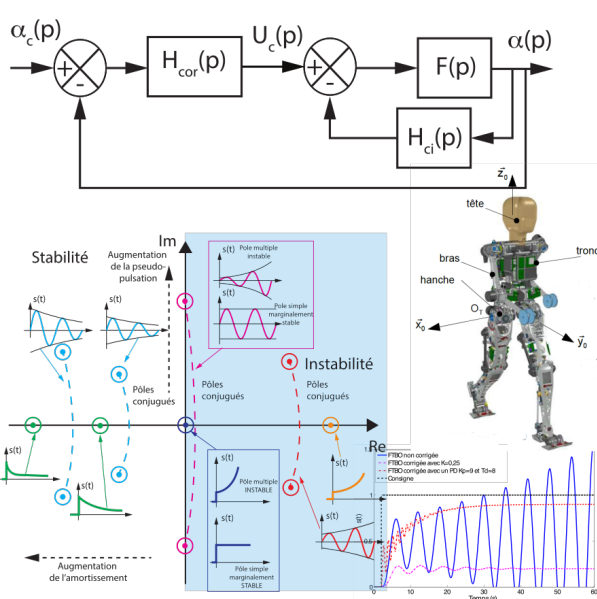
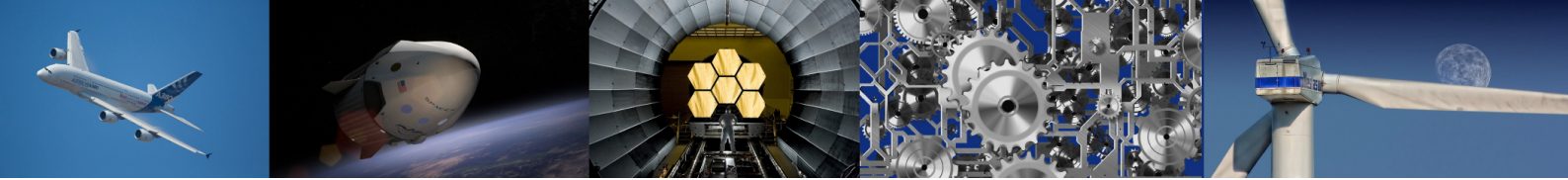




LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C6 : CONCEPTION DE LA PARTIE COMMANDE DES SYSTÈMES
POUR EN AMÉLIORER LES PERFORMANCES

TD 16 - Correction des systèmes asservis continues (C6-2)

Compétences

- **Analyser**
 - Analyser les performances et les écarts
- **Modéliser**
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
 - Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
 - Déterminer la réponse fréquentielle.
 - Déterminer les performances d'un système asservi.
 - Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.
- **Expérimenter**
 - Choisir le protocole en fonction de l'objectif visé.
 - Régler les paramètres de fonctionnement d'un système.
- **Communiquer**
 - Effectuer une synthèse des informations disponibles dans un dossier technique.
 - Faire preuve d'écoute et confronter des points de vue.
 - Présenter de manière argumentée une synthèse des résultats.
- **Concevoir**
 - Proposer une architecture fonctionnelle et organique.

Exercice 1 : Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie

Source : CCINP MP 2015

1 Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'inter-

rompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni figure 1, est guidée en translation suivant $\vec{y}$ par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant $\vec{x}$ par rapport au bâti.

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe $\vec{z}$) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crémaillère.

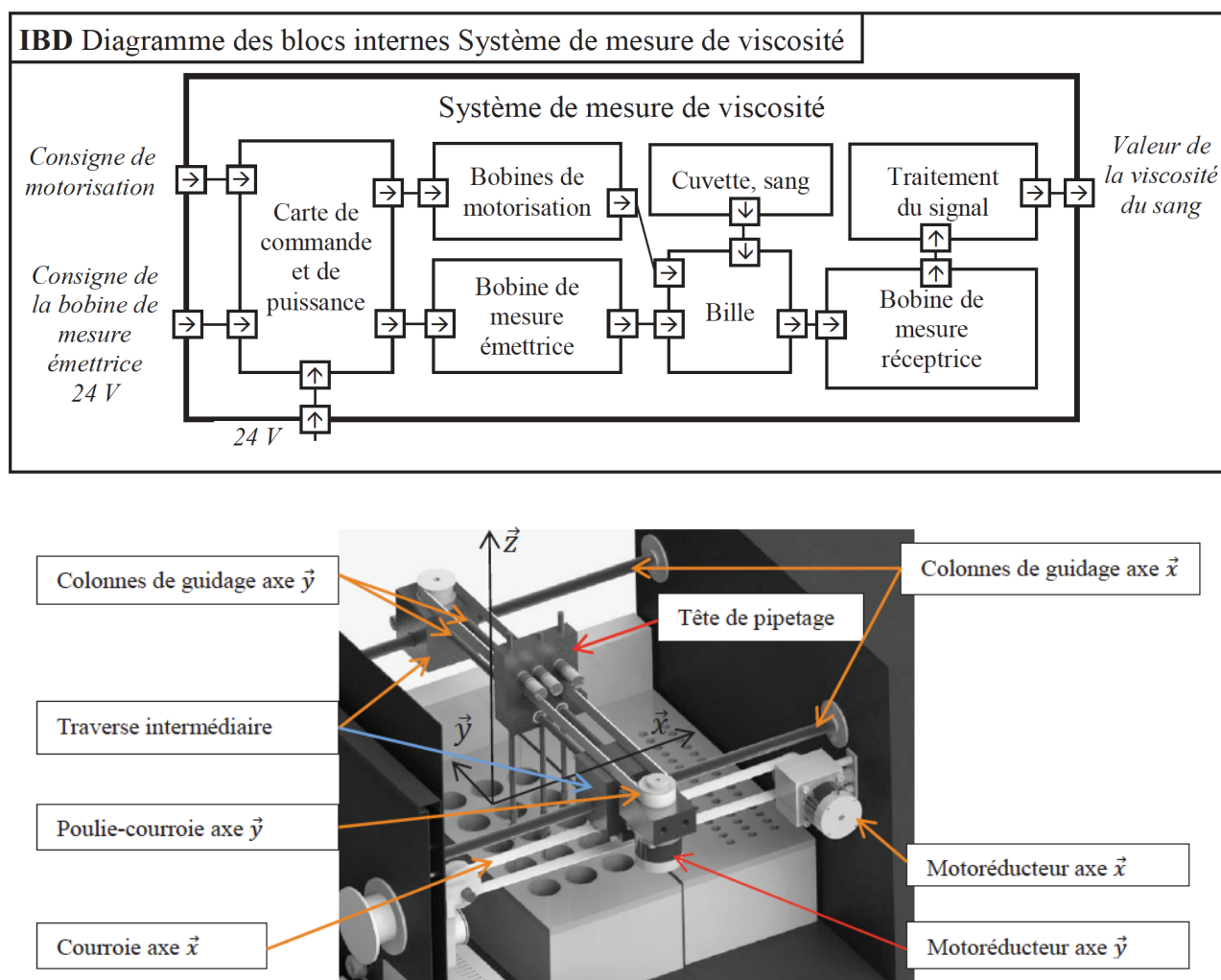
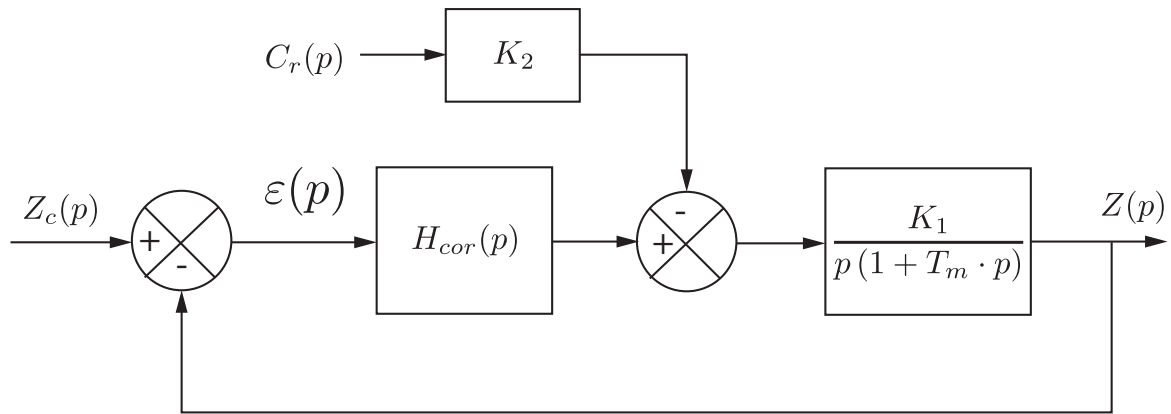


FIGURE 1 – Diagramme de bloc interne et présentation de l'architecture du système de mesure et du système de guidage

2 Réglage de l'asservissement

La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous :



avec $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} N^{-1}$, $K_1 = 856 s^{-1}$, $T_m = 3 \cdot 10^{-2} s$.

Le couple résistant C_r est constant et vaut $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} N \cdot m$.

On suppose le correcteur proportionnel : $H_{cor}(p) = K_p$.

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel (figure 2).

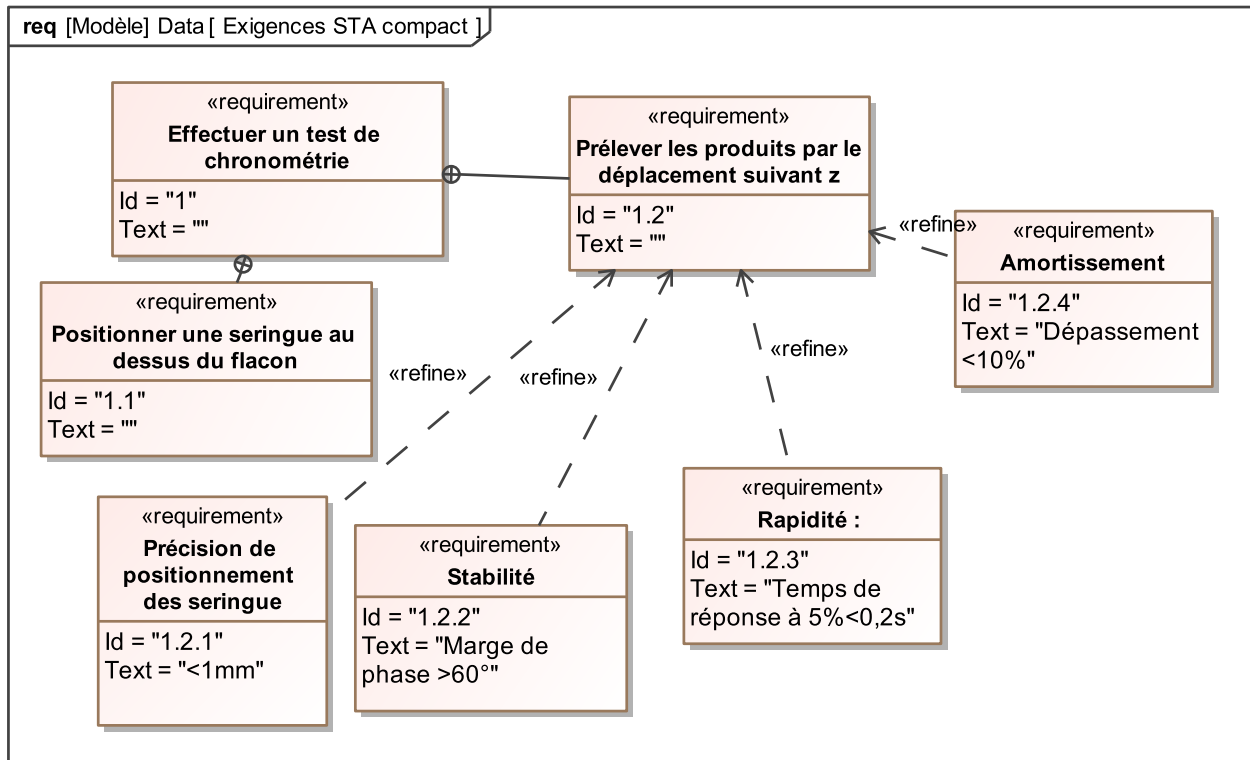


FIGURE 2 – Diagramme des exigences

Q 1 : Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \left(\frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$ ainsi que la fonction de transfert $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$.

Q 2 : Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle (C_{r0}). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0} , dans le cas d'une consigne de position nulle ($Z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

Q 3 : Sur le document réponse de la figure (3) compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ pour K_p déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

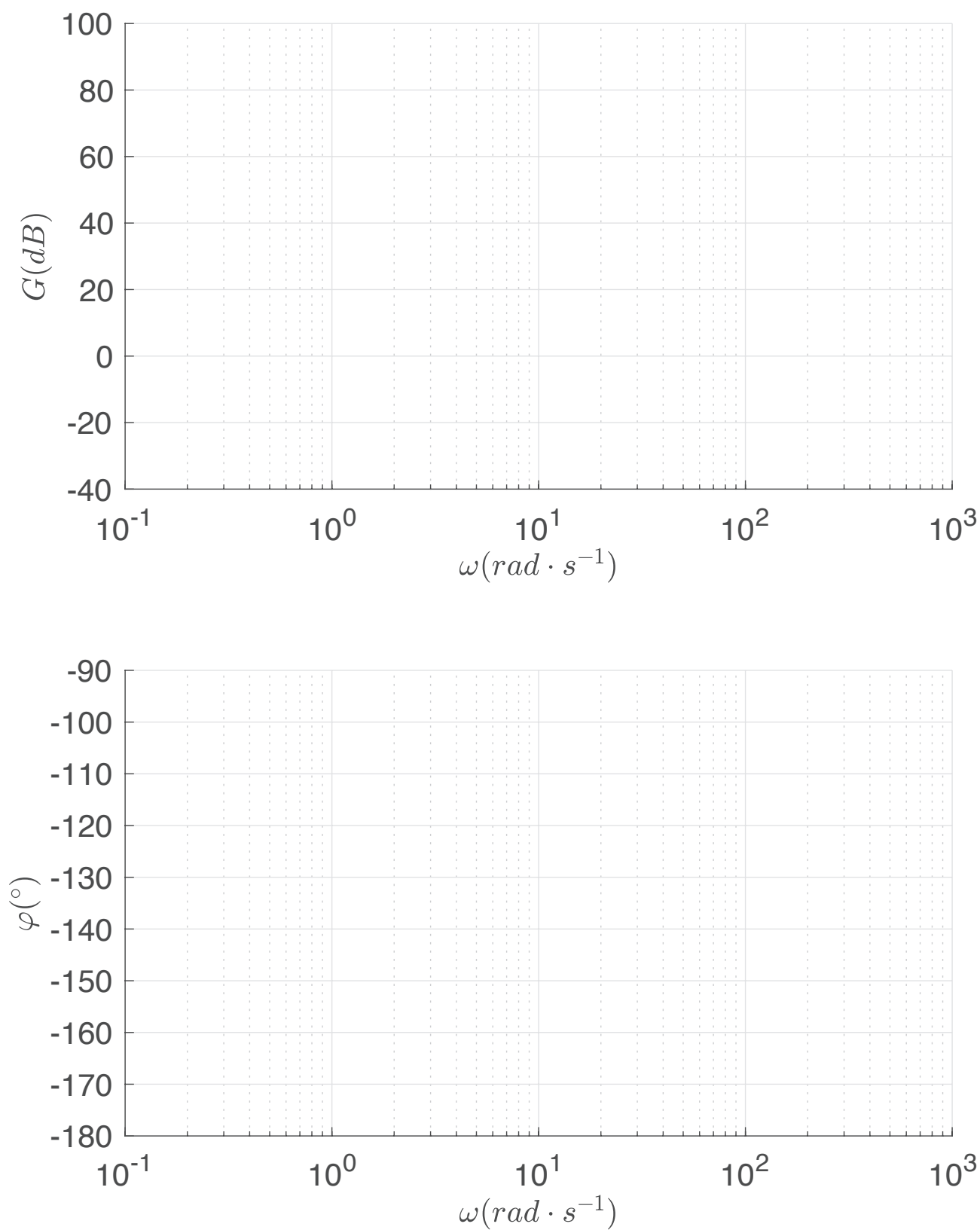
Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert : $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$ avec $K_p = 1$ et $T_i = 1 s$.

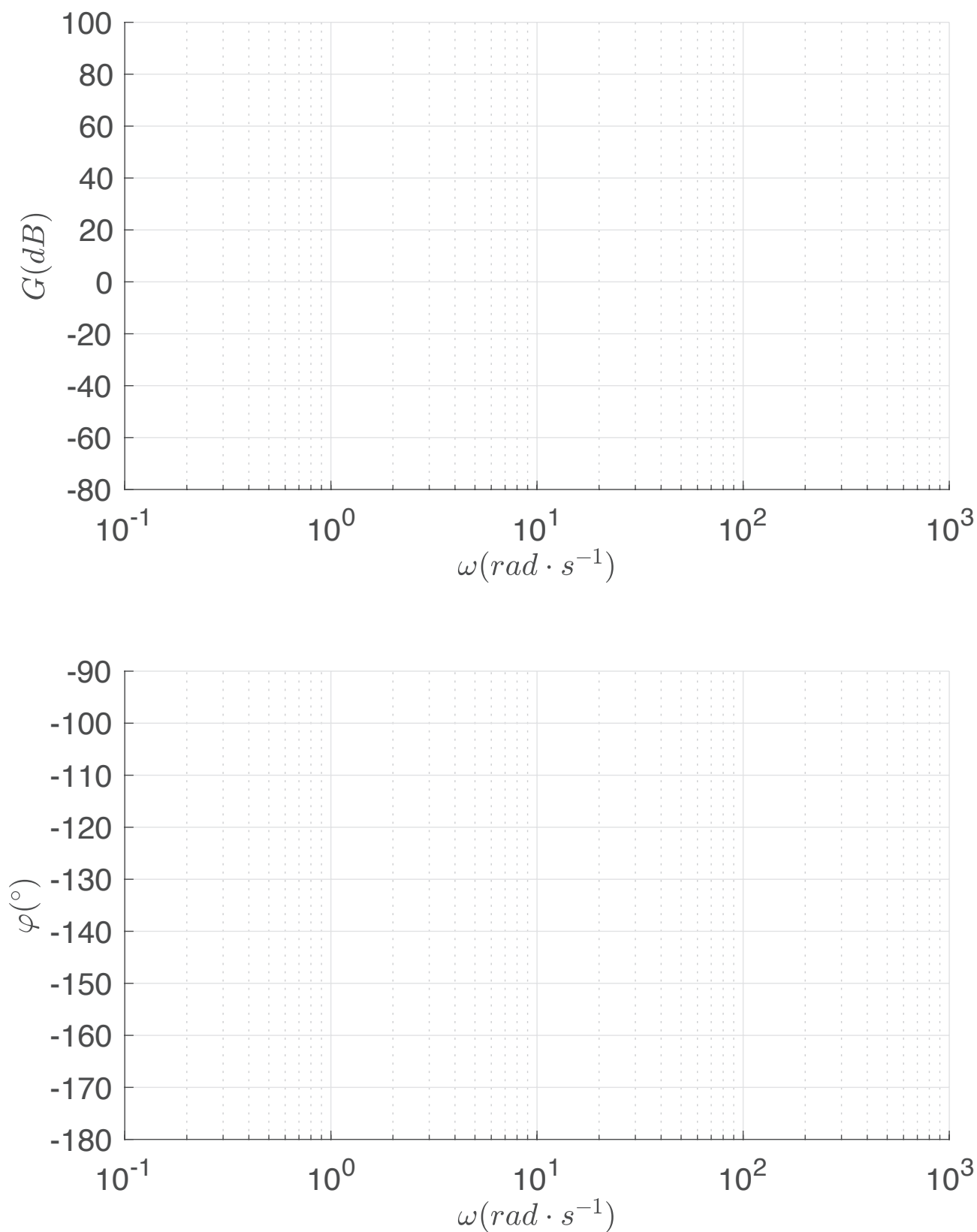
Q 4 : Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec $K_p = 1$ et $T_i = 1\text{ s}$ sur la figure 4.

Q 5 : On souhaite une marge de phase d'au moins 60° . Proposer un réglage de K_p pour satisfaire au cahier des charges. Justifier vos calculs par les tracés nécessaires sur la figure 4.

Q 6 : La figure 5 donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

Q 7 : Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé (figure 6.)

FIGURE 3 – Diagramme de Bode de $H_{bo}(p)$ pour $K_p = 1$

FIGURE 4 – Diagramme de Bode de $H_{bo}(p)$ avec un correcteur PI pour $K_p = 1$ et $T_i = 1s$

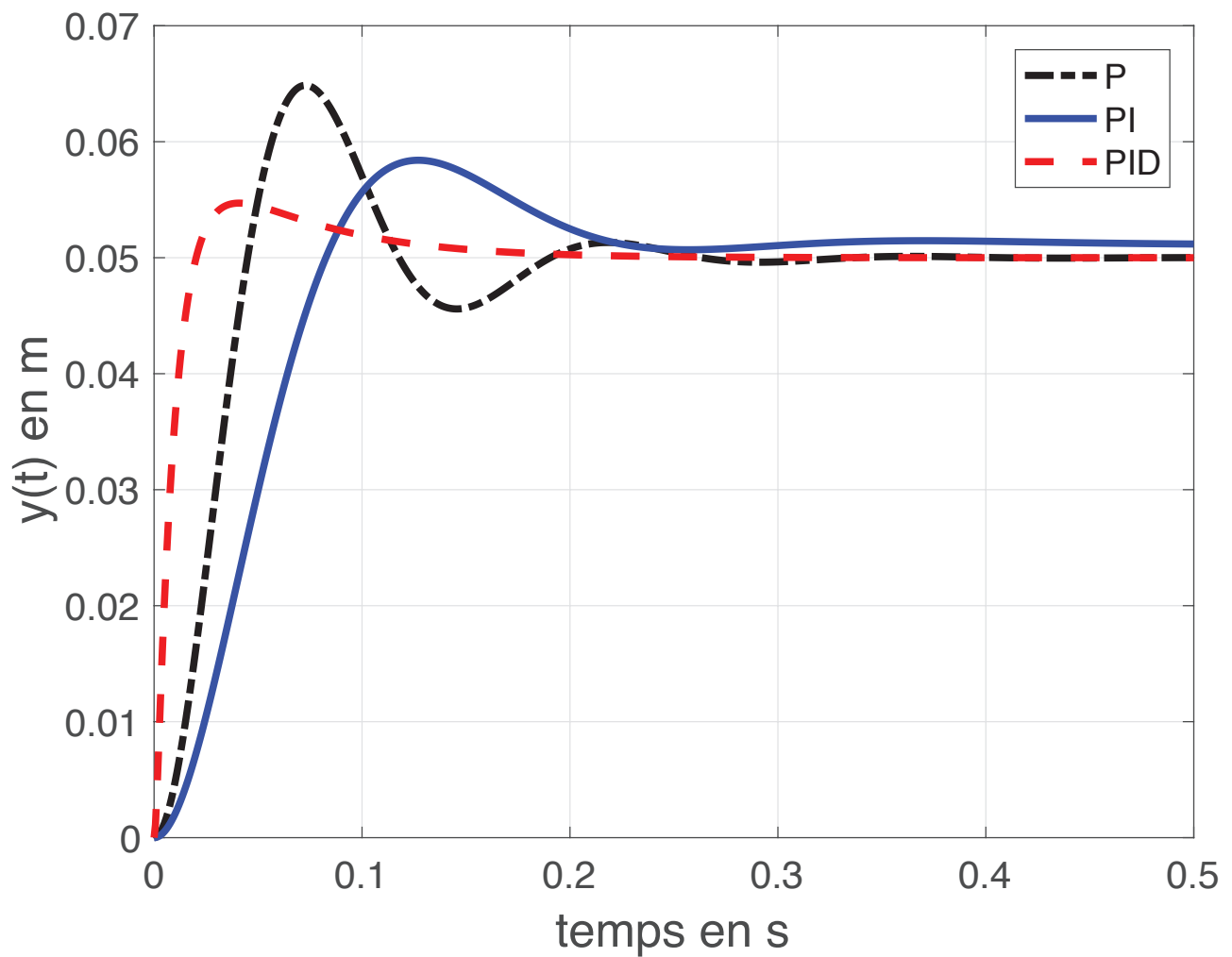


FIGURE 5 – Réponse à un échelon de position de 50mm avec trois correcteurs P(question 2) PI (question 5) et PID (déterminé numériquement)

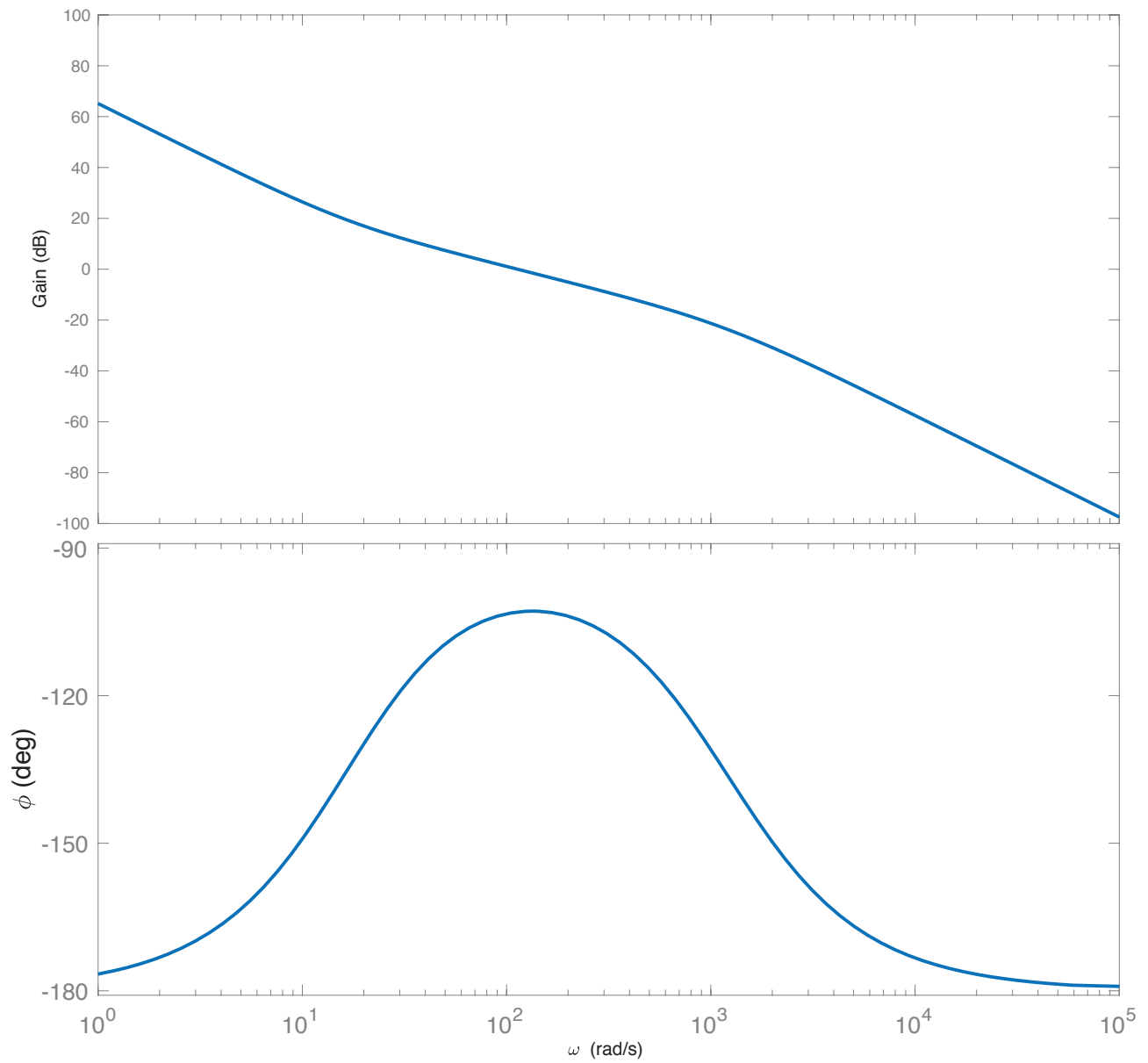


FIGURE 6 – Diagramme de Bode de $H_{bo}(p)$ avec un correcteur PID pour $K_p = 0,19$, $K_i = 2,1$ et $K_d = 0,0038$

Exercice 2 : Performances du robot Lola

Source : Concours Commun Mines-Ponts PSI 2015

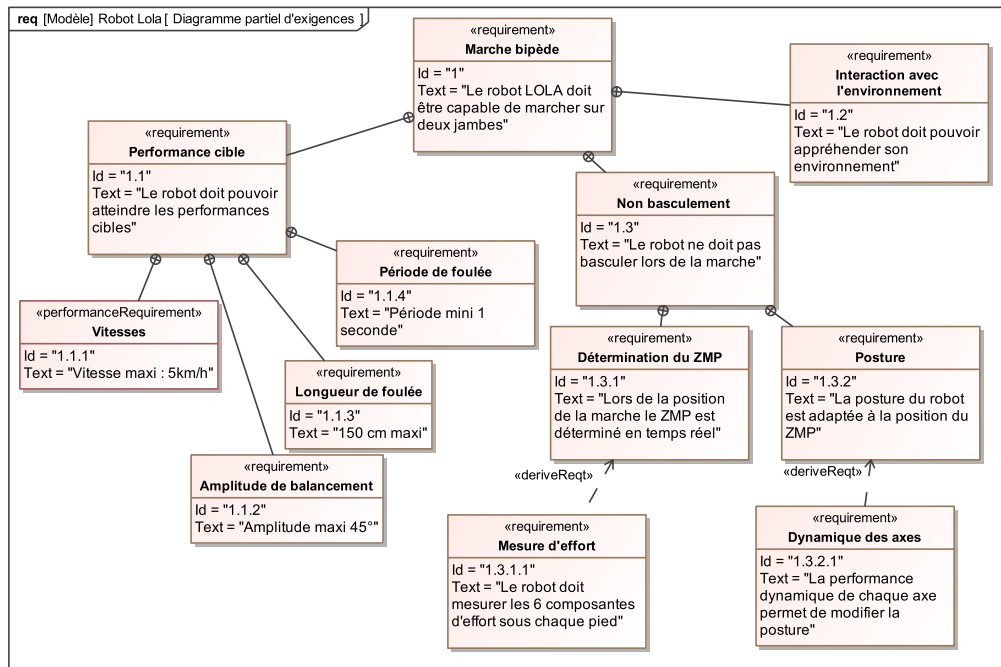
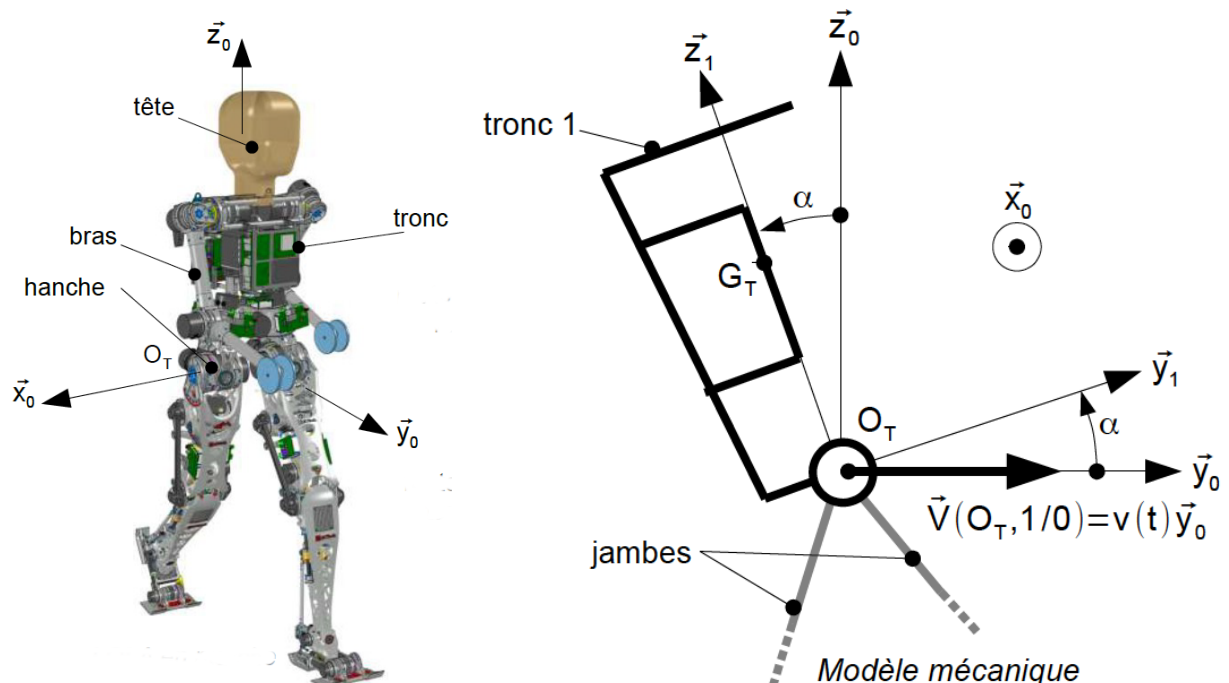


Diagramme des exigences



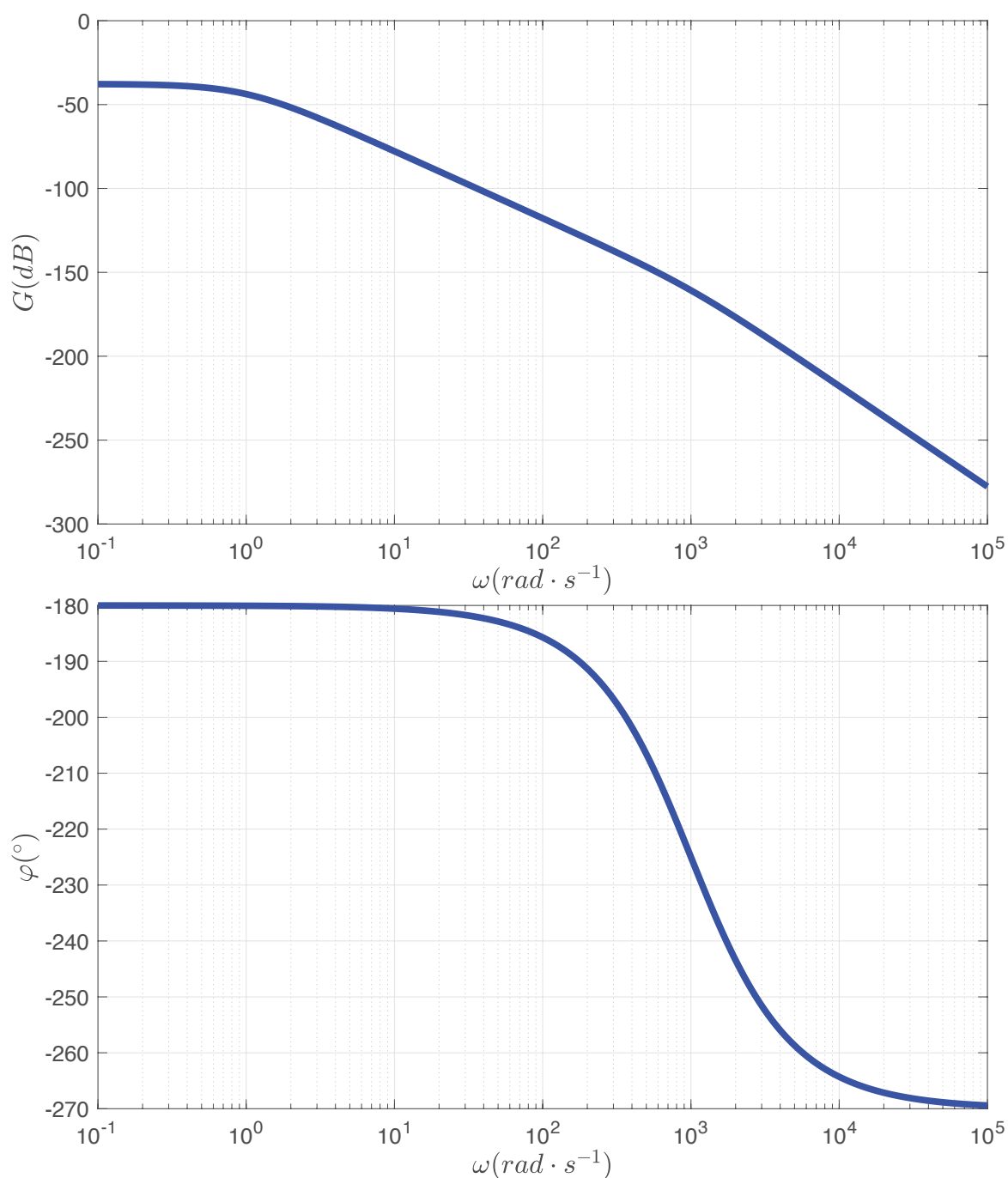
On s'intéresse ici à la mise en place d'une commande permettant d'assurer les performances dynamiques du robot Lola en terme de maintien d'une posture vertical. On note $\alpha(t)$, l'angle de tangage. Cet axe est actionné par un moteur à courant continu avec une **tension d'alimentation** noté $U_c(t)$.

1.3.2.1 Performance dynamique de chaque axe permet de modifier la posture		
Critère	Niveau	Flexibilité
Marge de phase	$M\varphi = 50^\circ$	Mini
Erreur Statique	0°	$\pm 0,5^\circ$
Bande passante à 0 dB en boucle ouverte	$\omega_{BP} = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Mini
Temps de réponse à 5%	$0,2 \text{ s}$	Maxi
Dépassement	1°	Maxi

On peut montrer que la fonction de transfert du robot Lola en boucle ouverte est de la forme :

$$F(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(-1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

Q 8 : Proposer un tracé asymptotique sur le diagramme de Bode de $F(p)$



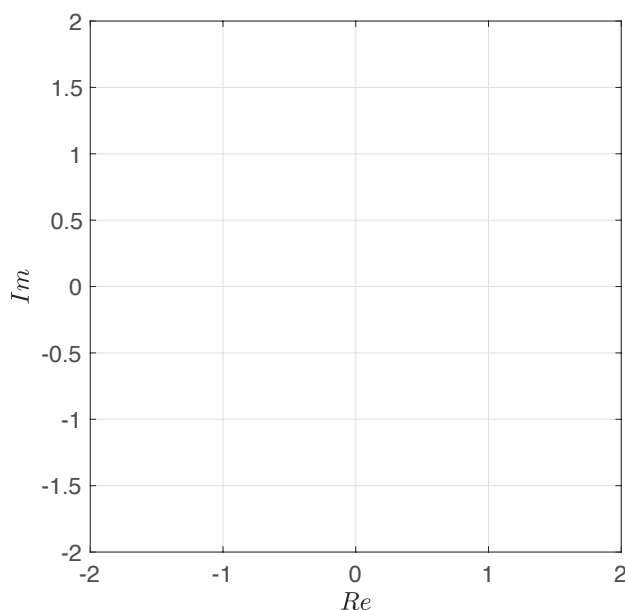
Q 9 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de τ_1 , τ_2 et K .

ω	$0 \rightarrow \frac{1}{\tau_1}$		$\frac{1}{\tau_1}$	$\frac{1}{\tau_1} \rightarrow \frac{1}{\tau_2}$		$\frac{1}{\tau_2}$	$\frac{1}{\tau_2} \rightarrow \infty$	
Tracé asymp-totique	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	$\varphi(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$
$\frac{K}{-1+\tau_1 \cdot p}$								
$\frac{1}{1+\tau_1 \cdot p}$								
$\frac{1}{1+\tau_2 \cdot p}$								
$F(p)$								

Par la suite, on simplifier $F(p)$ par $\frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}$.

Q 10 : Justifier ce choix de simplification.

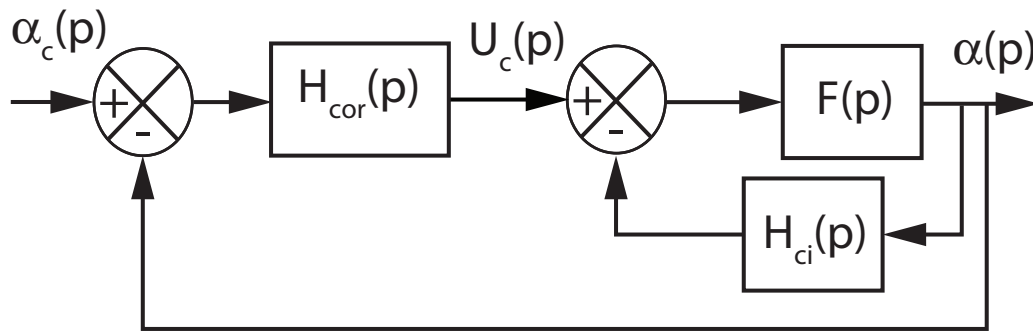
Q 11 : Représenter les pôles de $F(p)$ dans le plan complexe.



Q 12 : Que pouvons-nous dire sur la stabilité en boucle ouverte du système.

Q 13 : Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.

Afin de résoudre ce problème, il est décidé d'asservir la chaîne directe en position et en vitesse. Pour cela, la centrale inertielle permet de mesurer l'angle de tangage $\alpha(t)$ ainsi que la vitesse angulaire $\frac{d\alpha(t)}{dt}$. L'asservissement ainsi réalisé est présenté sous la forme du schéma-bloc ci-dessous. $U_c(p)$ est la tension de commande en sortie du correcteur. La fonction de transfert de la centrale inertielle sera prise égale à $H_{ci}(p) = K_1 \cdot (p + 1)$.



Q 14 : Déterminer deux conditions sur K_1 pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée soit stable.

Q 15 : Déterminer K_1 pour que la fonction de transfert $G(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ ait un facteur d'amortissement $\xi = 1,7$. Vérifier que cette valeur est compatible avec les conditions obtenues précédemment. En déduire les valeurs de la pulsation propre ω_0 et du gain statique de la boucle ouverte K_{BO} .

Pour la suite on prendra les valeurs de K_{BO} la plus faible trouvée et ω_0 la plus élevée trouvée.

Pour répondre au cahier des charges, il est décidé d'implanter un correcteur de fonction de transfert suivante :

$$H_{cor} = K_p \cdot \frac{1 + a \cdot T_d \cdot p}{1 + T_d \cdot p}$$

avec $a > 1$. Son diagramme de Bode avec K_p est donné sur la figure 7.

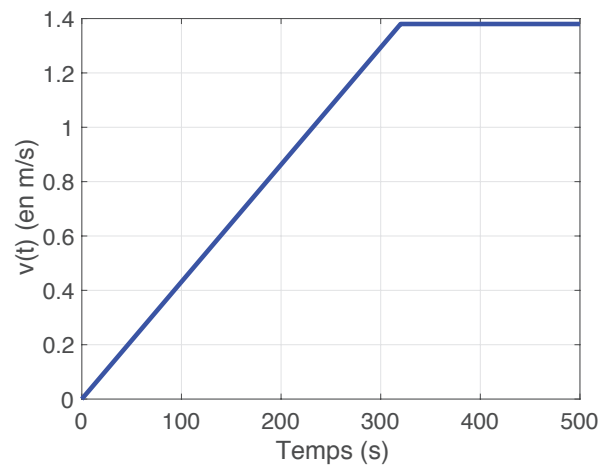
Q 16 : Nommer ce correcteur.

Q 17 : Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer ω_c en $\omega_{BP} = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, définissant ainsi la bande passante. Déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d .

Q 18 : Déterminer le gain K_p pour que le critère de bande passante du cahier des charges soit bien vérifié.

La stabilité du tronc étant assurée, nous devons maintenant analyser les performances en précision et rapidité de l'asservissement de position angulaire. La consigne est nulle, ainsi seule la perturbation va écarter le tronc du robot de sa posture verticale. Cette perturbation provient du mouvement de marche souhaité c'est-à-dire de l'accélération subie $\Gamma(t) = \frac{dv(t)}{dt}$.

Avec les réglages du correcteur, une simulation numérique a permis de tracer la réponse temporelle du système pour une perturbation $\Gamma(t)$ respectant la loi de vitesse représentée sur la figure ci-contre. Cette réponse est tracée sur la figure 8.



Q 19 : Justifier l'allure de la réponse temporelle. Déterminer graphiquement sur le document réponse le temps de réponse à 5%, le dépassement maximal et l'erreur statique. Conclure sur la capacité du correcteur à vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

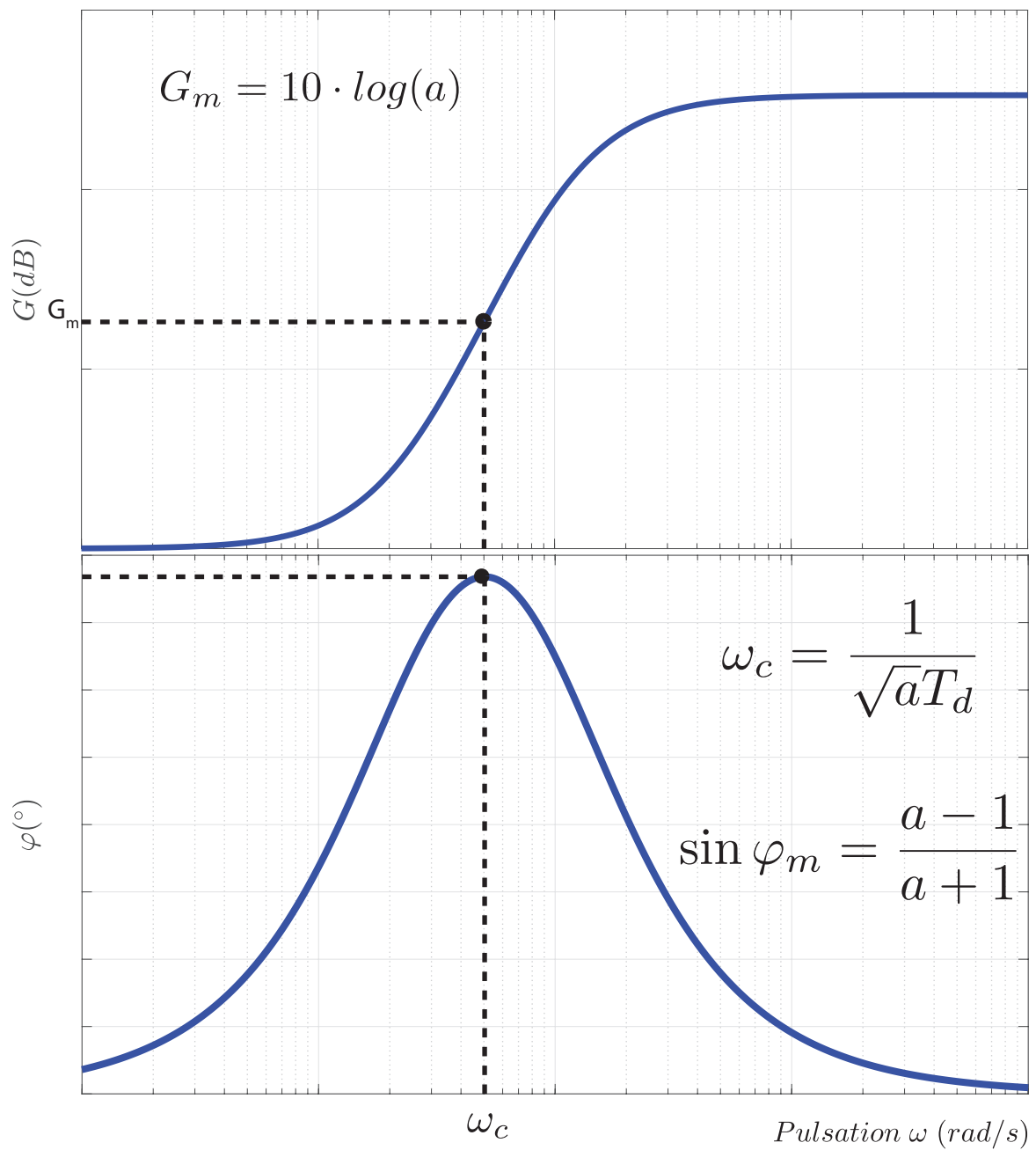


FIGURE 7 – Diagramme de Bode du correcteur à avance de phase

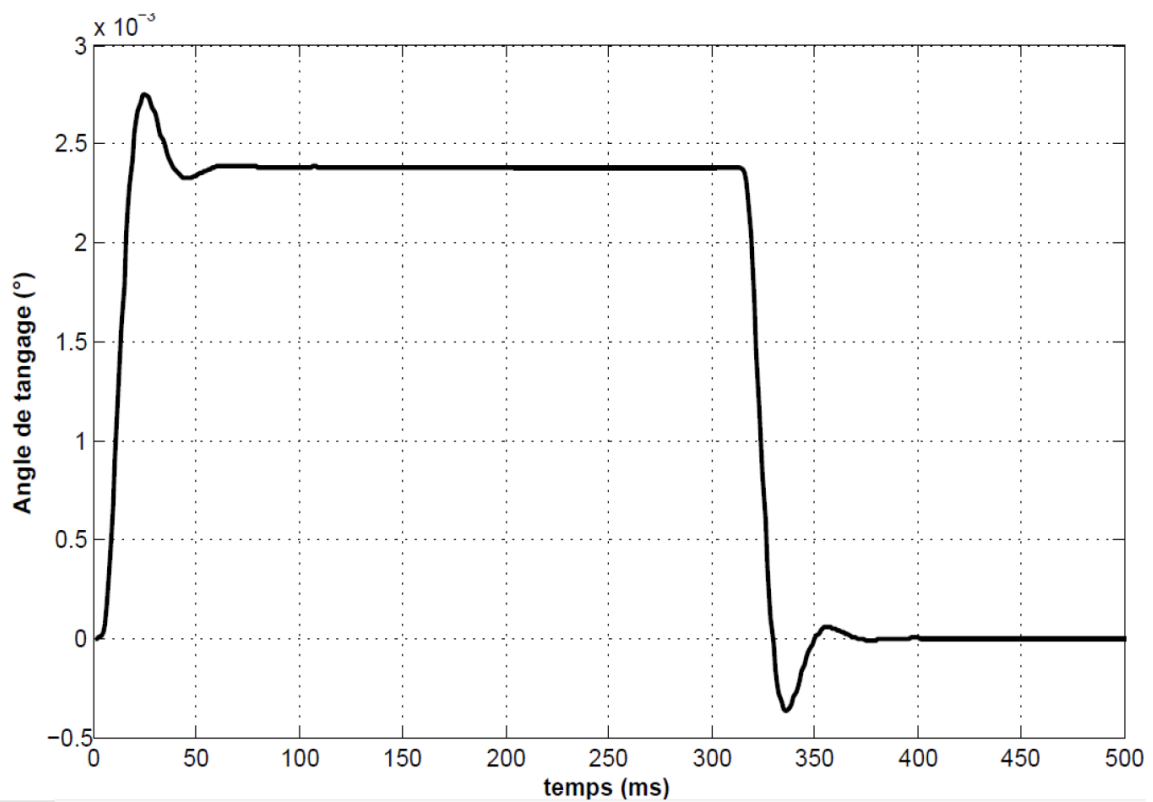


FIGURE 8 – Réponse temporelle

Exercice 3 : Correcteur à avance de phase

On souhaite régler avec un correcteur à avance de phase le système possédant la FTBO suivante :

$$FTBO(p) = \frac{1}{p(1+2p)(1+0,2p)}$$

On donne le diagramme de Bode de cette fonction de transfert :

Questions

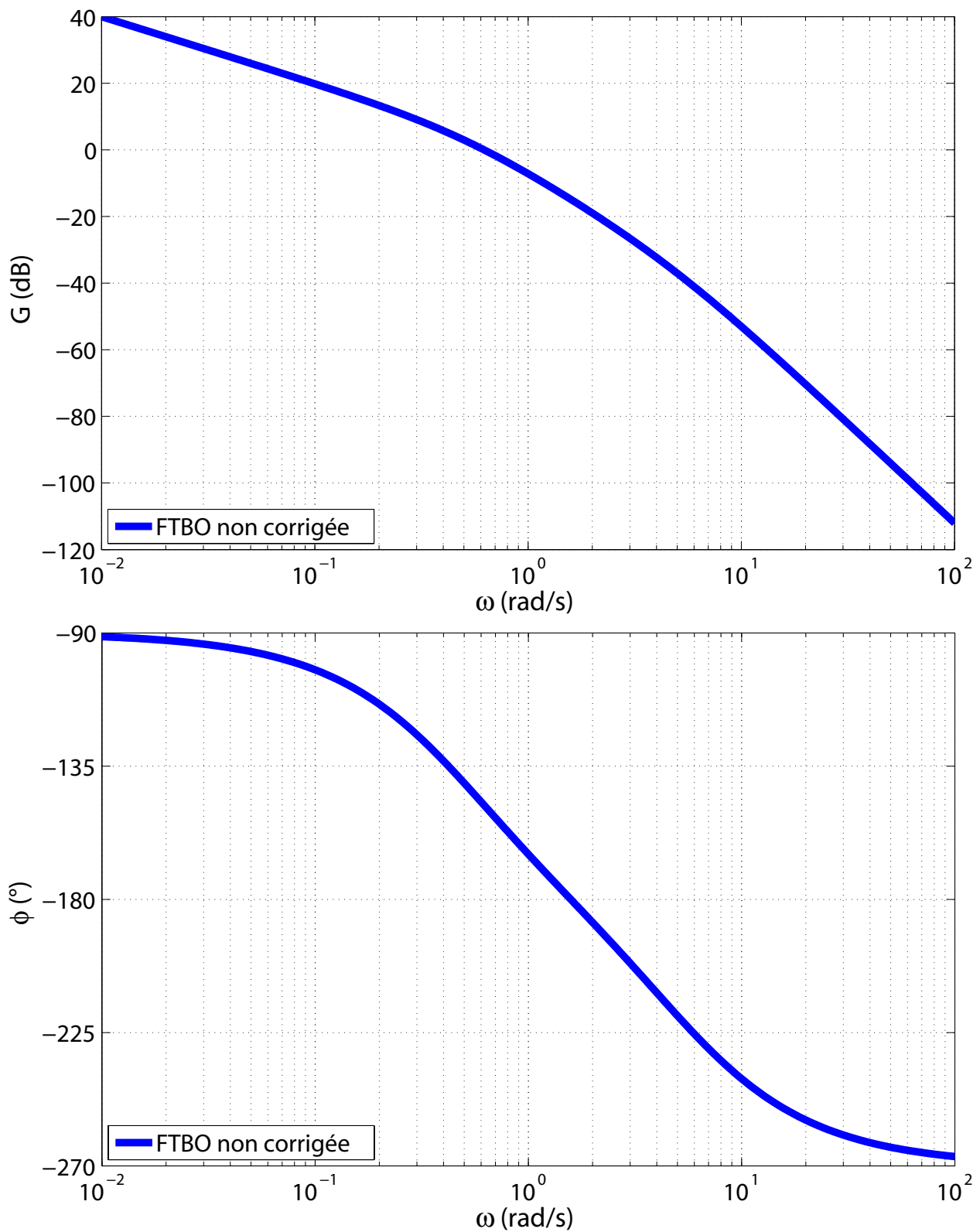
Q 20 : Le système est-il stable?

Q 21 : Si oui, donner la marge de phase et de gain.

Q 22 : Régler a pour avoir une marge de phase égale à 45° .

Q 23 : Donner alors le réglage de T .

Q 24 : Ajuster le gain proportionnel pour obtenir un gain nul pour la la pulsation $\omega = \frac{1}{\sqrt{aT}}$.

FIGURE 9 – Diagramme de Bode de $FTBO(p)$

Corrigé

fonction de transfert $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$.

$$H_{bo}(p) = \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} = H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)} = \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)}$$

$$Z(p) = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p \varepsilon(p) - K_2 C_r(p)] = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p (-Z(p)) - K_2 C_r(p)]$$

$$Z(p) \left(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)} \right) = - \frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)} C_r(p)$$

$$H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0} = \frac{-\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)}}{\left(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)} \right)} = - \frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p) + K_p K_1} = - \frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}}$$

Q 2 : Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle (C_{r0}). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0} , dans le cas d'une consigne de position nulle ($Z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

L'erreur statique par rapport à une entrée échelon, la perturbation étant nulle, est égale à 0, car il y a une intégration dans la chaîne directe

Dans le cas d'une perturbation constante égale à C_{r0} , d'après la question précédente on peut écrire :

$$Z(p) = - \frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} C_r(p) = - \frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} \frac{C_{r0}}{p}$$

En utilisant la propriété du gain statique, on en déduit $z_\infty = \frac{K_2 C_{r0}}{K_p}$, l'erreur vaut donc $\varepsilon = -z_\infty = -\frac{K_2 C_{r0}}{K_p}$.

Pour répondre à l'exigence de précision, on doit avoir

$$\varepsilon = \frac{K_2 C_{r0}}{K_p} < 1 \text{ mm}$$

On en déduit

$$\varepsilon = \frac{K_2 C_{r0}}{K_p} < 10^{-3} \text{ m}$$

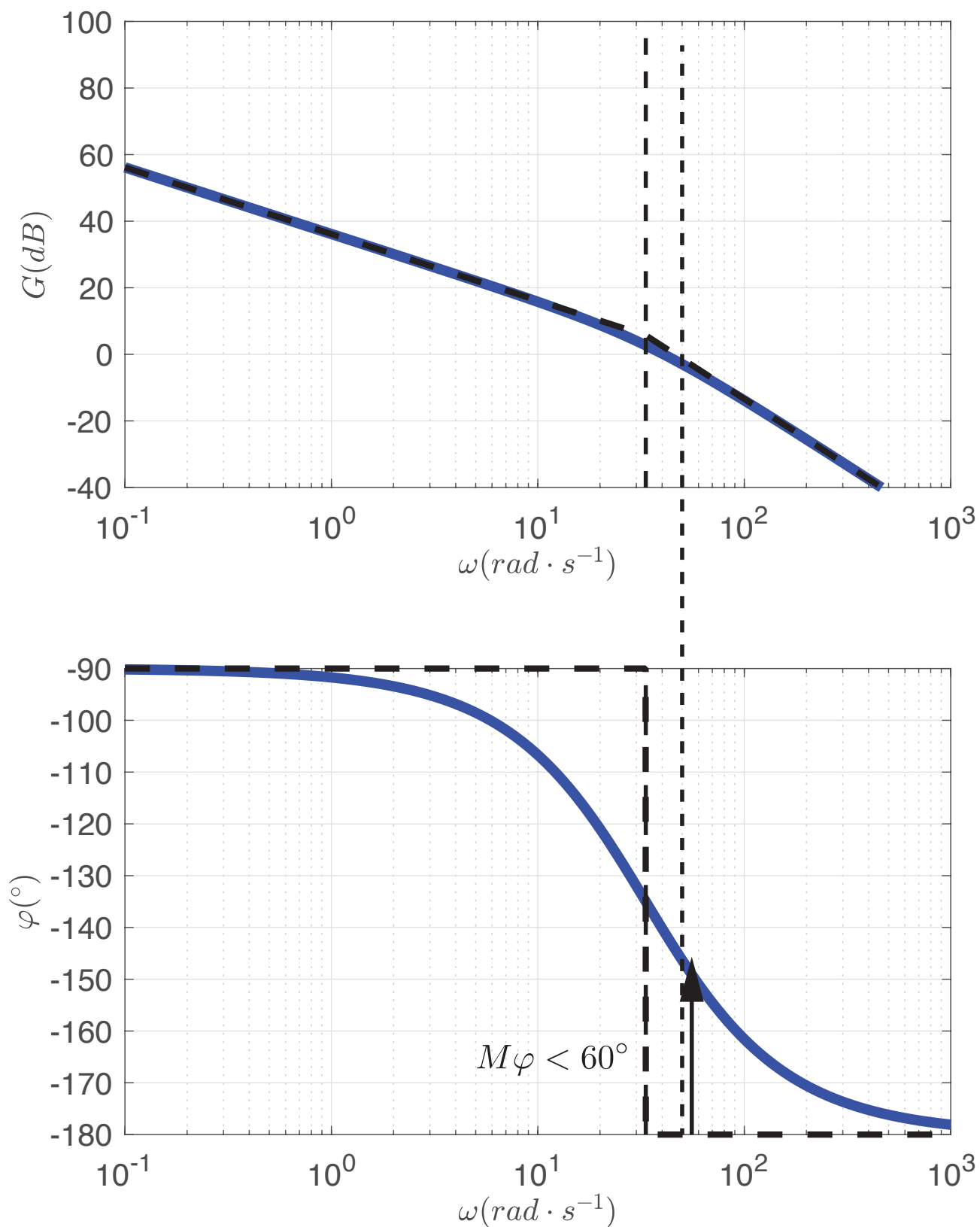
$$K_p > \frac{K_2 C_{r0}}{10^{-3}}$$

$$K_p > \frac{2,78 \cdot 10^{-2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}$$

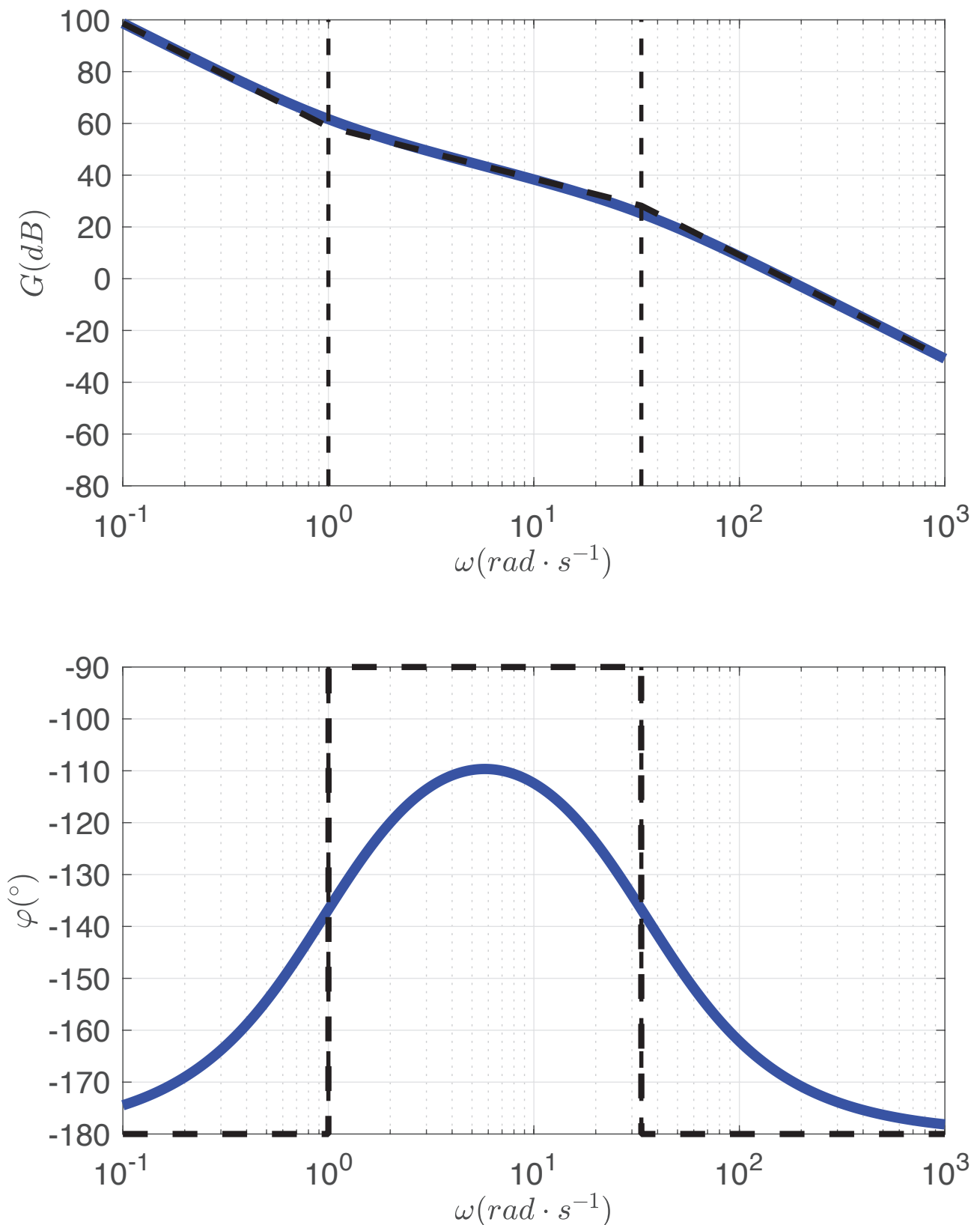
$$K_p > 0,075$$

Q 3 : Sur le document réponse de la figure (3) compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ pour K_p déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

Avec $K_p = 0,075$, on obtient une marge de phase de $35^\circ < 60^\circ$, le critère de stabilité n'est donc pas vérifié.



Q 4 : Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec $K_p = 1$ et $T_i = 1 \text{ s}$ sur la figure 4.

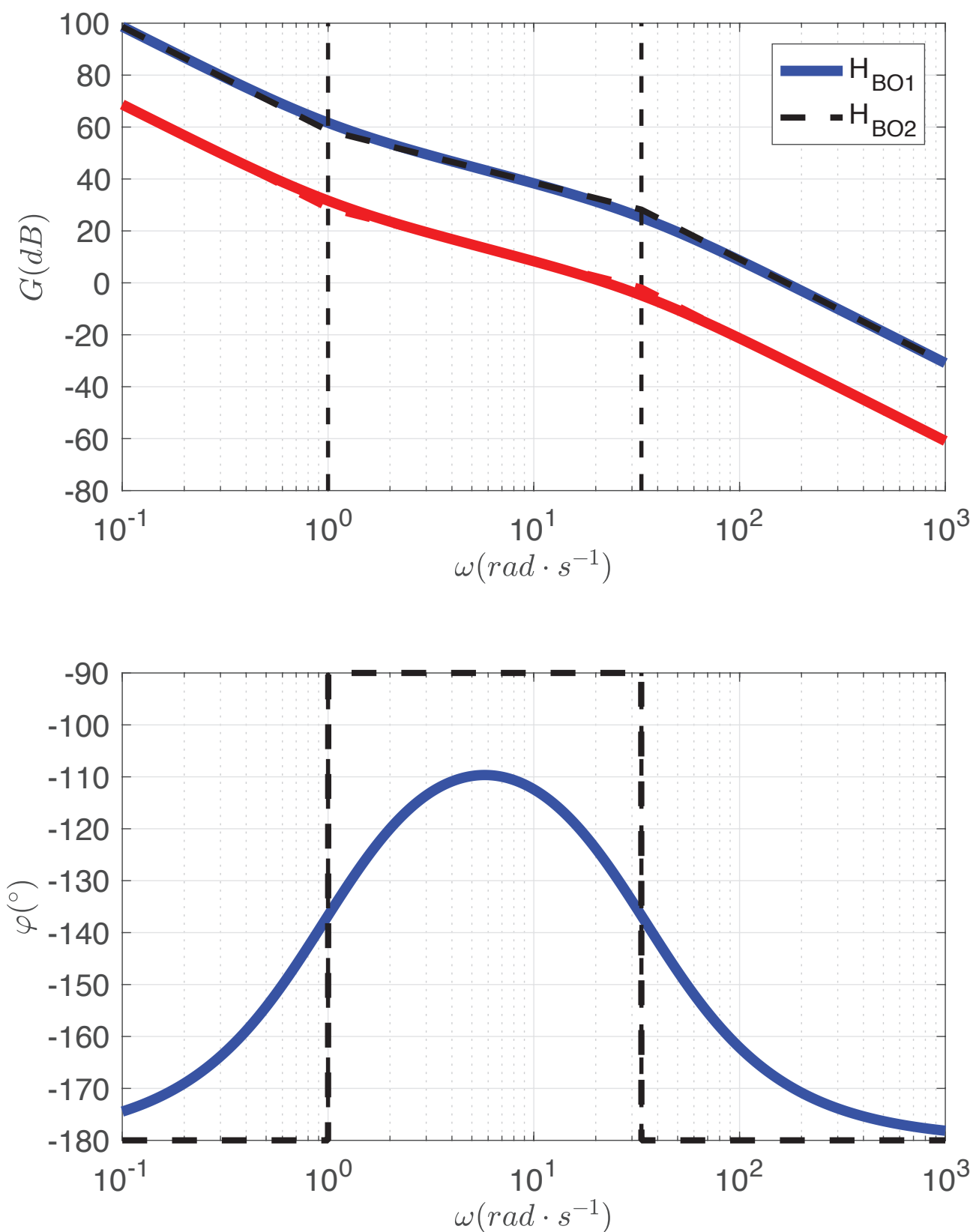


Q 5 : On souhaite une marge de phase d'au moins 60° . Proposer un réglage de K_p pour satisfaire au cahier des charges. Justifier vos calculs par les tracés nécessaires sur la figure 4.

On note qu'en la pulsation donnant une phase à -120° , le gain en décibel est à peu près égal à $-30dB$. On règle donc K_p tel que :

$$K_p = 10^{-30/20} = 0,032.$$

On obtient alors le deuxième tracé.



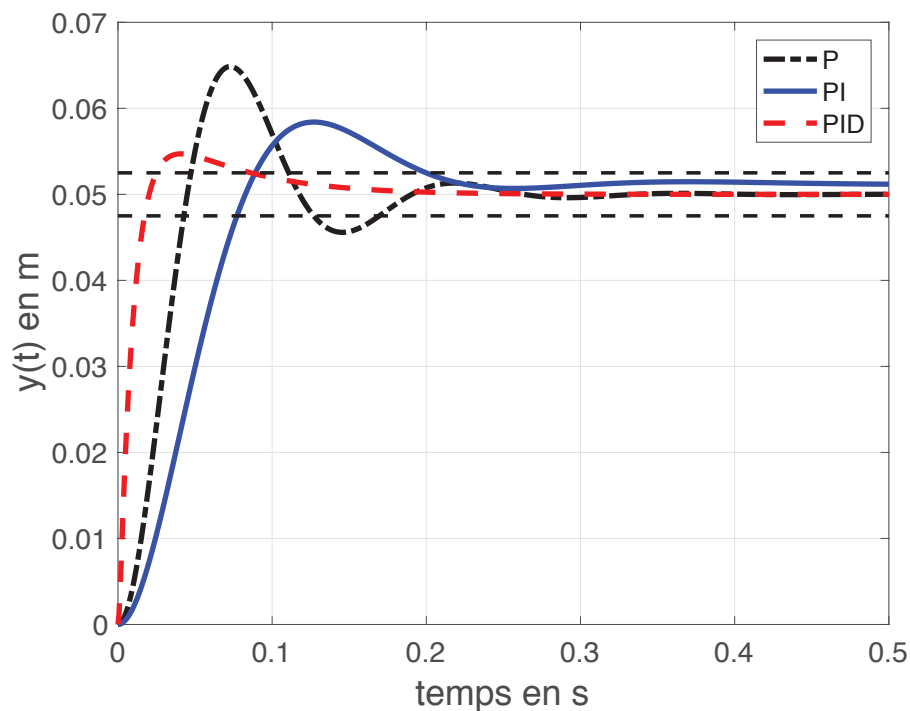
Q 6 : La figure 5 donne la réponse à un échelon de position de 50mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

- La valeur en régime permanent vaut 50mm pour les trois réponses, l'erreur statique est nulle le critère de précision est respecté pour les trois réglages.

- Temps de réponse à 5% et dépassement :

Type de correcteur	P	PI	PID
$tr_{5\%}$	0,17s	0,2s	0,08
Dépassement	29,72%	16,8%	9,4%

- Seul le PID vérifie le critère sur le premier dépassement car $D_{1\%} = 9,4\% < 10\%$. Le critère d'amortissement est donc respecté.

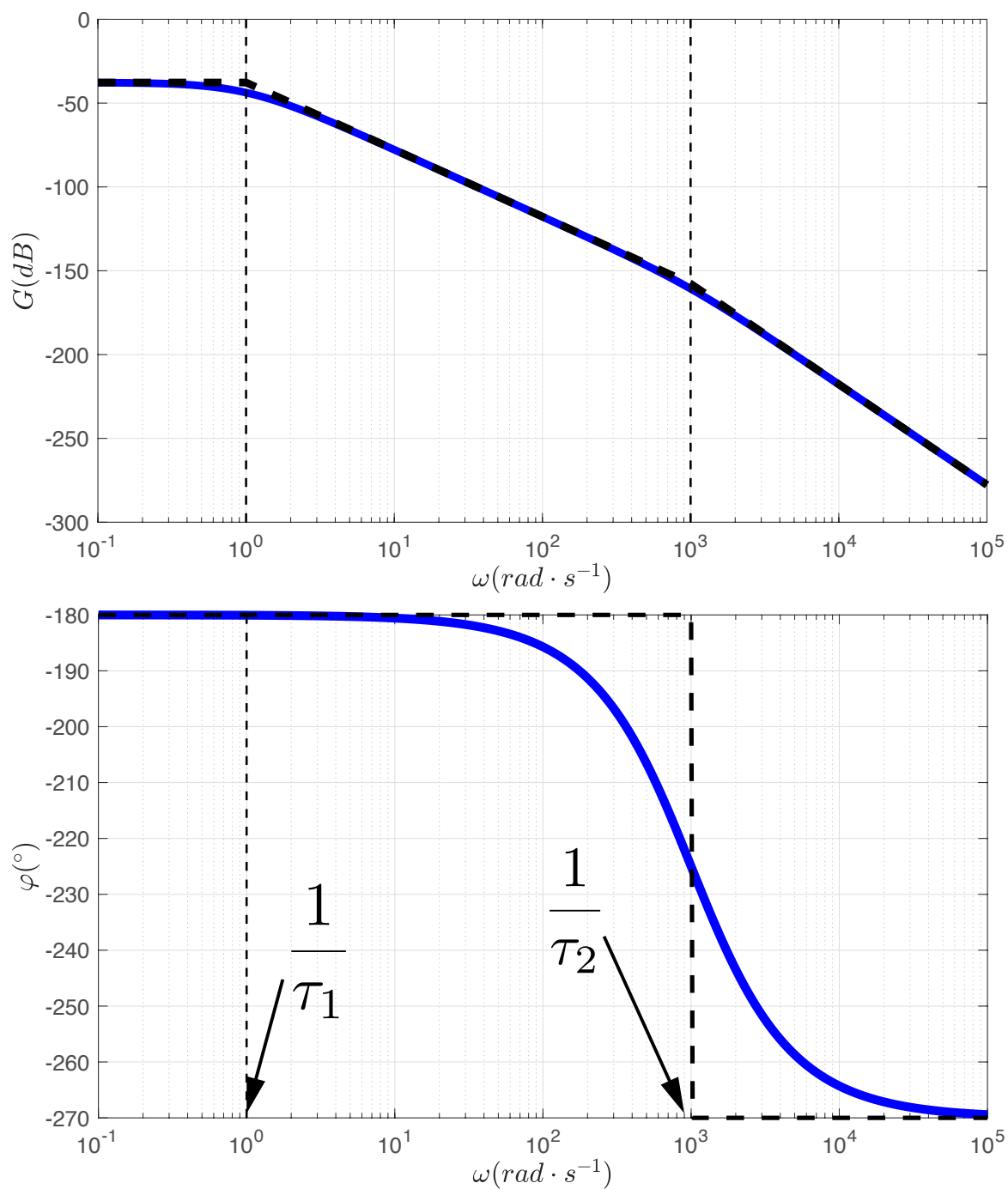


Q 7 : Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé (figure 6.)

On trouve une marge de phase supérieure à 60° et une bande passante à $0dB$ égale à $100rad/s$ supérieure aux réglages précédents ce qui donne une réponse plus rapide et plus stable.

Exercice 2 : Performances du robot Lola

Q 8 : Proposer un tracé asymptotique sur le diagramme de Bode de $F(p)$



Q 9 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, et en utilisant le tableau ci-dessous déterminer les valeurs de τ_1 , τ_2 et K .

ω	$0 \rightarrow \frac{1}{\tau_1}$		$\frac{1}{\tau_1}$	$\frac{1}{\tau_1} \rightarrow \frac{2}{\tau_1}$		$\frac{1}{\tau_2}$	$\frac{1}{\tau_2} \rightarrow \infty$	
Tracé asymp-totique	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$
$\frac{K}{-1+\tau_1 \cdot p}$	0	-180	$20 \log K$	-20	-90	Continuité	-20	-90
$\frac{1}{1+\tau_1 \cdot p}$	0	0	0	-20	-90	Continuité	-20	-90
$\frac{1}{1+\tau_2 \cdot p}$	0	0	0	0	0	Continuité	-20	-90
$F(p)$	0	-180	$20 \log K$	-40	-180	Continuité	-60	-270

Par identification, on trouve :

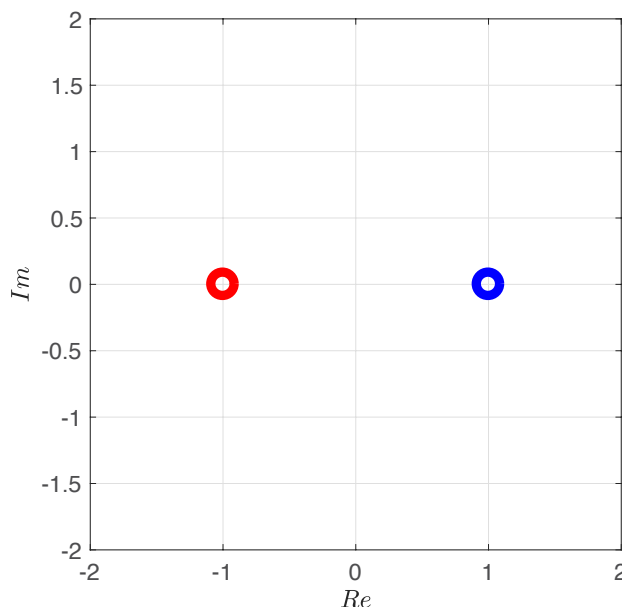
- $\tau_1 = 1 \text{ s}$;
- $\tau_2 = 10^{-3} \text{ s}$;
- $K = 10^{-\frac{37,5}{20}} = 0,013 \text{ rad} \cdot \text{V}^{-1}$.

Q 10 : Justifier ce choix de simplification.

$\tau_2 \ll \tau_1$ donc l'effet de $1 = \tau_2 \cdot p$ est négligeable sur la réponse.

La forme simplifiée est justifiée. Sur le Bode on remarque que le modèle simplifié est satisfaisant jusqu'à $100 \text{ rad/s} > 50 \text{ rad/s}$ (bande passante visée en BO)

Q 11 : Représenter les pôles de $F(p)$ dans le plan complexe.



Q 12 : Que pouvons-nous dire sur la stabilité en boucle ouverte du système.

Il existe un pôle à partie réelle positive donc le système n'est pas stable en boucle ouverte.

Q 13 : Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.

La fonction de transfert en BO a un pôle à partie réelle positive. Le système est donc instable en BO. Le critère du Revers stipule que le système en BO ne doit pas comporter de pôle à partie réelle strictement positive pour qu'il ait un sens. Ce critère n'est donc pas adapté pour vérifier la stabilité du système en BF.

Q 14 : Déterminer deux conditions sur K_1 pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ soit stable. En déduire la valeur minimale de K_1

$$F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)H_{ci}(p)} = \frac{\frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}}{1 + \frac{K \cdot K_1 \cdot (p+1)}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}}$$

$$= \frac{K}{K \cdot K_1 \cdot (p+1) + (1 + \tau_1 \cdot p)(-1 + \tau_1 \cdot p)} = \frac{K}{K \cdot K_1 - 1 + K \cdot K_1 \cdot p + \tau_1^2 \cdot p^2}$$

p^2	τ_1^2	$K \cdot K_1 - 1$
p^1	$K \cdot K_1$	0
p^0	$K \cdot K_1 - 1$	0

Il faut donc : $K_1 > \frac{1}{K} = 77V/rad$ et $K_1 > 0$.

Q 15 : Déterminer K_1 pour que la fonction de transfert $G(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ ait un facteur d'amortissement $\xi = 1,7$. Vérifier que cette valeur est compatible avec les conditions obtenues précédemment. En déduire les valeurs de la pulsation propre ω_0 et du gain statique de la boucle ouverte K_{BO} .

$$G(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)H_{ci}(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(-1 + \tau_1 \cdot p) + K \cdot K_1 \cdot (1 + p)}$$

$$= \frac{K}{K \cdot K_1 - 1 + K \cdot K_1 \cdot p + \tau_1^2 \cdot p^2} = \frac{\frac{K}{K \cdot K_1 - 1}}{1 + \frac{K \cdot K_1}{K \cdot K_1 - 1} \cdot p + \frac{\tau_1^2}{K \cdot K_1 - 1} \cdot p^2}$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{BO} = \frac{K}{K \cdot K_1 - 1} \\ \omega_0 = \frac{\sqrt{K \cdot K_1 - 1}}{\tau_1} \\ \xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{K \cdot K_1}{K \cdot K_1 - 1} = \frac{\sqrt{K \cdot K_1 - 1}}{\tau_1} \cdot \frac{K \cdot K_1}{K \cdot K_1 - 1} = \frac{K \cdot K_1}{2\tau_1 \sqrt{K \cdot K_1 - 1}} \end{array} \right.$$

Cela revient à résoudre :

$$K^2 \cdot K_1^2 - 4 \cdot K \cdot \tau_1^2 \cdot \xi^4 \cdot K_1 + 4\tau_1^2 \cdot \xi^2 = 0$$

On obtient alors deux racines :

$$K_1 = \frac{2\xi \cdot \tau_1 \left(\xi \cdot \tau_1 \pm \sqrt{\tau_1^2 \cdot \xi^2 - 1} \right)}{K}$$

Deux valeurs de K_1 positives sont admissibles :

K_1	K_{BO}	ω_0
85	0,12	0,32
804,2	$1,4 \times 10^{-3}$	3,07

Q 16 : Nommer ce correcteur.

Il s'agit d'un correcteur à avance de phase.

Q 17 : Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer ω_c en $\omega_{BP} = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, définissant ainsi la bande passante. Déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d .

On calcule la phase de la fonction de transfert non corrigée en ω_c :

$$\varphi(\omega_c) = -\arg\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{2\xi\omega_c}{\omega_0}\right)$$

Or $\omega_c > \omega_0$:

$$\varphi(\omega_c) = -\arctan\left(\frac{\frac{2\xi\omega_c}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}}\right) - \pi = -168,4^\circ$$

On obtient donc une marge de phase : $M\varphi = 11,6^\circ$ qui est trop faible par rapport à ce qui est attendu par le cahier des charges.

On va compenser par un correcteur à avance de phase avec $\varphi_m = 50^\circ - 11,6^\circ = 38,4^\circ$.

Il faut alors déterminer la valeur de a :

$$a = \frac{\sin\varphi_m + 1}{1 - \sin\varphi_m} = 4,28.$$

On trouve alors T_d pour que le pic en phase du correcteur corresponde à ω_c :

$$T_d = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot \omega_c} = 9,6 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

Q 18 : Déterminer le gain K_p pour que le critère de bande passante du cahier des charges soit bien vérifié.

Il ne reste plus qu'à régler K_p pour que ω_c corresponde à la pulsation de gain nulle pour la FTBO du système corrigé. Cela revient à résoudre :

$$20\log(|G(j \cdot \omega_c)|) + 10 \cdot \log(a) + 20\log(K_p) = 0$$

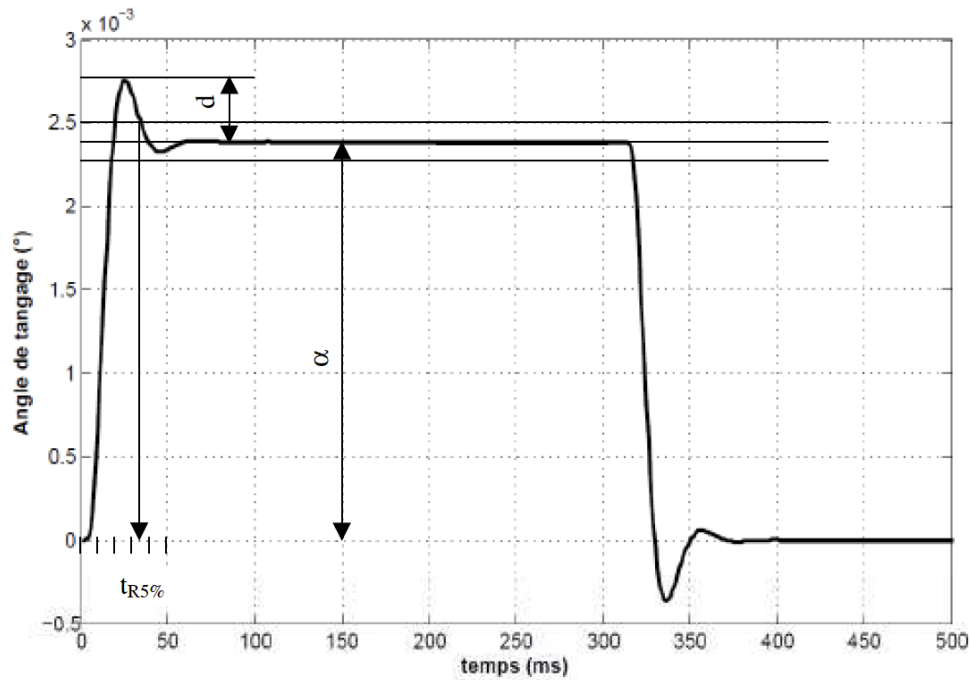
On trouve alors :

$$K_p = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega_c^2}{\omega_0^2}}}{\sqrt{a} \cdot K_{BO}} = 9,9 \times 10^4 \text{ V/rad}.$$

Q 19 : Justifier l'allure de la réponse temporelle. Déterminer graphiquement sur le document réponse le temps de réponse à 5%, le dépassement maximal et l'erreur statique. Conclure sur la capacité du correcteur à vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

on distingue :

- 1^{ère} phase (accélération constante entre 0 et 320 ms) : l'angle α est perturbé mais maintenu proche de 0 par l'asservissement.
- 2^{ème} phase (vitesse constante à partir de 320 ms) : l'angle α est ramené à 0 par l'asservissement.



On trouve :

- Temps de réponse : $t_{r5\%} = 35 \text{ ms} < 200 \text{ ms}$;
- Erreur statique due à la perturbation : $2,4 \times 10^{-3} \circ < 0,5^\circ$;
- Dépassement de la valeur finale : $4 \times 10^{-4} \circ < 1^\circ$, dépassement de la valeur visée : $2,8 \times 10^{-3} \circ$.

Ainsi le cahier des charges est respecté.

Exercice 3 : Correcteur à avance de phase

Q 20 : Le système est-il stable?

Oui car le gain en décibel pour la pulsation $\omega_{\varphi 180}$ est inférieur à 0 dB

Q 21 : Si oui, donner la marge de phase et de gain.

Sur la figure on relève approximativement :

$$\left\{ \begin{array}{l} M\varphi^\circ \approx 35^\circ \\ \Delta G \approx 10 \text{ dB.} \end{array} \right.$$

Par le calcul, on trouve, en résolvant :

$$\varphi(\omega_{\varphi 180}) = -\pi = -\frac{\pi}{2} - \arctan(2\omega) - \arctan(0,2\omega)$$

Ce qui revient à :

$$\frac{\pi}{2} = \arctan(2\omega) + \arctan(0,2\omega)$$

D'où, en utilisant la formule de trigonométrie :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)},$$

$$\frac{2\omega + 0,2\omega}{1 - 0,4\omega^2} = +\infty$$

Ainsi

$$\omega_{\varphi 180} = \sqrt{\frac{1}{0,4}} = 1,58 \text{ rad/s.}$$

On obtient alors la marge de gain :

$$MG = -Gdb(\omega_{\varphi 180}) = 14,8 \text{ dB.}$$

De même trouver ω_{0dB} revient à résoudre :

$$20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$$

D'où,

$$\omega \sqrt{(1 + 4\omega^2)(1 + 0,04\omega^2)} = 1.$$

Cela revient à rechercher les racines de :

$$0,16\omega^6 + 4,04\omega^4 + \omega^2 - 1 = 0.$$

On obtient alors :

$$\omega_{0dB} = 0,62 \text{ rad/s.}$$

On peut alors calculer la marge de phase :

$$M\varphi^\circ = 180^\circ + \varphi(\omega_{0dB}) = 32^\circ.$$

Q 22 : Régler a pour avoir une marge de phase égale à 45° .

On souhaite alors que :

$$\varphi_m + 32^\circ = 45^\circ.$$

D'où,

$$\varphi_m = 13^\circ.$$

$$a = \frac{1 + \sin 13^\circ}{1 - \sin 13^\circ} = 1,58.$$

Q 23 : Donner alors le réglage de T .

Pour maximiser la marge de phase, on ajuste ω_m pour qu'elle coïncide avec la pulsation de gain à $0dB$:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T} = \omega_{0dB}.$$

D'où ,

$$T = \frac{1}{\omega_{0dB}\sqrt{a}} = 1,28 \text{ s.}$$

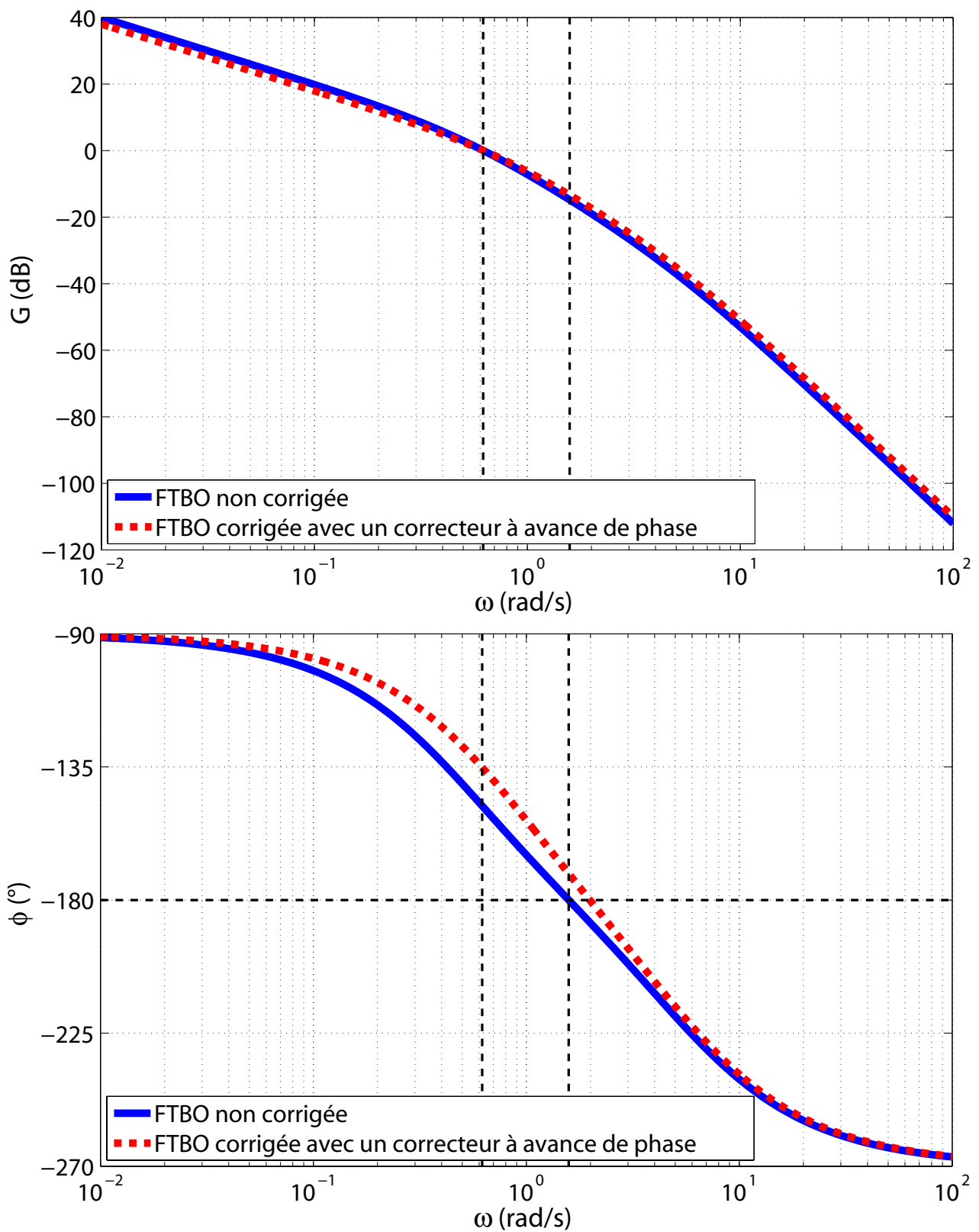
Q 24 : Ajuster le gain proportionnel pour obtenir un gain nul pour la pulsation $\omega = \frac{1}{\sqrt{a}T}$.

On doit résoudre :

$$20 \log(K) + 10 \log(a) = 0 \text{ dB.}$$

Ce qui nous donne :

$$K = e^{-0,5 \ln(a)} = 0,796.$$

FIGURE 10 – Diagramme de Bode de $FTBO(p)$ corrigée