)$ et $\dot{z}(t)$.

$$\checkmark \quad P(1 \leftrightarrow 2) = 0 - \lambda_{\theta} \cdot \dot{\theta}^2 - k_{\theta} \cdot \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\checkmark \quad P(4 \leftrightarrow 5) = 0 - \lambda_{eq} \cdot \dot{z}^2 - k_{eq} \cdot (z - z_0) \cdot \dot{z}$$

Les autres puissances intérieures sont nulles (liaisons parfaites et solides rigides).

Soit finalement : $P_{int} = -\dot{\theta} \cdot (\lambda_{\theta} \cdot \dot{\theta} + k_{\theta} \cdot \theta) - \dot{z} \cdot (\lambda_{eq} \cdot \dot{z} + k_{eq} \cdot (z - z_0))$. On a bien une puissance négative.

Q 26 : Exprimer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble Σ en fonction de m_1 , m_2 , L , $\dot{\theta}(t)$ et $\dot{z}(t)$.

$$\checkmark \quad E_c(3 + 4 + 5 + 6 / R_g) = 0, \text{ car masses de 3, 4, 5 et 6 négligées,}$$

$$\checkmark \quad E_c(1 / R_g) = \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{z}^2,$$

$$\checkmark \quad E_c(2 / R_g) = \frac{1}{2} m_2 \cdot (\dot{z} \cdot \overline{z_g} - L \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z_2}) \cdot (\dot{z} \cdot \overline{z_g} - L \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z_2}) = \frac{1}{2} m_2 \cdot (\dot{z}^2 + L^2 \cdot \dot{\theta}^2 - 2 \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{z})$$

$$\text{Soit finalement : } E_c(\Sigma / R_g) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_2 (L^2 \cdot \dot{\theta}^2 - 2 \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{z})$$

Q 27 : Appliquer le théorème de l'énergie puissance à l'ensemble Σ . L'équation obtenue sera notée équation 2

Théorème de l'énergie puissance : $\frac{d}{dt} E_c(\Sigma / R_g) = P_{ext} + P_{int}$; ce qui donne ici :

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{z} \cdot \dot{z} + m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} - m_2 \cdot L \cdot (\ddot{\theta} \cdot \dot{z} + \ddot{z} \cdot \dot{\theta}) = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta} - \dot{\theta} \cdot (\lambda_{\theta} \cdot \dot{\theta} + k_{\theta} \cdot \theta) - \dot{z} \cdot (\lambda_{eq} \cdot \dot{z} + k_{eq} \cdot (z - z_0)) \quad (2)$$

Q 28 : En combinant les équations 1 et 2, montrer que l'on obtient l'équation différentielle :

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{z}(t) + [\lambda_{eq} \cdot \dot{z}(t) + k_{eq} \cdot (z(t) - z_0)] = m_2 \cdot L \cdot \ddot{\theta}(t) - (m_1 + m_2) \cdot g$$

Rappel de l'équation (1) : $m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} + k_{\theta} \cdot \theta + \lambda_{\theta} \cdot \dot{\theta} = m_2 \cdot L \cdot \ddot{z} + m_2 \cdot L \cdot g$

En mettant dans l'équation (2) l'ensemble des termes facteurs de $\dot{\theta}$, on trouve :

$$\dot{\theta} \cdot [m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} + \lambda_{\theta} \cdot \dot{\theta} + k_{\theta} \cdot \theta - m_2 \cdot L \cdot \ddot{z} - m_2 \cdot g \cdot L] + (m_1 + m_2) \cdot \ddot{z} \cdot \dot{z} + \dot{z} \cdot (\lambda_{eq} \cdot \dot{z} + k_{eq} \cdot (z - z_0)) = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot L \cdot \ddot{\theta} \cdot \dot{z}$$

Or d'après l'équation (1), l'ensemble de ce qui est facteur de $\dot{\theta}$ est nul, on trouve alors l'équation (3) :

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{z} \cdot \dot{z} + \dot{z} \cdot (\lambda_{eq} \cdot \dot{z} + k_{eq} \cdot (z - z_0)) = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot L \cdot \ddot{\theta} \cdot \dot{z}$$

$$\text{Et en simplifiant par } \dot{z} : (m_1 + m_2) \cdot \ddot{z} + (\lambda_{eq} \cdot \dot{z} + k_{eq} \cdot (z - z_0)) = m_2 \cdot L \cdot \ddot{\theta} - (m_1 + m_2) \cdot g \quad (3)$$

Q 29 : Déterminer avec l'équation 1, la valeur de $\theta = \theta_0$ quand le système est à l'équilibre en fonction de m_2 , L et k_{θ} . En déduire que l'on obtient l'équation 1 sous la forme :

$$m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta}(t) + \lambda_{\theta} \cdot \dot{\theta}(t) + k_{\theta} (\theta(t) - \theta_0) = m_2 \cdot L \cdot \ddot{z}(t).$$

A l'équilibre statique, $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \dot{z} = \ddot{z} = 0$. Ce qui donne dans l'équation (1) : $0 = -k_\theta \cdot \theta + m_2 \cdot L \cdot g$.

Soit finalement : $\theta_0 = \frac{m_2 \cdot L \cdot g}{k_\theta}$.

Le résultat demandé est immédiat, en remplaçant dans (1) : $m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} + \lambda_\theta \cdot \dot{\theta} + k_\theta \cdot (\theta - \theta_0) = m_2 \cdot L \cdot \ddot{z}$ (1')

Exercice 3 : Robot poseur de fibre optique

Q 30 : Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$.

Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte.

$$2 E_c(\Sigma/R_0) = \left\{ \mathcal{C}_{(\Sigma/R_0)} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(\Sigma/R_0)} \right\} \\ = \left\{ \frac{\vec{\Omega}(1/0)}{\vec{V}(G_1, 1/0)} \right\}_{G_1} \otimes_{G_1} \left\{ \frac{m_1 \vec{V}(G_1, 1/0)}{\vec{\sigma}(G_1, 1/0)} \right\} = m_1 \left(\vec{V}(G_1, 1/0) \right)^2 + \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{\Omega}(1/0).$$

- Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 :

$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\delta} \vec{z}_0.$$

- Vitesse du point G_1 appartenant à 1 par rapport à 0 :

$$\vec{V}(G_1, 1/0) = \vec{V}(I, 1/0) + \vec{G_1 I_1} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = - \left(R \vec{y}_0 + \frac{L_1}{2} \vec{x}_1 \right) \wedge \dot{\delta} \vec{z}_0 = -R \dot{\delta} \vec{x}_0 + \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \vec{y}_1.$$

- Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant $\vec{x}_1$. Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en G_1 suivant $\vec{z}_0$ est

$$C_1 = \frac{m_1 L_1^2}{12}$$

- Moment cinétique en G_1 de 1 par rapport à 0 :

$$\vec{\sigma}(G_1, 1/0) = \vec{I}_{G_1}(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0) = \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta} \vec{z}_0$$

- On en déduit $E_c(1/0)$:

$$E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right)$$

Q 31 : Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ .

$$\mathcal{P}(ext \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(pesanteur \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(contactenE \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(contactenI \rightarrow \Sigma/0)$$

- Actions de la pesanteur :

$$\mathcal{P}(pes \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(pes \rightarrow 1/0) = \left\{ \mathcal{T}_{(pes \rightarrow 1)} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(1/0)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1} \otimes_{G_1} \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G_1, 1/0) \end{matrix} \right\} \\ = -m_1 g \vec{y}_0 \cdot \vec{V}(G_1, 1/0) = -m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta.$$

- Actions du contact en I entre 0 et 4 (le contact se fait par roulement sans glissement) :

$$\mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0) = \left\{ \mathcal{T}_{(0 \rightarrow 4)} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(4/0)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{04} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I \otimes_I \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(4/0) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = 0.$$

- Actions du contact en E entre 0 et 2 (le contact se fait sans frottement) :

$$\mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 2)}\} \otimes \{\mathcal{V}_{(4/0)}\} = \left\{ \begin{matrix} R_{02} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_E \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(2/0) \\ \vec{V}(E, 2/0) \end{matrix} \right\}_E = R_{02} \vec{y}_0 \cdot \vec{V}(E, 2/0) = 0.$$

Q 32 : Donner la puissance intérieure à Σ .

- Les liaisons sont supposées comme parfaites donc :

$$\mathcal{P}_{liaisons}(int \rightarrow \Sigma) = 0.$$

- Action du vérin entre 1 et 3 :

$$\mathcal{P}_{verin}(int \rightarrow \Sigma) = \{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 3)}\} \otimes \{\mathcal{V}_{(3/1)}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_N \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{V}(N, 3/1) \end{matrix} \right\}_N = F \vec{V}(N, 3/1) \cdot \vec{x}_1.$$

En appliquant la relation d'équiprojectivité au solide 1, on obtient :

$$\vec{V}(N, 3/1) \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{V}(M, 3/1) \cdot \overrightarrow{MN}.$$

En considérant que $\overrightarrow{MN}$ est porté par $\vec{x}_1$ (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{V}(N, 3/1) \cdot \vec{x}_1 &= \vec{V}(M, 3/1) \cdot \vec{x}_1 = \left(\vec{V}(M, 3/2) + \vec{V}(M, 2/1) \right) \cdot \vec{x}_1 \\ &= b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \cdot \vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1 = -b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}(int \rightarrow \Sigma) = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta)$$

Q 33 : Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F , δ , et β .

On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à Σ par rapport au référentiel galiléen R_0 :

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \mathcal{P}(ext \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(int \rightarrow \Sigma).$$

Or,

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) \right] = m_1 \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right]$$

Ainsi on obtient, l'équation :

$$m_1 \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right] = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta.$$

Q 34 : Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.

- $F = 700N$: Le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à 14° . Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement). Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.
- $F = 750N$: Le système atteint les 14° . La pente à l'accostage vaut environ $37.5^\circ/s$ ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de $700N$ étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de $750N$ devienne insuffisant en réalité. Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.
- $F = 800N$: Le système atteint les 14° . La pente à l'accostage vaut environ $45^\circ/s$ ce qui est inférieur à la limite de $50^\circ/s$ imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les 14° ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle. Cette valeur est satisfaisante.

- $F = 950\text{ N}$: Le système atteint les 14° . La pente à l'accostage vaut environ $75^\circ/\text{s}$ ce qui est supérieur à la limite de $50^\circ/\text{s}$ imposée par le cahier des charges. Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.

