

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
 SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
 CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.
 ANNÉE 2023 - 2024



C6 : CONCEPTION DE LA PARTIE COMMANDE DES SYSTÈMES
 POUR EN AMÉLIORER LES PERFORMANCES

TD 15 - Stabilité, précision et rapidité des systèmes asservis (C6-1)

Compétences

- **Analyser**
 - Traduire un besoin fonctionnel en exigences.
 - Définir les domaines d'application et les critères technico-économiques et environnementaux.
 - Qualifier et quantifier les exigences.
 - Caractériser les écarts entre les performances.
 - Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement.
- **Modéliser**
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
 - Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
 - Déterminer la réponse fréquentielle.
 - Déterminer les performances d'un système asservi.
- **Concevoir**
 - Modifier la commande pour faire évoluer le comportement du système.

Exercice 1 : Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie

Source : CCINP MP 2015

1 Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni figure 1, est guidée en translation suivant \vec{y} par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant \vec{x} par rapport au bâti.

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe \vec{z}) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crémaillère.

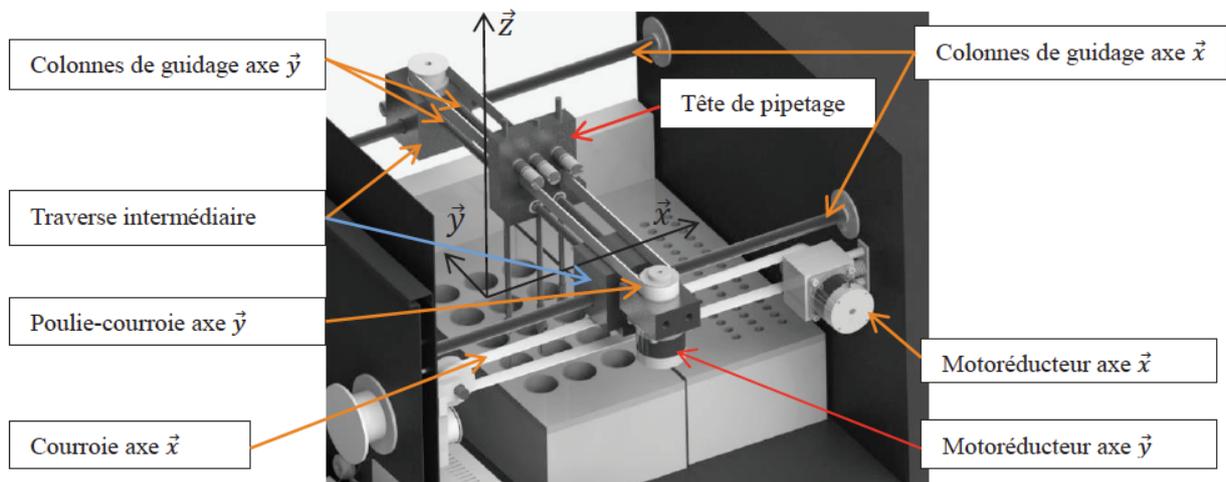
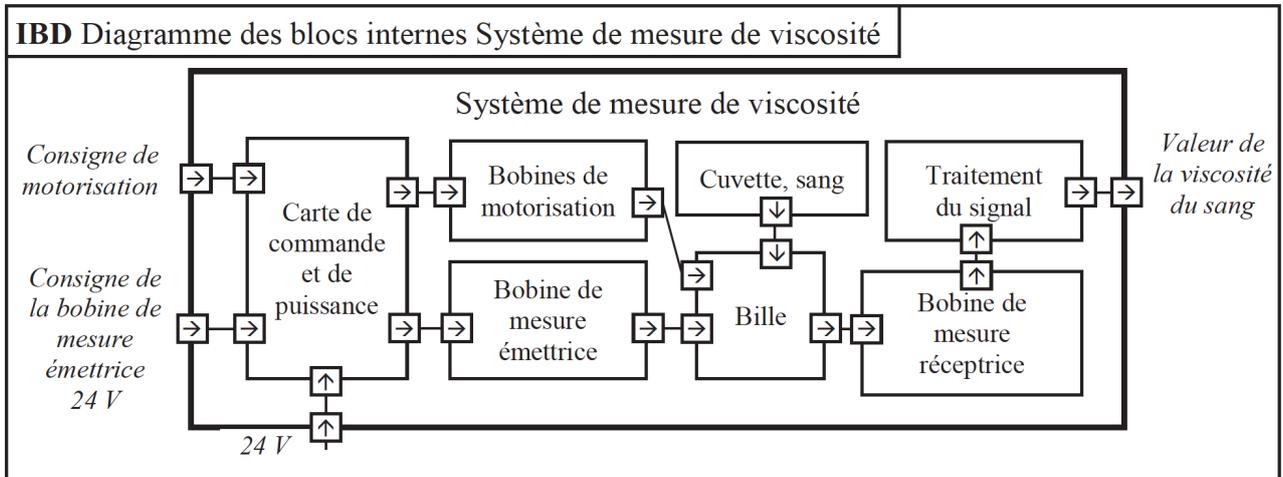
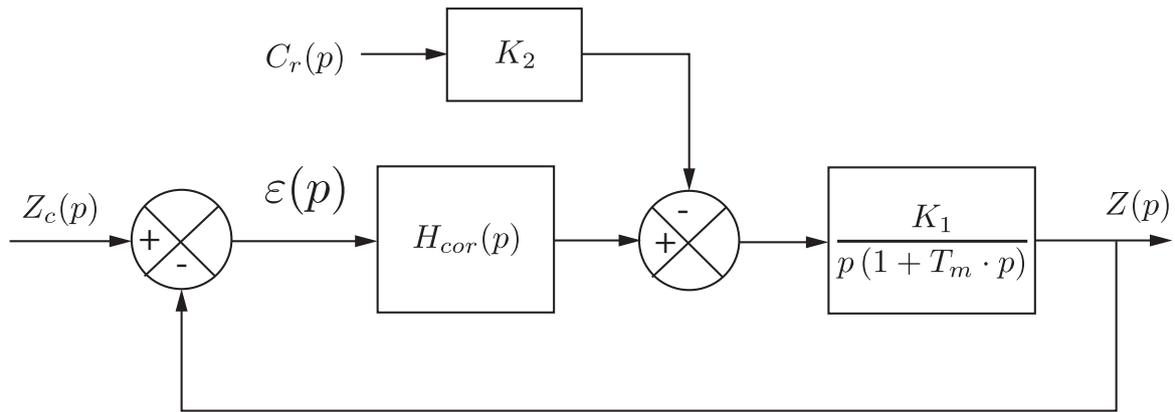


FIGURE 1 – Diagramme de bloc interne et présentation de l'architecture du système de mesure et du système de guidage

2 Réglage de l'asservissement

La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous :



avec $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} N^{-1}$, $K_1 = 856 s^{-1}$, $T_m = 3 \cdot 10^{-2} s$.
 Le couple résistant C_r est constant et vaut $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} N \cdot m$.
 On suppose le correcteur proportionnel : $H_{cor}(p) = K_p$.
 Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel (figure 2).

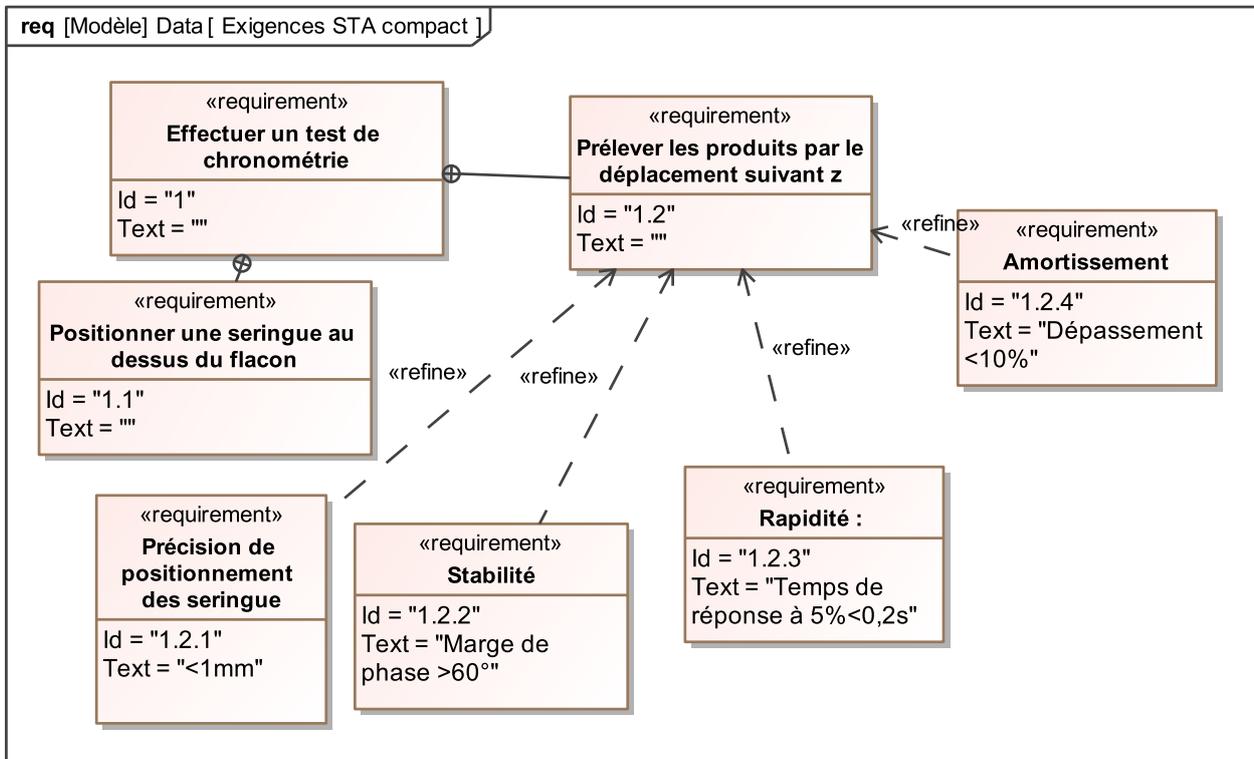


FIGURE 2 – Diagramme des exigences

Q 1 : Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \left(\frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$ ainsi que la fonction de transfert $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$.

Q 2 : Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle (C_{r0}). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0} , dans le cas d'une consigne de position nulle ($Z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

Q 3 : Sur le document réponse de la figure (3) compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ pour K_p déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

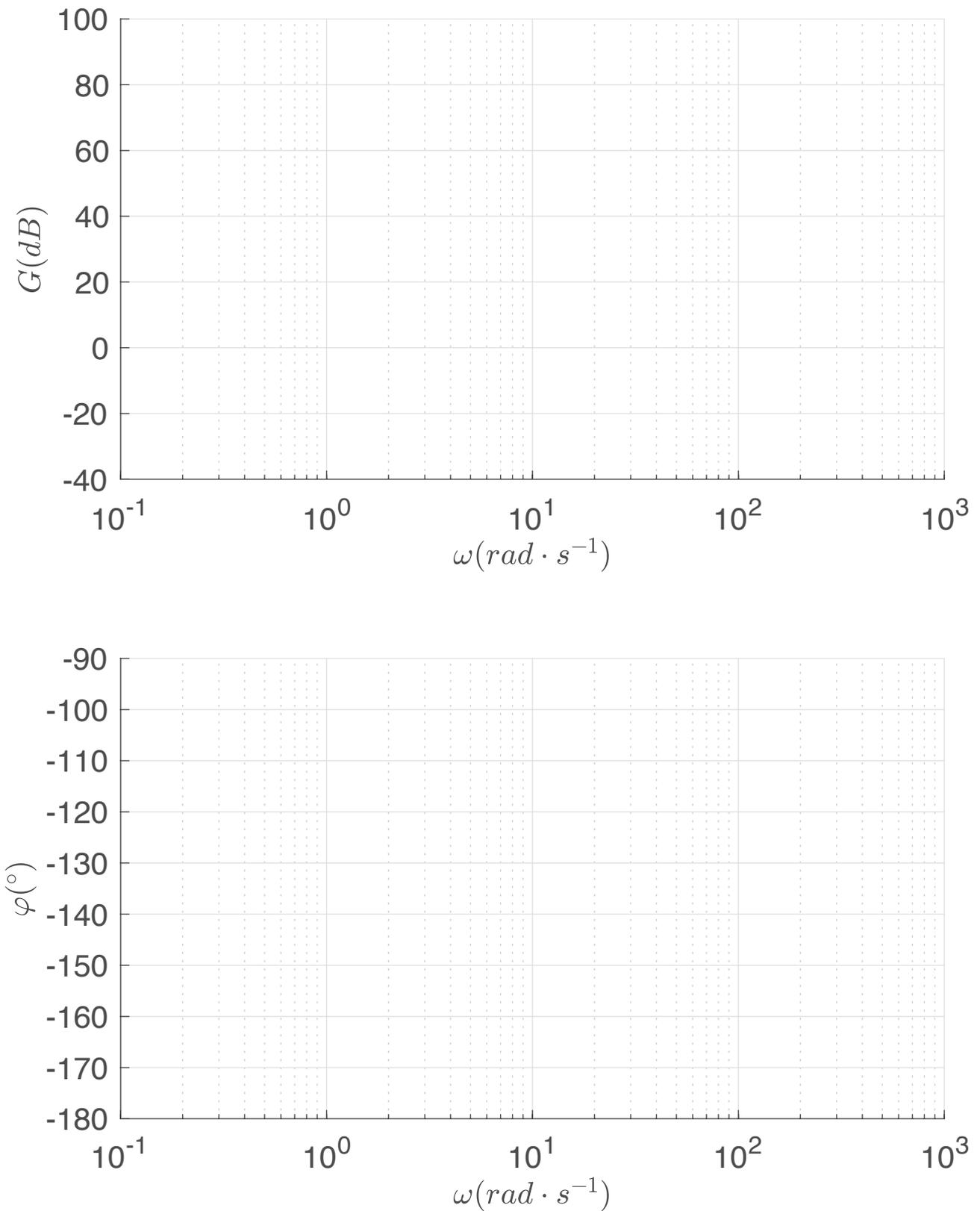
Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert : $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$ avec $K_p = 1$ et $T_i = 1s$.

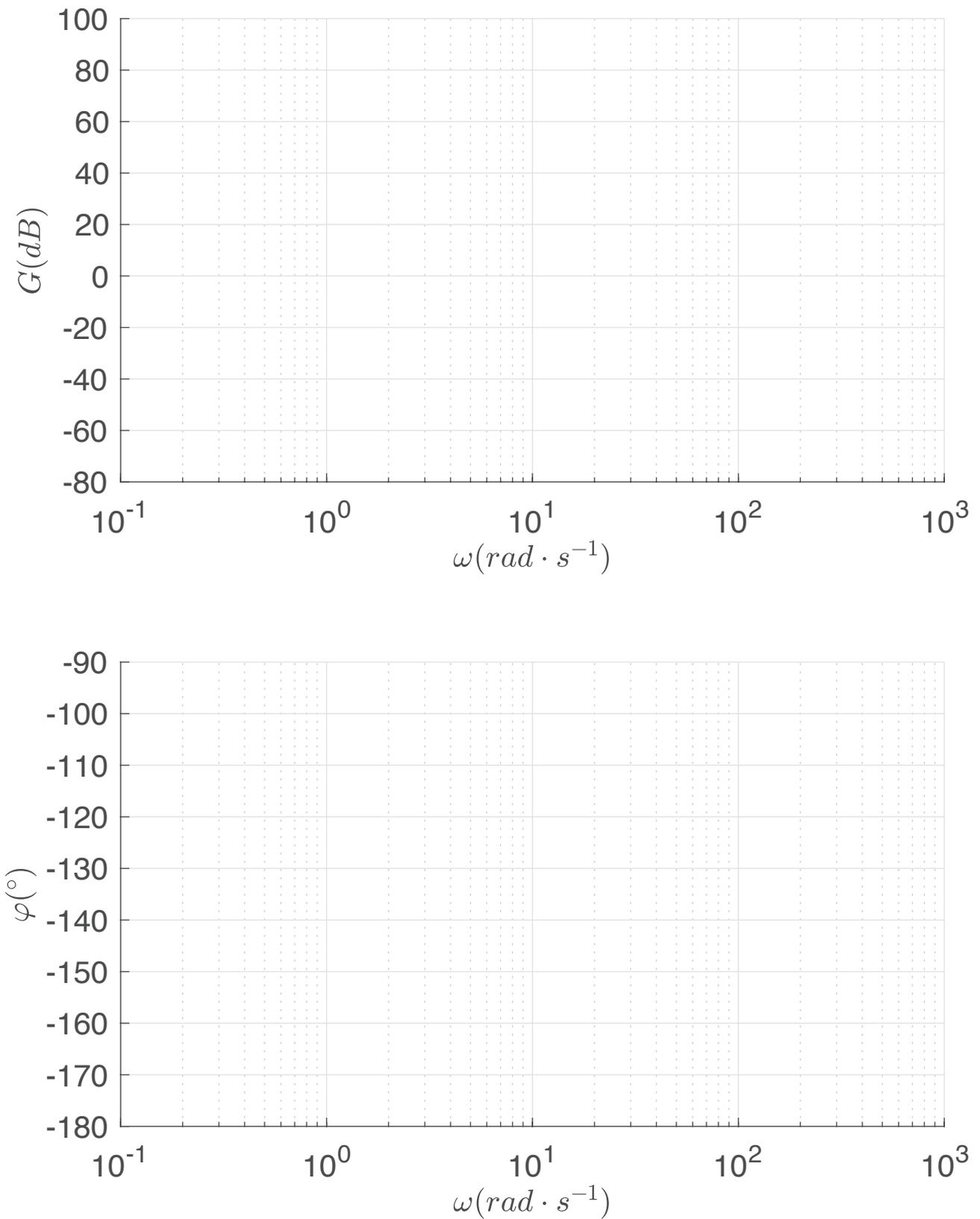
Q 4 : Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec $K_p = 1$ et $T_i = 1\text{ s}$ sur la figure 4.

Q 5 : On souhaite une marge de phase d'au moins 60° . Proposer un réglage de K_p pour satisfaire au cahier des charges. Justifier vos calculs par les tracés nécessaires sur la figure 4.

Q 6 : La figure 5 donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

Q 7 : Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé (figure 6.)

FIGURE 3 – Diagramme de Bode de $H_{bo}(p)$ pour $K_p = 1$

FIGURE 4 – Diagramme de Bode de $H_{bo}(p)$ avec un correcteur PI pour $K_p = 1$ et $T_i = 1s$

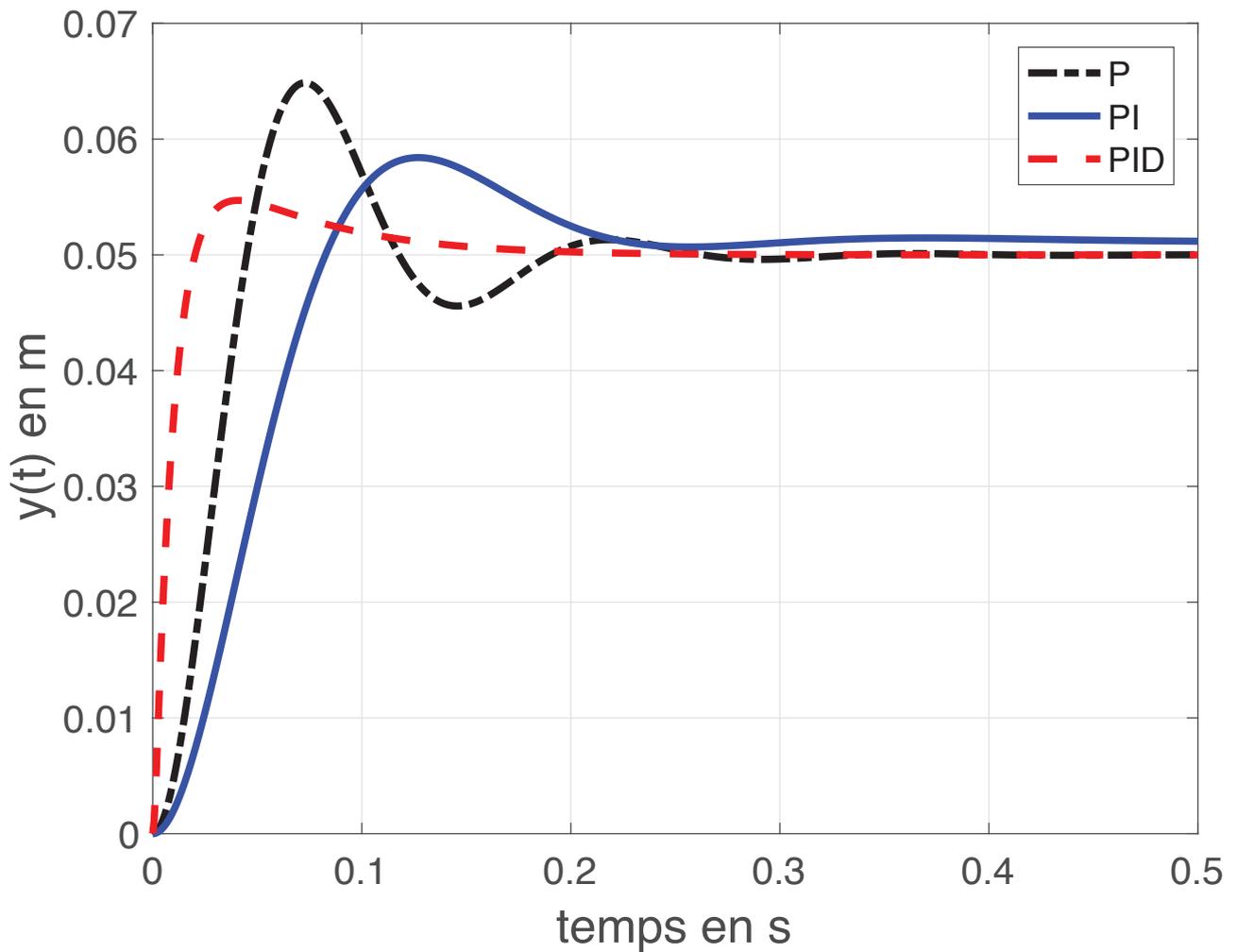


FIGURE 5 – Réponse à un échelon de position de 50mm avec trois correcteurs P(question 2) PI (question 5) et PID (déterminé numériquement)

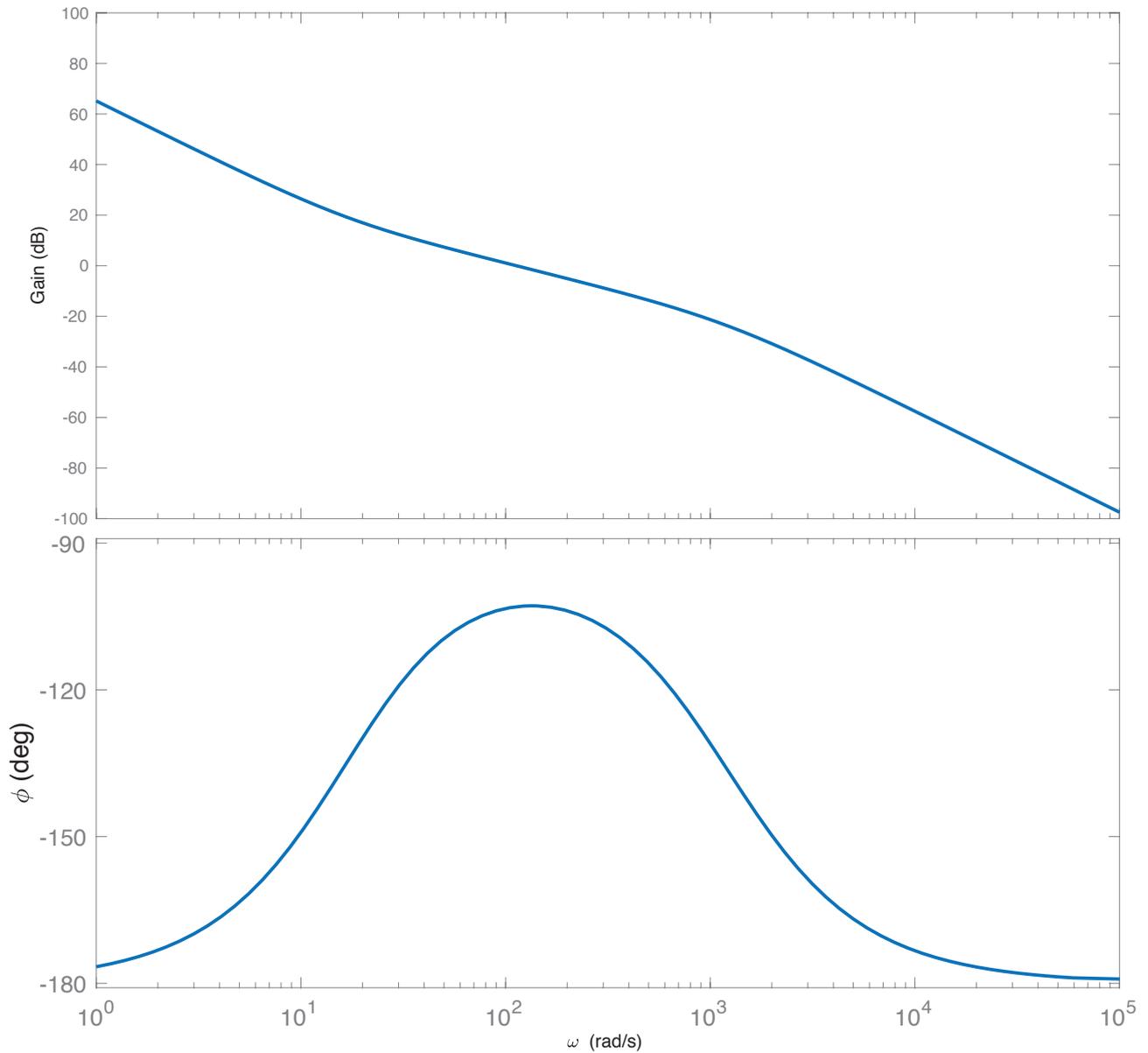


FIGURE 6 – Diagramme de Bode de $H_{bo}(p)$ avec un correcteur PID pour $K_p = 0,19$, $K_i = 2,1$ et $K_d = 0,0038$

Exercice 2 : Application du critère de Routh

On donne ci-dessous les FTBO des 2 systèmes asservis en retour unitaire.

1. $G_1(p) = \frac{K}{p(p+3)(p+4)}$
2. $G_2(p) = \frac{K}{p^3+5p^2+8p+5}$

Déterminer à l'aide du critère de Routh si les systèmes sont stables en boucle fermée et donner les valeurs de K admissible.

Exercice 3 : Stabilité graphique et marge de gain

Q 8 : Dans chacun des cas suivant, proposer et justifier un tracer asymptotique

Q 9 : Conclure sur la stabilité des systèmes en boucle fermée. Dans le cas stable, déterminer les marges de gain et de phase.

1. $FTBO(p) = \frac{4}{(1+p)(1+2p)(1+5p)}$ (figure 12).
2. $FTBO(p) = \frac{20}{(1+p)(1+2p)(1+5p)}$ (figure 13).
3. $FTBO(p) = \frac{4}{(1+0,1p+p^2)(1+2p)}$ (figure 15).
4. $FTBO(p) = \frac{2}{(1+0,1p)(1+0,3p)(1+0,5p)}$ (figure 10).

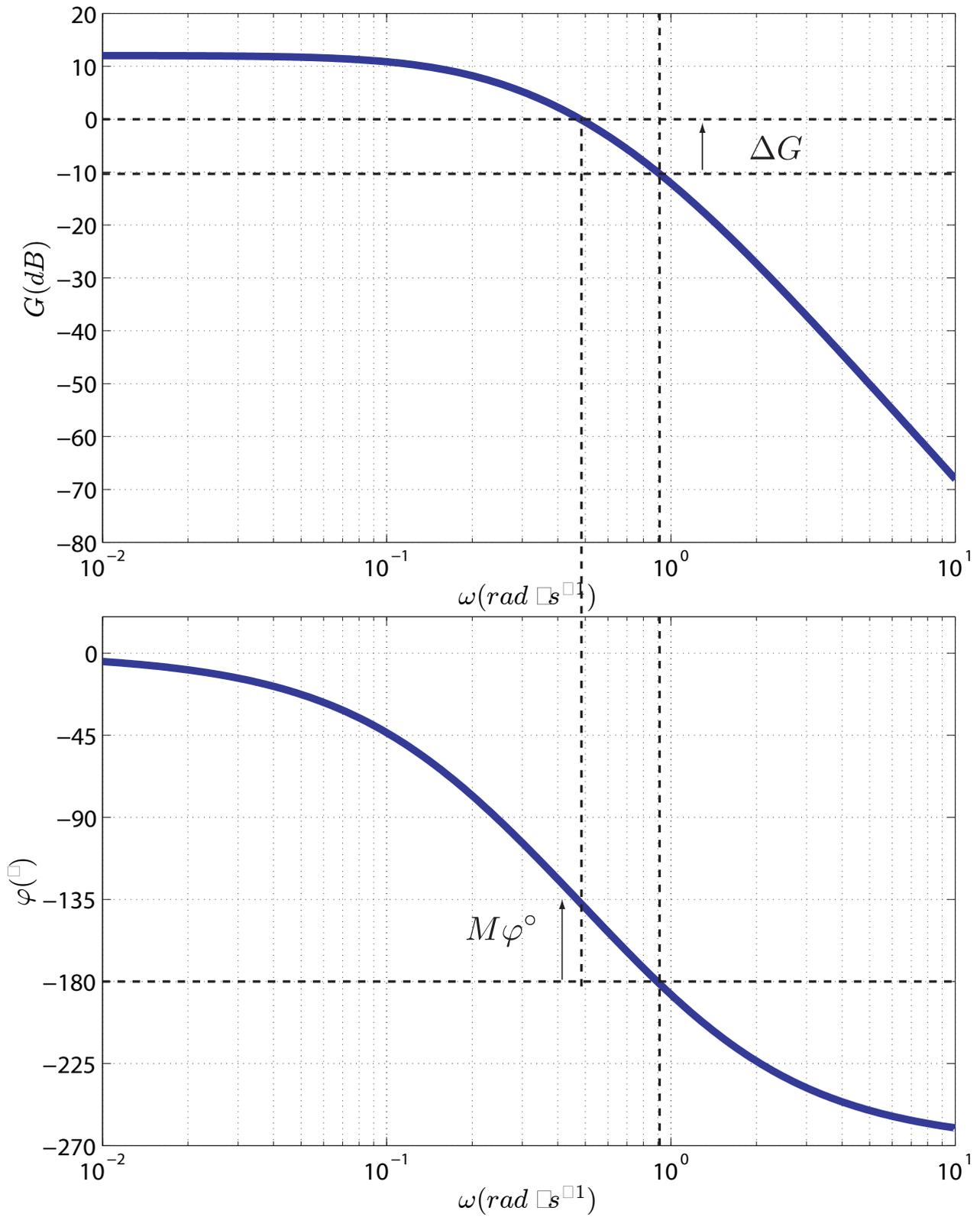


FIGURE 7 – Exemple 1

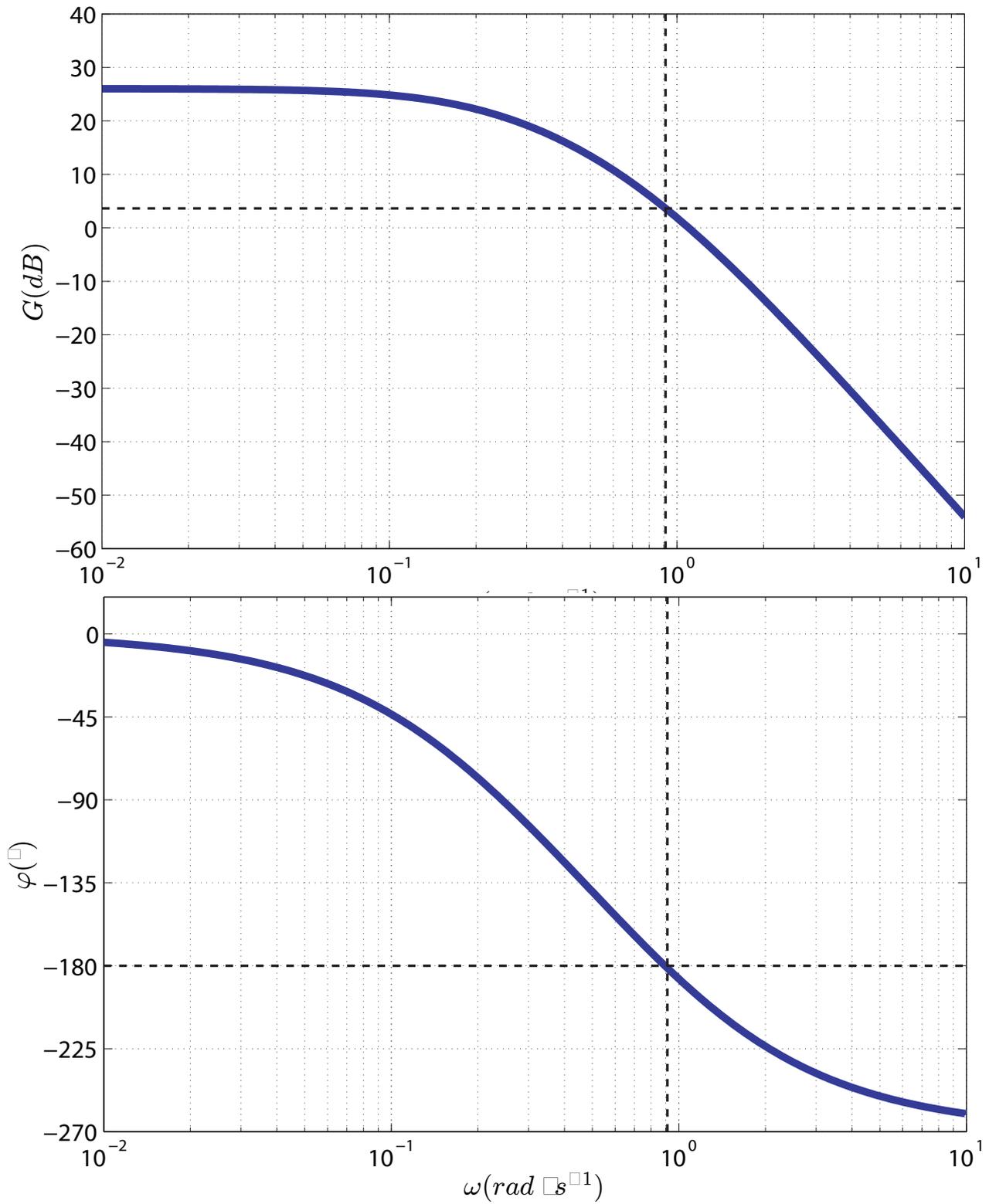


FIGURE 8 – Exemple 2

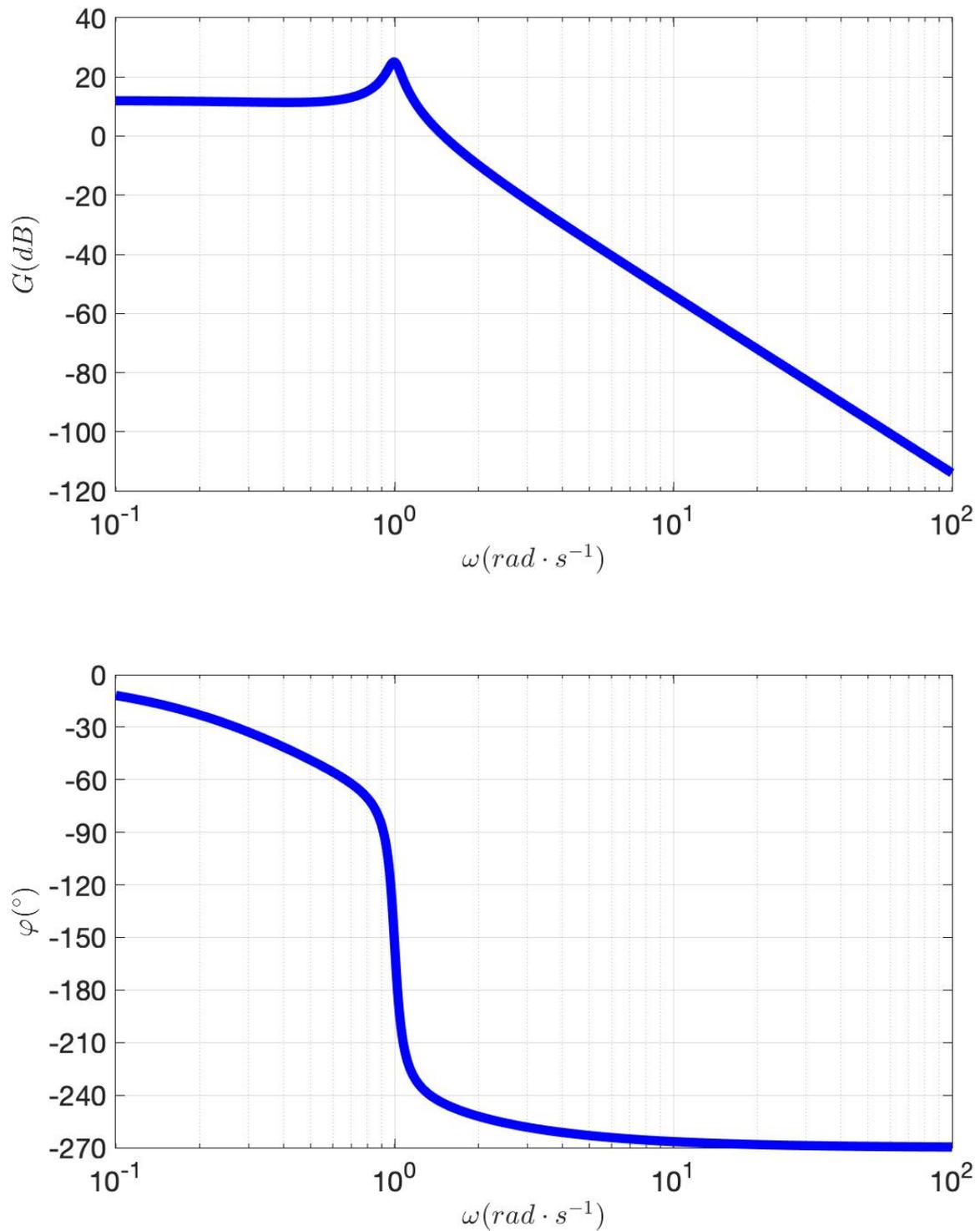


FIGURE 9 – Exemple 3

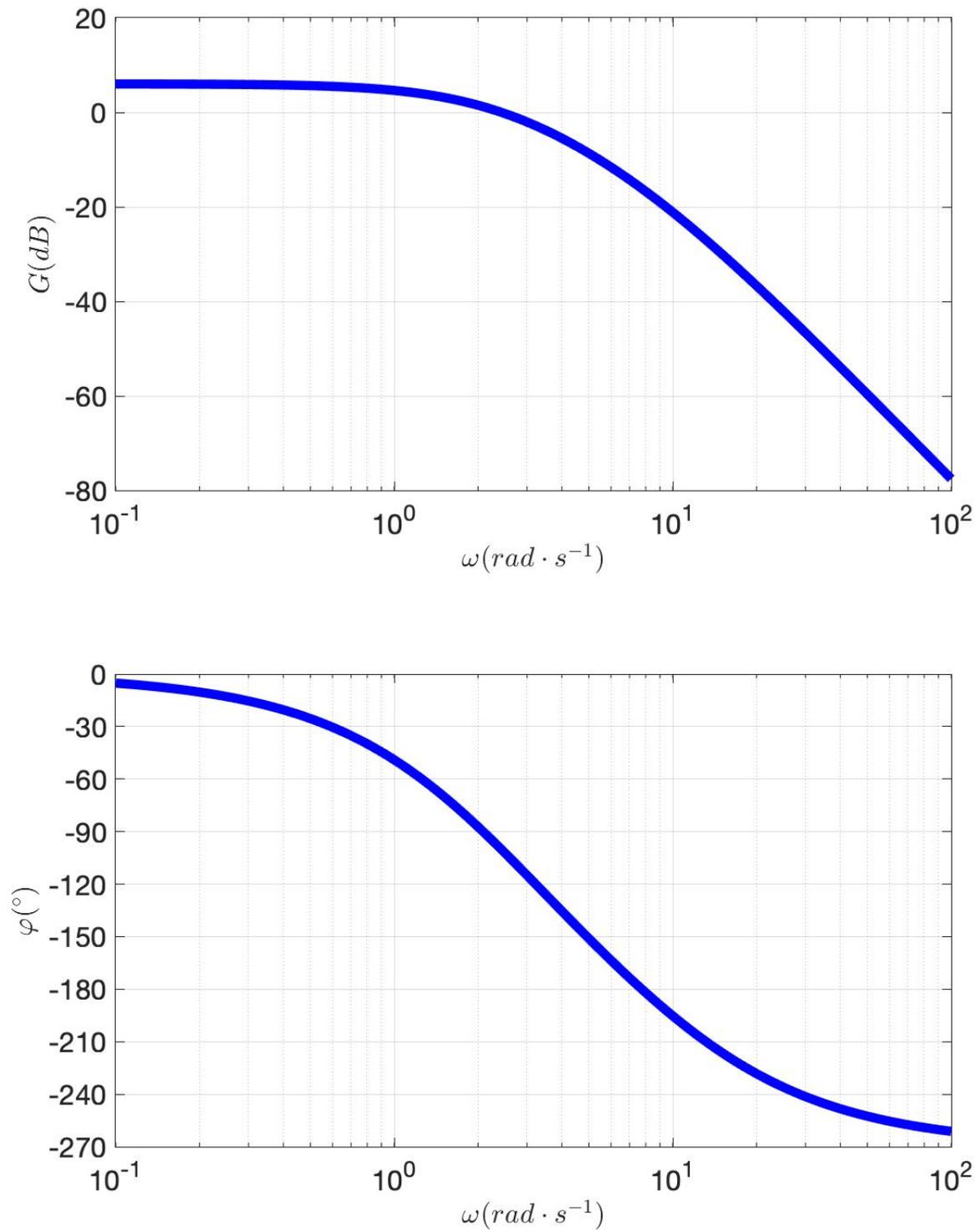
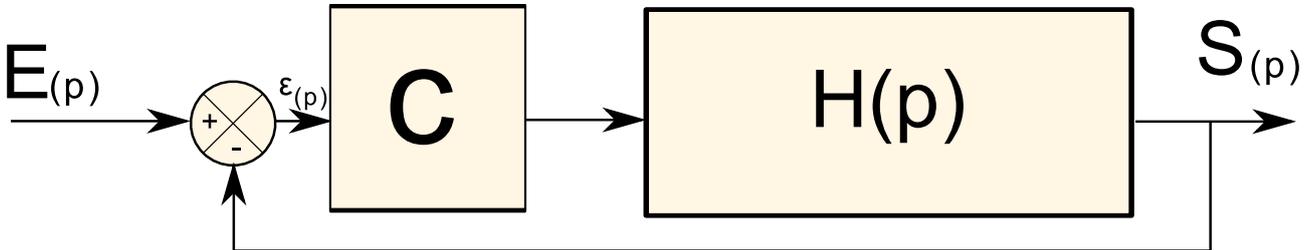


FIGURE 10 – Exemple 4

Exercice 4 : Notions de correcteur proportionnel

On considère le système asservi représenté par son schéma-bloc suivant :



Avec C une constante et $H(p) = \frac{50}{50+15p+p^2}$.

1. Déterminer la FTBO, notée $G(p)$ et la FTBF notée $F(p)$.
2. Pour $C = \{5; 10; 20\}$, tracer les diagrammes de Bode asymptotique de la FTBO(p).
3. Calculer la pulsation ω_1 pour laquelle $20 \log|G(j\omega)| = 0$.
4. Calculer la pulsation ω_2 pour laquelle l'argument de $\varphi(j\omega) = -135^\circ$.
5. Calculer la valeur de C pour avoir une marge de phase de 45° . Quel est alors l'écart de position (ou écart statique)?

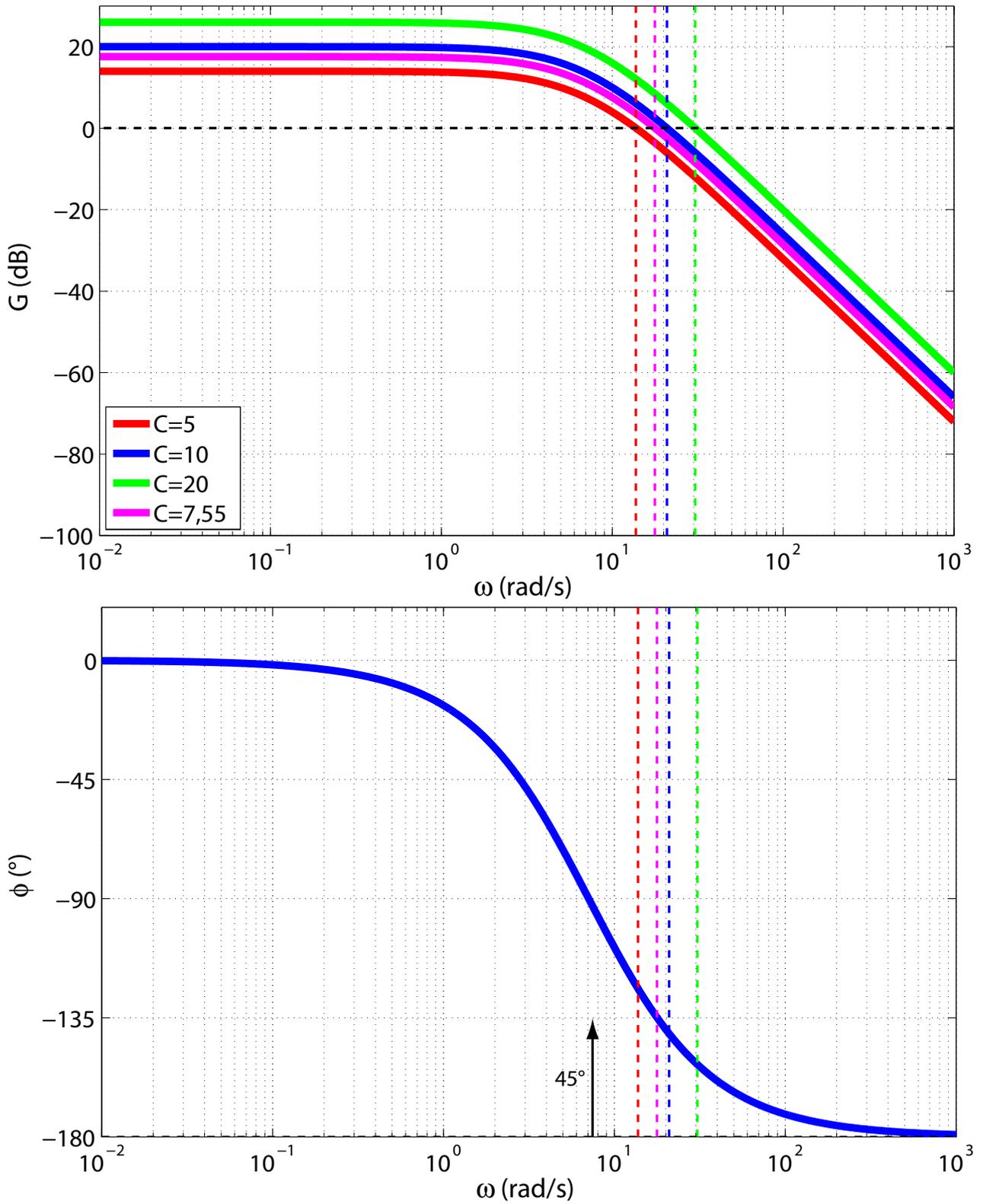


FIGURE 11 – Exemple 2

Corrigé

fonction de transfert $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$.

$$H_{bo}(p) = \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} = H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)} = \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)}$$

$$Z(p) = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p \varepsilon(p) - K_2 C_r(p)] = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p (-Z(p)) - K_2 C_r(p)]$$

$$Z(p) \left(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)} \right) = - \frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)} C_r(p)$$

$$H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0} = \frac{-\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)}}{\left(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)} \right)} = - \frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p) + K_p K_1} = - \frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}}$$

Q 2 : Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle (C_{r0}). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0} , dans le cas d'une consigne de position nulle ($Z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

L'erreur statique par rapport à une entrée échelon, la perturbation étant nulle, est égale à 0, car il y a une intégration dans la chaîne directe

Dans le cas d'une perturbation constante égale à C_{r0} , d'après la question précédente on peut écrire :

$$Z(p) = - \frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} c_r(p) = - \frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} \frac{C_{r0}}{p}$$

En utilisant la propriété du gain statique, on en déduit $z_\infty = \frac{K_2 C_{r0}}{K_p}$, l'erreur vaut donc $\varepsilon = -z_\infty = \frac{K_2 C_{r0}}{K_p}$.

Pour répondre à l'exigence de précision, on doit avoir

$$\varepsilon = \frac{K_2 C_{r0}}{K_p} < 1 \text{ mm}$$

On en déduit

$$\varepsilon = \frac{K_2 C_{r0}}{K_p} < 10^{-3} \text{ m}$$

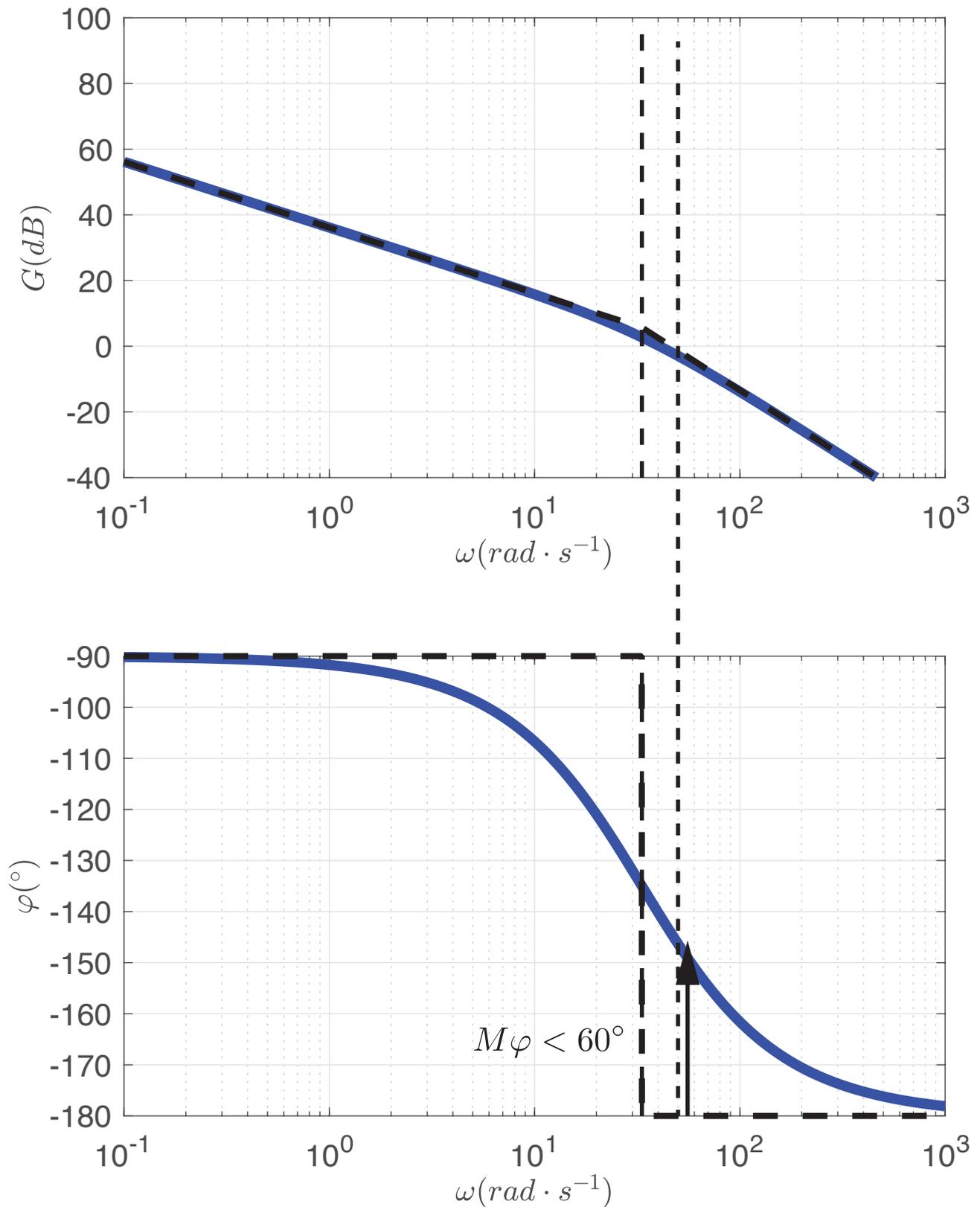
$$K_p > \frac{K_2 C_{r0}}{10^{-3}}$$

$$K_p > \frac{2,78 \cdot 10^{-2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}$$

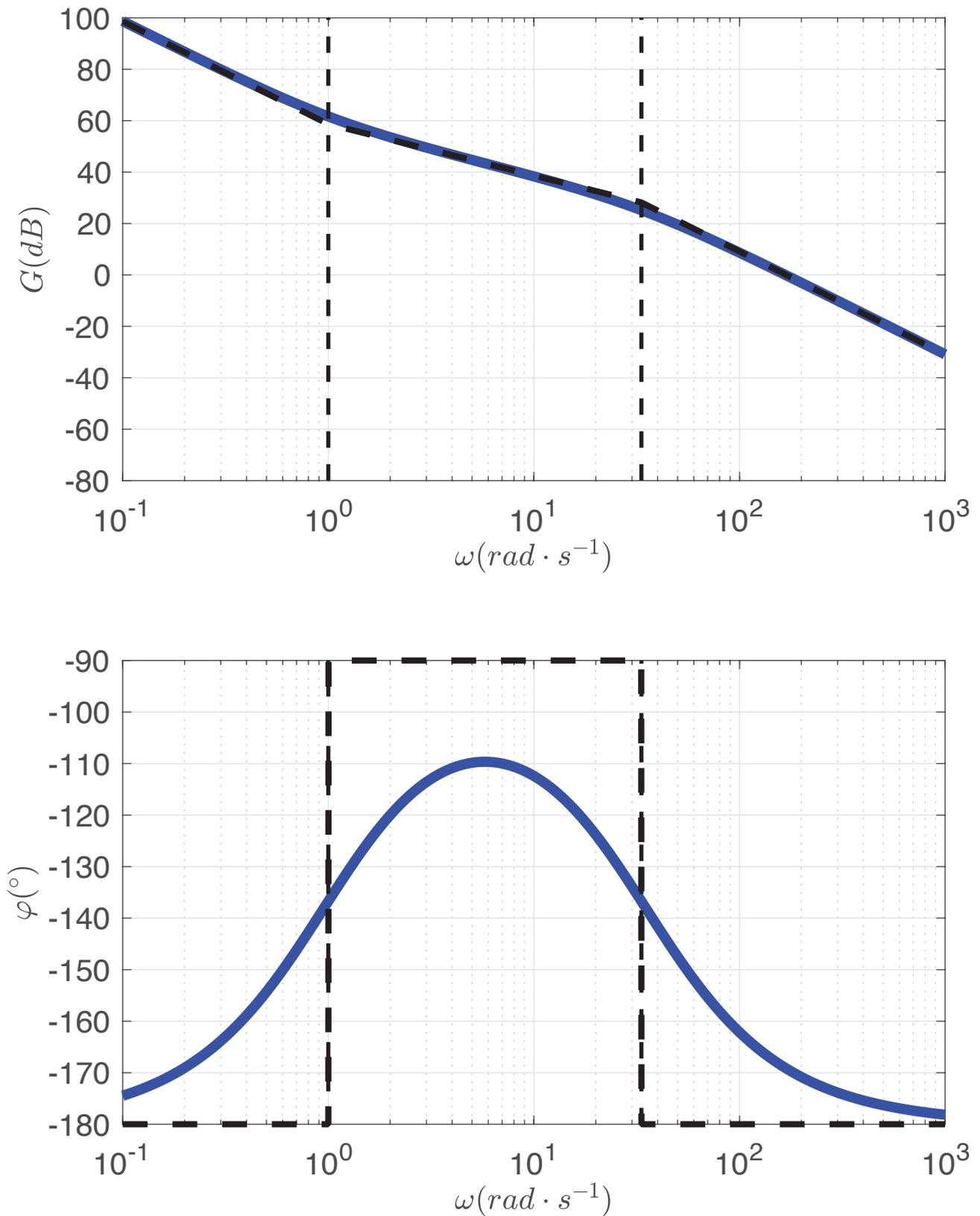
$$K_p > 0,075$$

Q 3 : Sur le document réponse de la figure (3) compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ pour K_p déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

Avec $K_p = 0,075$, on obtient une marge de phase de $35^\circ < 60^\circ$, le critère de stabilité n'est donc pas vérifié.



Q 4 : Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec $K_p = 1$ et $T_i = 1 \text{ s}$ sur la figure 4.

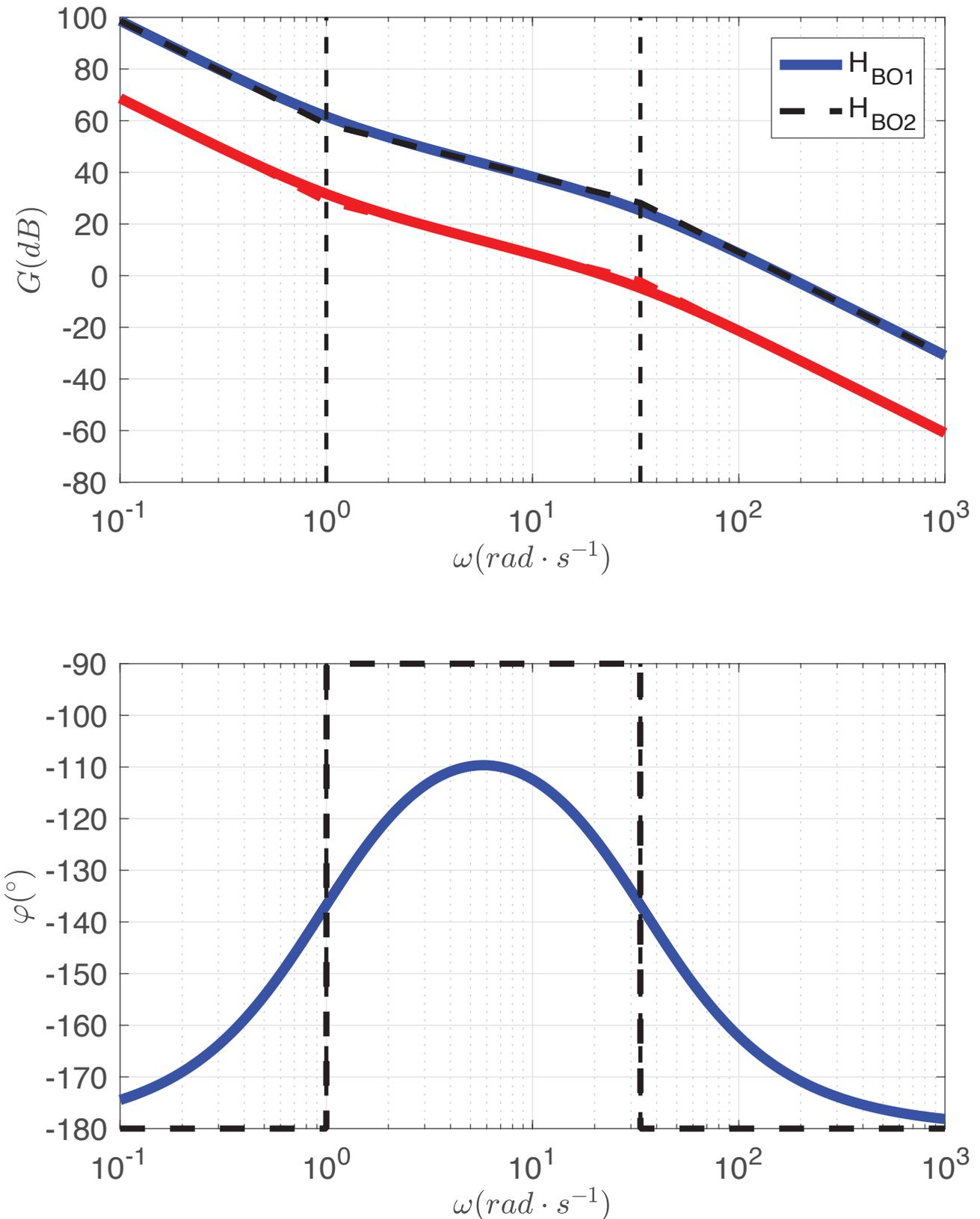


Q 5 : On souhaite une marge de phase d'au moins 60° . Proposer un réglage de K_p pour satisfaire au cahier des charges. Justifier vos calculs par les tracés nécessaires sur la figure 4.

On note qu'en la pulsation donnant une phase à -120° , le gain en décibel est à peu près égal à $-30dB$. On règle donc K_p tel que :

$$K_p = 10^{-30/20} = 0,032.$$

On obtient alors le deuxième tracé.



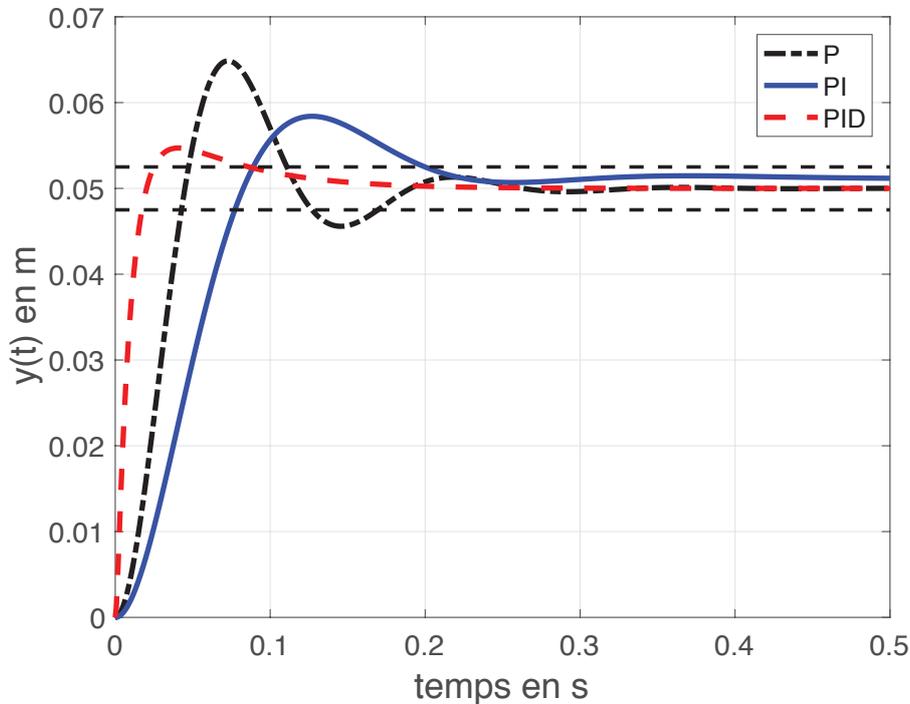
Q 6 : La figure 5 donne la réponse à un échelon de position de 50mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

- La valeur en régime permanent vaut 50mm pour les trois réponses, l'erreur statique est nulle le critère de précision est respecté pour les trois réglages.

- Temps de réponse à 5% et dépassement :

Type de correcteur	P	PI	PID
$tr_{5\%}$	0,17s	0,2s	0,08
Dépassement	29,72%	16,8%	9,4%

- Seul le PID vérifie le critère sur le premier dépassement car $D_{1\%} = 9,4\% < 10\%$. Le critère d'amortissement est donc respecté.



Q 7 : Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé (figure 6.)

On trouve une marge de phase supérieure à 60° et une bande passante à $0dB$ égale à $100rad/s$ supérieure aux réglages précédents ce qui donne une réponse plus rapide et plus stable.

Exercice 2 : Application du critère de Routh

1.

$$FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{12}{K} p + \frac{7}{K} p^2 + \frac{p^3}{K}}$$

p^3	$\frac{1}{K}$	$\frac{12}{K}$
p^2	$\frac{7}{K}$	1
p^1	$\frac{84-K}{7}$	0
p^0	1	0

Donc

$$K < 84.$$

2.

$$FTBF2(p) = \frac{K}{5 + K + 8p + 5p^2 + p^3}$$

p^3	1	8
p^2	5	$K + 5$
p^1	$\frac{35-K}{5}$	0
p^0	$K + 5$	0

$$-5 < K < 35.$$

Exercice 3 : Stabilité graphique et marge de gain

Q 8 : Dans chacun des cas suivant, proposer et justifier un tracer asymptotique

Q 9 : Conclure sur la stabilité des systèmes en boucle fermée. Dans le cas stable, déterminer les marges de gain et de phase.

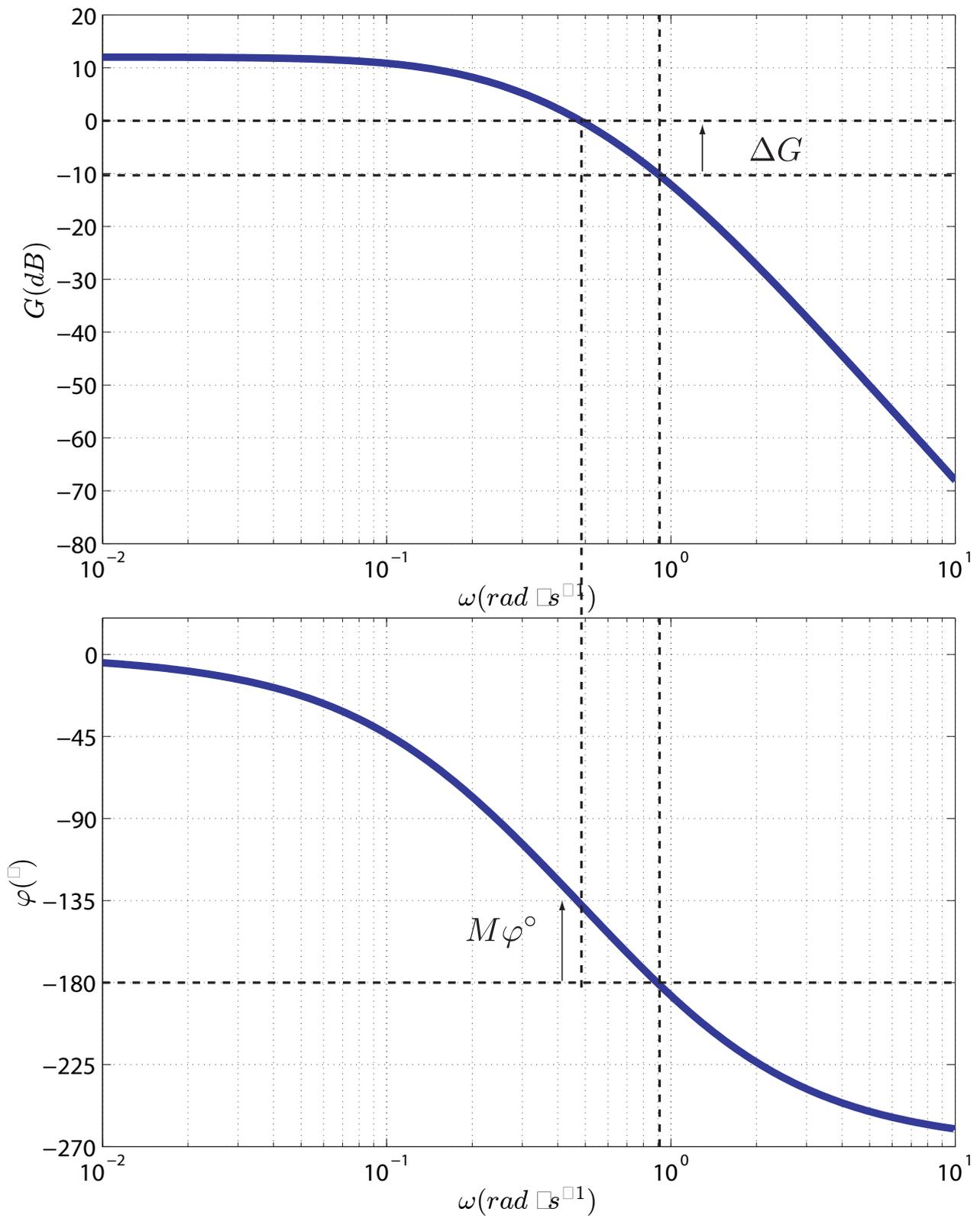


FIGURE 12 – Exemple 1

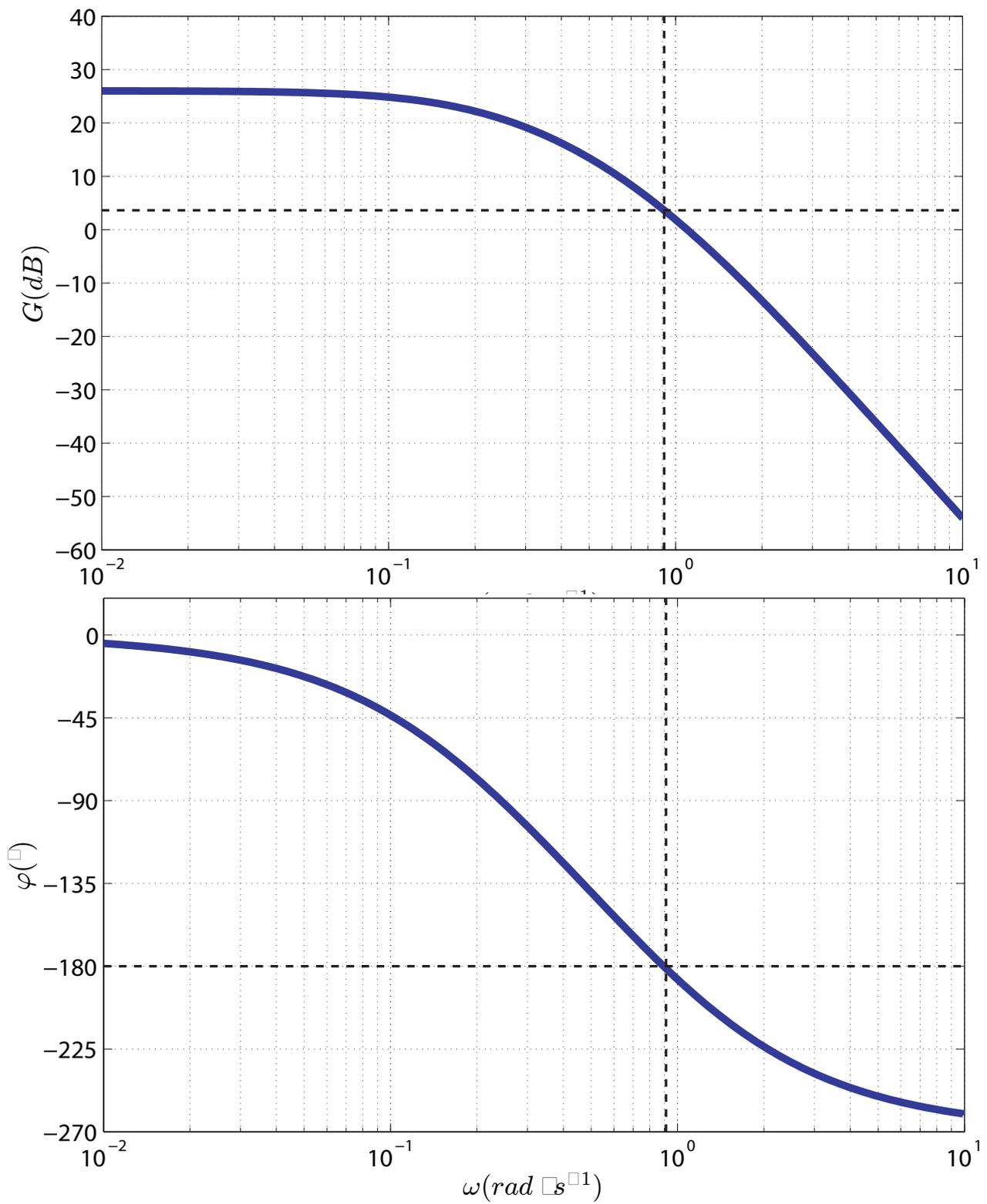


FIGURE 13 – Exemple 2

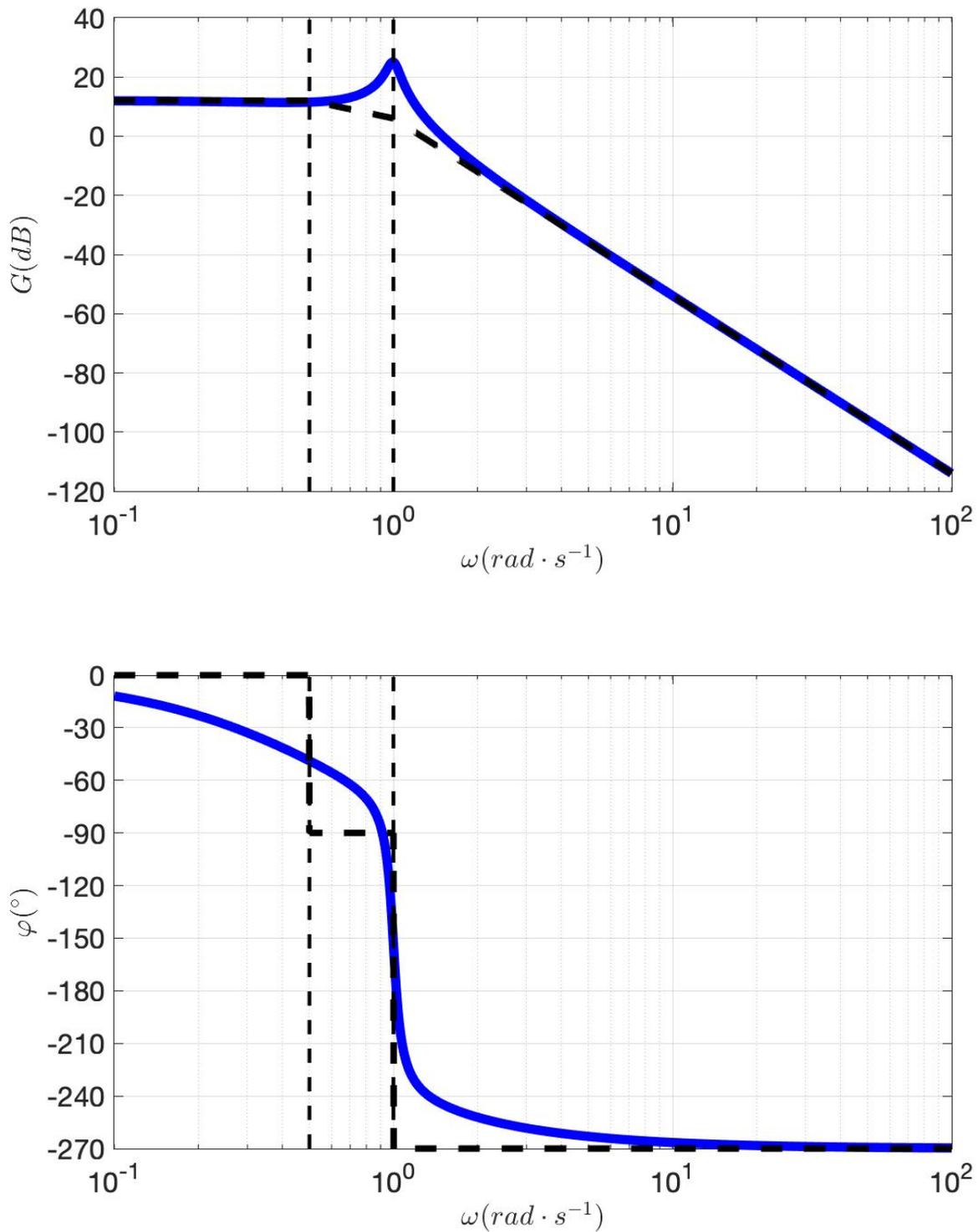


FIGURE 14 – Exemple 3

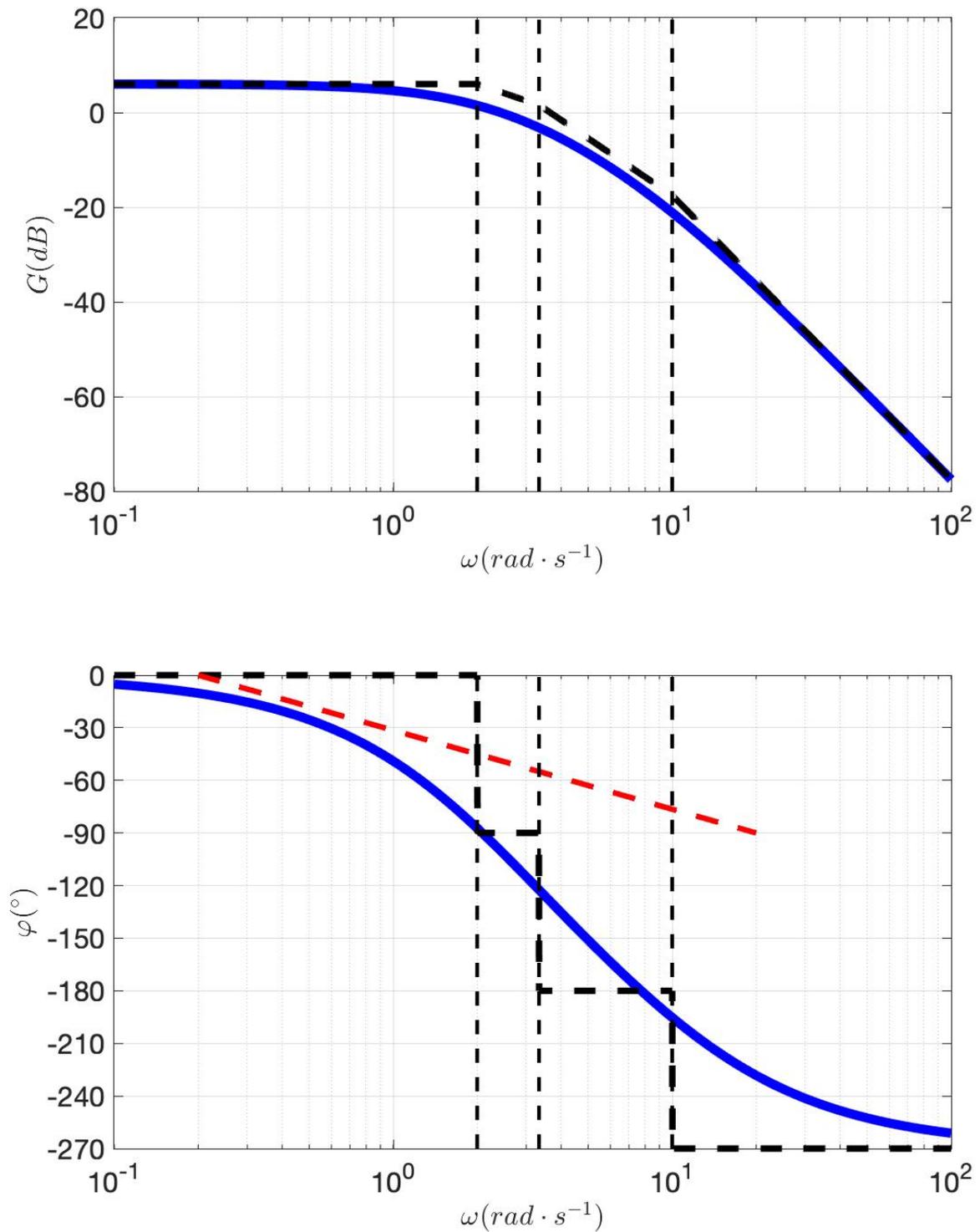


FIGURE 15 – Exemple 3

Exercice 4 : Notions de correcteur proportionnel

1. Déterminer la FTBO, notée $G(p)$ et la FTBF notée $F(p)$.

$$FTBO(p) = \frac{50 C}{50 + 15 p + p^2} = \frac{C}{1 + \frac{15}{50} p + \frac{p^2}{50}}.$$

Ainsi, on peut identifier les coefficients de la forme canonique :

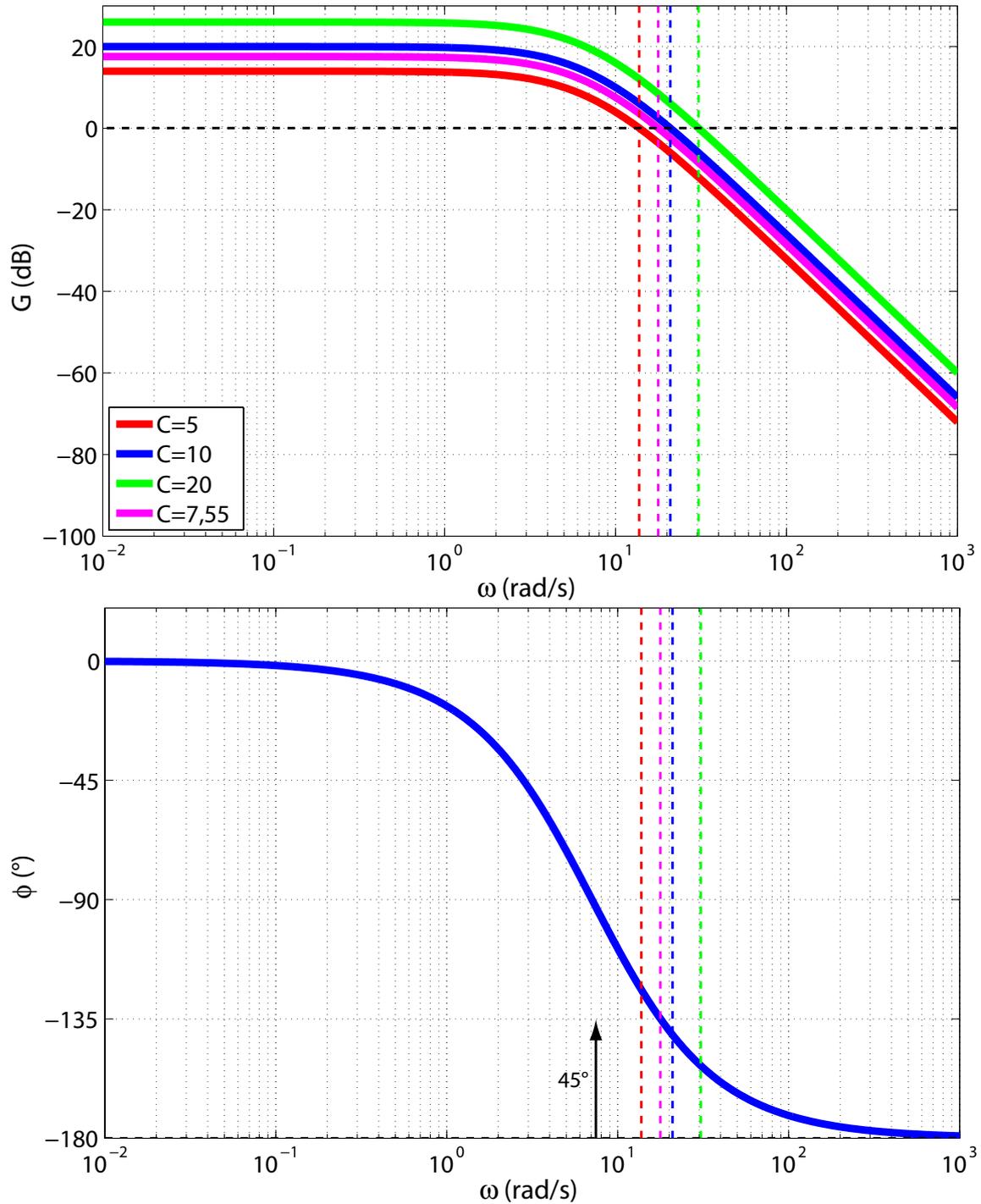
$$\left\{ \begin{array}{l} K = C \\ \omega_0 = \sqrt{50} = 7,07 \text{ rad/s} \\ \xi = \frac{15}{2\sqrt{50}} = 1,06 \end{array} \right.$$

Ici le système est à retour unitaire, donc :

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{50 C}{50 + 50 C + 15 p + p^2}.$$

2. Pour $C = \{5; 10; 20\}$, tracer les diagrammes de Bode asymptotique de la $FTBO(p)$.

C	ω_0 (rad/s)	$20 \log(K)$ (dB)
5	7,07	14
10	7,07	20
20	7,07	26



3. Calculer la pulsation ω_1 pour laquelle $20 \log|G(j\omega)| = 0$.
Cela revient à résoudre l'équation :

$$G_{dB}(\omega_1) = 20 \log(C) - 20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2 \omega_1^2}{\omega_0^2}}\right) = 0.$$

Ce qui donne :

$$C^2 = \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2 \omega_1^2}{\omega_0^2}.$$

Ce qui est équivalent à résoudre l'équation :

$$X^2 + X(-2 + 4\xi^2) + 1 - C^2 = 0$$

Avec $X = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}$.

Le discriminant réduit de cette équation est :

$$\Delta' = (2\xi^2 - 1)^2 + C^2 - 1$$

On obtient finalement en retenant que la solution positive,

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2 + C^2 - 1}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + C^2}}.$$

On alors,

C	$\omega_1(\text{rad/s})$	$20 \log(K)(\text{dB})$
5	13,79	14
10	20,95	20
20	30,63	26

4. Calculer la pulsation ω_2 pour laquelle l'argument de $\varphi(j\omega) = -135^\circ$.

$$\varphi(j\omega) = \arg(FTBO(j\omega)) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) & \text{si } \omega < \omega_0 \\ -\pi - \arctan\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Hypothèse : $\omega_2 > \omega_0$.

On doit donc résoudre :

$$-\arctan\left(\frac{\frac{2\xi\omega_2}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Ceci revient à résoudre l'équation :

$$X^2 - 2\xi X - 1 = 0.$$

Avec $X = \frac{\omega_2}{\omega_0}$.

On obtient alors,

$$\omega_2 = \omega_0 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} \right) = 17,8 \text{ rad/s} > \omega_0.$$

5. Calculer la valeur de C pour avoir une marge de phase de 45° . Quel est alors l'écart de position (ou écart statique) ?

On veut un gain nul pour $\omega_1 = \omega_{135} = 17,8$.

Pour le système non corrigé en ω_1 , on a $G_{dB}(\omega_1) = -17,56$.

Le gain du correcteur proportionnel est constant et donc égal à $20 \log(C)$.

Ainsi on veut :

$$20 \log(C) - 17,56 = 0.$$

Ce qui revient à :

$$\ln(C) = \ln(10) \frac{17,56}{20}.$$

D'où :

$$C = 10^{\frac{17,56}{20}} = 7,55.$$

Autre méthode :

Avoir une marge de phase de 45° revient à vérifier que,

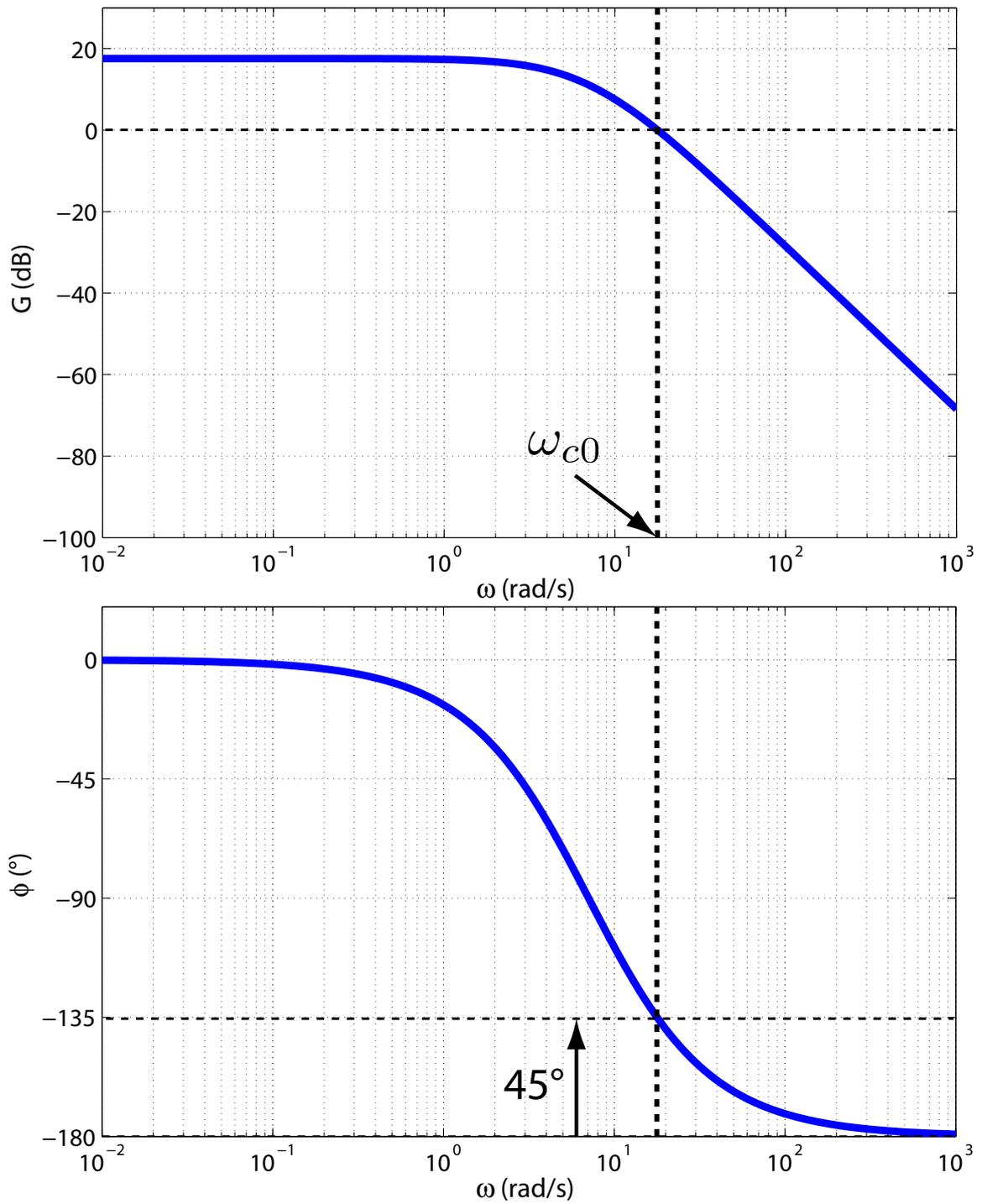
$$G_{dB}(\omega_2) = 0 \text{ dB.}$$

Ce qui donne,

$$20 \log(C) - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}\right)^2\right)^2 + 4 \xi^2 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}\right)^2} \right)$$

On obtient donc,

$$C = \sqrt{\left(1 - \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}\right)^2\right)^2 + 4 \xi^2 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}\right)^2} = 7,55 \text{ dB.}$$



On peut vérifier ce résultat sur les diagrammes de Bode, Nyquist et Black

