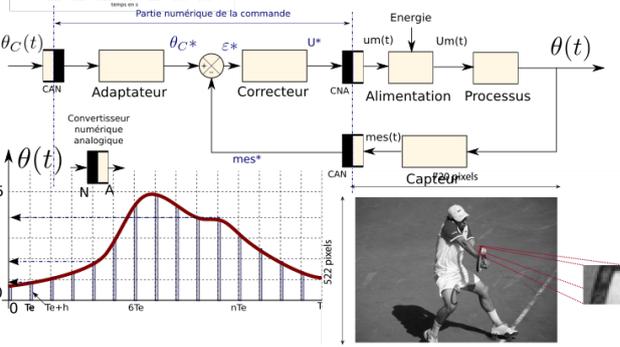


LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C7 : MODÉLISATION DE LA CHAÎNE D'INFORMATION DES SYSTÈMES

TD 17 - Modélisation des systèmes numériques (C7-1)

Compétences

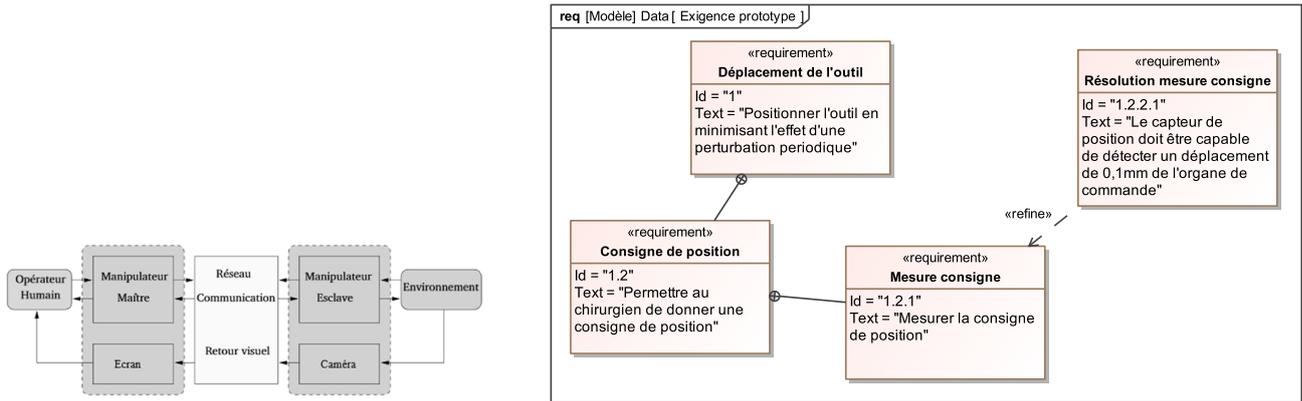
- **Analyser**
 - Identifier et décrire les chaînes fonctionnelles du système.
- **Modéliser**
 - Modéliser un correcteur numérique.
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
 - Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
 - Déterminer la réponse fréquentielle.
 - Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations.
- **Expérimenter**
 - Mettre en œuvre un appareil de mesure adapté à la caractéristique de la grandeur à mesurer.
 - Effectuer des traitements à partir de données.
 - Identifier les erreurs de méthode.

Exercice 1 : Etude de la téléchirurgie par méthode haptique

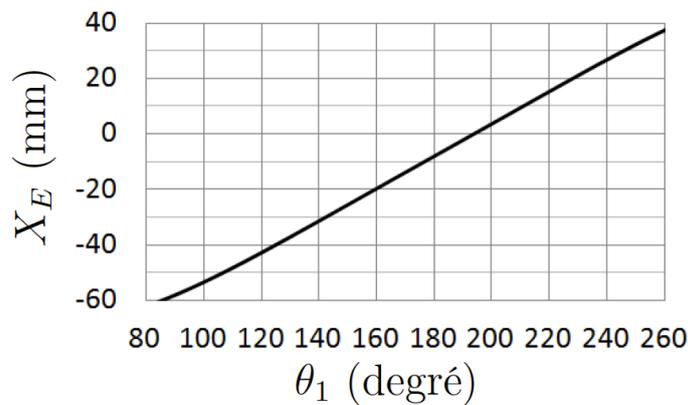
Source : CCP PSI 2015

1 Précision de la méthode de téléchirurgie

On s'intéresse ici à l'exigence 1.2.2.1 concernant la précision de la mesure de position angulaire pour le déplacement de l'outil de téléchirurgie. On note X_E sont déplacement.



La courbe ci-dessous donne l'évolution du déplacement X_E en fonction de la rotation θ_1 du moteur.



Un codeur incrémental est constitué d'un disque comportant 1 ou 2 voies avec éventuellement un index permettant de compter le nombre de tours (voir figure 1). Le disque est lié à l'arbre tournant dont on souhaite connaître la position. D'un côté du disque se trouvent des diodes électroluminescentes et de l'autre, des phototransistors. Chaque voie du disque, excepté l'index, possède des zones alternativement opaques et transparentes. Le signal émis par le phototransistor, après un traitement électronique, est un signal carré de type TTL (train d'impulsions plus ou moins espacées dans le temps).

Le codeur utilisé pour mesurer l'angle moteur θ_1 possède 1 piste de 1 000 fentes et 2 détecteurs décalés d'1/2 fente. On notera A et B les variables logiques associées à ces 2 détecteurs.

Q 1 : Sachant qu'une mesure est réalisée sur chaque front montant (passage de 0 à 1 d'une variable) et front descendant (passage de 1 à 0 d'une variable), déterminer la résolution du codeur. Vérifier la satisfaction de l'exigence « Résolution mesure consigne »

2 Modélisation de la perturbation liée à l'environnement

Afin de modéliser la pénétration de l'aiguille dans les tissus, un essai a été réalisé sur l'organe d'un porc. La figure 2 page suivante montre le profil d'effort lors d'une insertion d'aiguille robotisée sur le foie d'un porc vivant anesthésié. Le déplacement du robot est représenté en pointillé et la force mesurée selon l'axe de l'aiguille en trait plein.

Q 2 : En considérant uniquement la fin de la phase d'insertion, justifier le choix de modéliser (en première approche) l'effort de pénétration d'une aiguille dans un tissu par une fonction linéaire : $f_e(t) = k_e \cdot x_e(t)$. Évaluer la valeur de k_e .

Dans la suite du sujet, nous prendrons : $f_e(t) = k_e \cdot x_e(t)$ avec $k_e = 200 N \cdot m^{-1}$ qui correspond à une moyenne sur plusieurs organes.

Afin de modéliser les mouvements dus à la respiration d'un patient, des mesures ont été effectuées (figure 3). Elles représentent la position $x_e(t)$ de la partie supérieure de l'organe à opérer en fonction du temps.

Q 3 : Justifier la modélisation du déplacement par la fonction : $x_e(t) = A \cdot [-1 + \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)]$ et donner les valeurs de A et f. En déduire l'expression de $f_e(t)$.

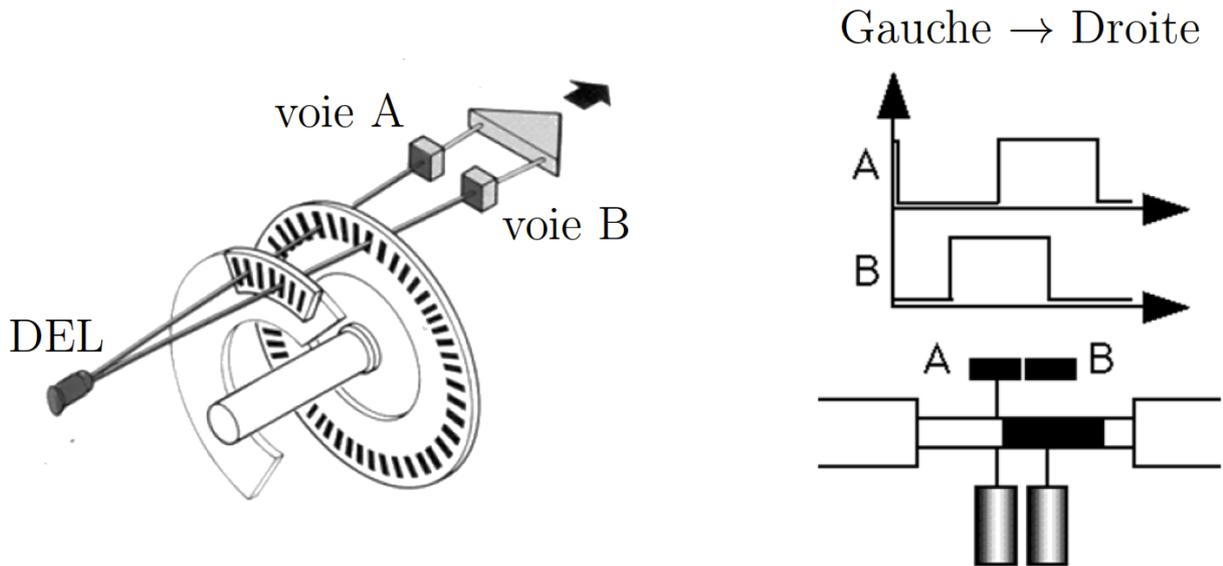


FIGURE 1 – Principe de fonctionnement d'un codeur

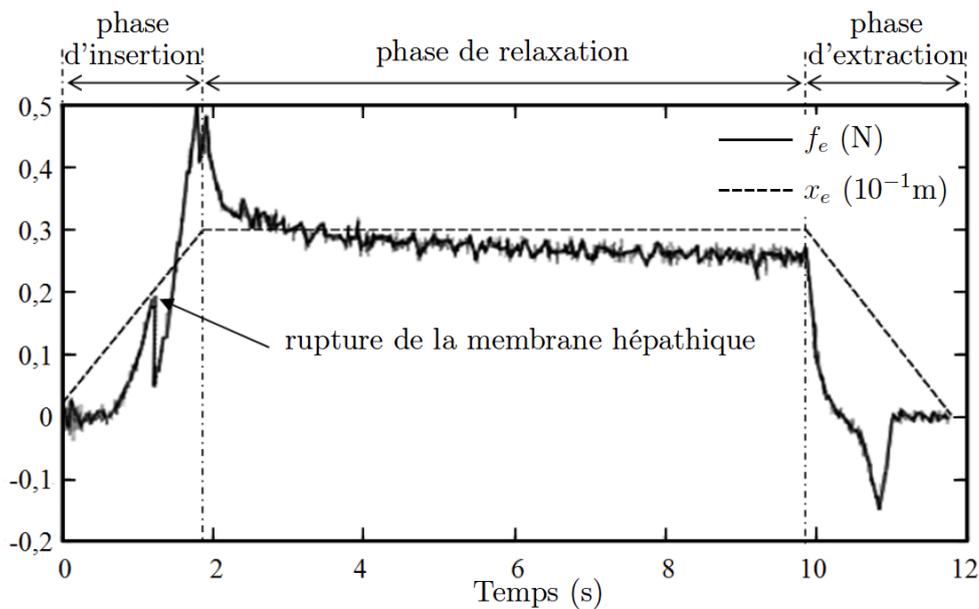


FIGURE 2 – Pénétration d'une aiguille dans le foie d'un porc

Pour simuler ce mouvement respiratoire, un dispositif composé d'un moteur linéaire, d'un ressort et d'un capteur d'effort est ajouté en sortie du manipulateur esclave (figure 4).

Les performances de l'asservissement dépendent (entre autres) de la qualité de la chaîne d'acquisition. Cela passe notamment par le réglage de la fréquence d'échantillonnage et la quantification du convertisseur analogique numérique (figure 5).

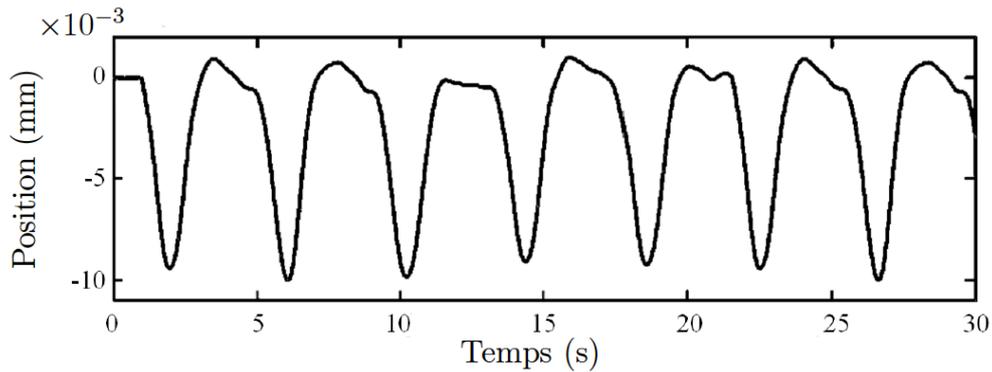


FIGURE 3 – Mouvement respiratoire

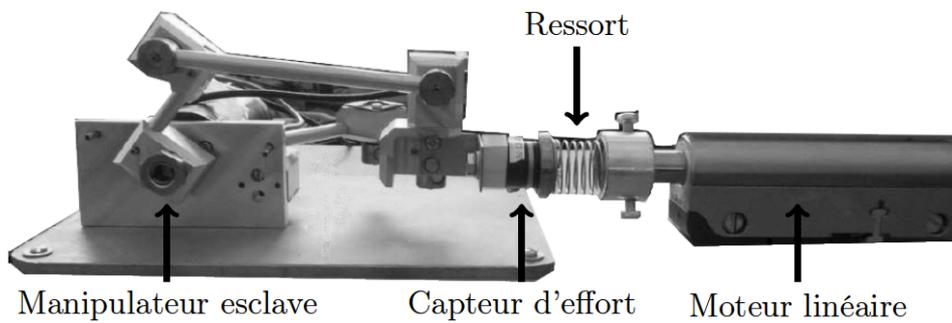
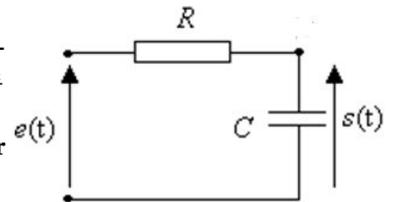


FIGURE 4 – Manipulateur esclave associé au dispositif de simulation du mouvement respiratoire



FIGURE 5 – Schéma de la chaîne d'acquisition

Q 4 : Il est nécessaire d'ajouter un filtre avant la Conversion Analogique Numérique. Ce filtre « anti-repliement » est généralement réglé à la fréquence $f_0 = \frac{f_{ech}}{2}$ où f_{ech} est la fréquence d'échantillonnage qui est ici de 50 Hz. Calculer le produit RC du filtre passe-bas schématisé sur la figure ci-contre pour que sa fréquence propre soit f_0 .



Dans une chaîne de traitement numérique du signal, l'échantillonnage est généralement suivi par une opération de quantification. La quantification est l'approximation de chaque valeur du signal $s(t)$ par un multiple entier d'une quantité notée q et appelée « pas de quantification »; ce pas est directement lié au nombre de bits du convertisseur analogique numérique « N » et à la plage de tension du convertisseur « A » par la relation $q = \frac{A}{2^N}$ en volts/bit.

Le signal quantifié $s_q(t)$ diffère du signal d'origine par un terme d'erreur $e(t)$ selon l'expression $s(t) = s_q(t) + e(t)$. Ce terme d'erreur $e(t)$ est appelé bruit de quantification. Il traduit l'écart entre les signaux quantifiés et non quantifiés.

Q 5 : La plage de tension du convertisseur étant de 5V, calculer le nombre de bits N nécessaires pour avoir une

erreur $e(t)$ de 0,005V maximum.

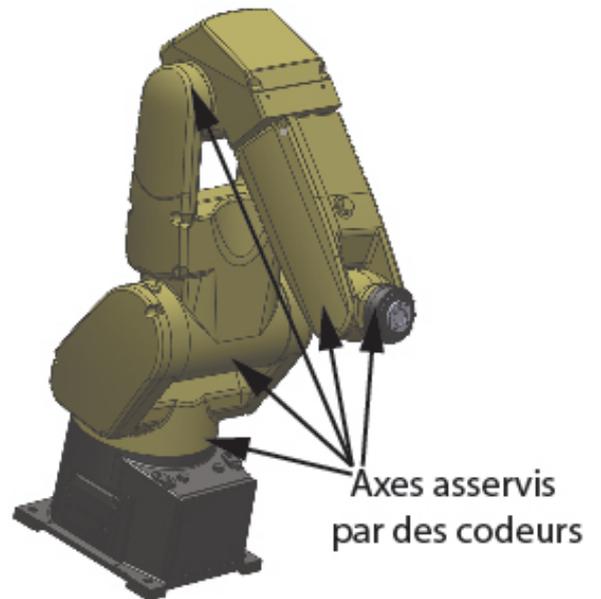
Exercice 2 : Codeur (cheville robot NAO)

Source : Emilien DURIF

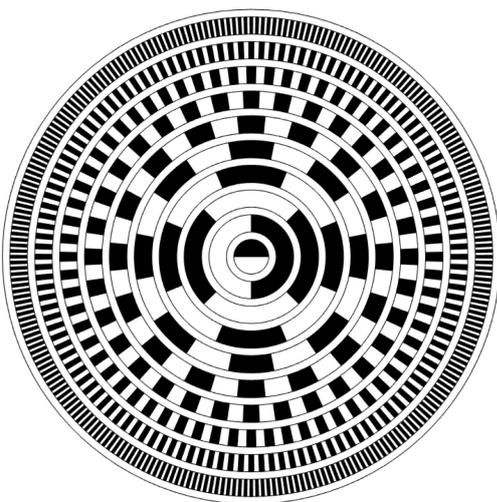
1 Commande d'un robot anthropomorphe : codeur de position absolue et transcodage Gray-binaire

L'entreprise FANUC développe des robot de type anthropomorphe destiné à l'industrie de pointe. L'illustration ci-dessous présente un robot 5 axes. Afin de garantir une stabilité dans le mouvement du robot l'ensemble des actionneur sont asservis à l'aide de capteurs d'angles de rotation. L'objectif ici est de comparer deux solutions techniques :

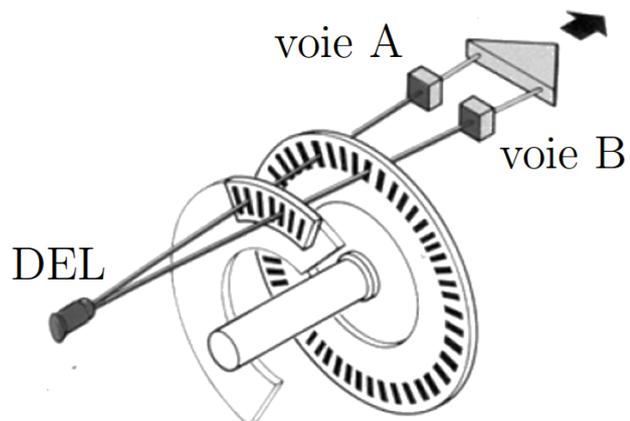
- codeur incrémental relatif;
- codeur absolu;



Les moteurs peuvent atteindre 5000 tr/min. On souhaite une précision de $0,1^\circ$ sur chaque moteur.



Codeur absolu 10 pistes



Codeur relatif 2 pistes

a) Utilisation d'un codeur absolu

On étudie ici le codage d'un capteur angulaire du type codeur absolue. Il permet de mesurer la position angulaire dans un repère absolu d'un axe en rotation sur une plage angulaire d'un tour. Il est constitué de n pistes transparentes qui sont liées à l'axe en rotation. Chacune de ces piste est liée à une fourche optique constituée de LED qui délivre une information vrai (1) si la lumière passe de part et d'autre de la piste.

Le codage des pistes est réalisé en code binaire réfléchi (ou Gray) afin d'éviter les risque de mauvaise lecture en cas de mesalignement des n fourches optiques.

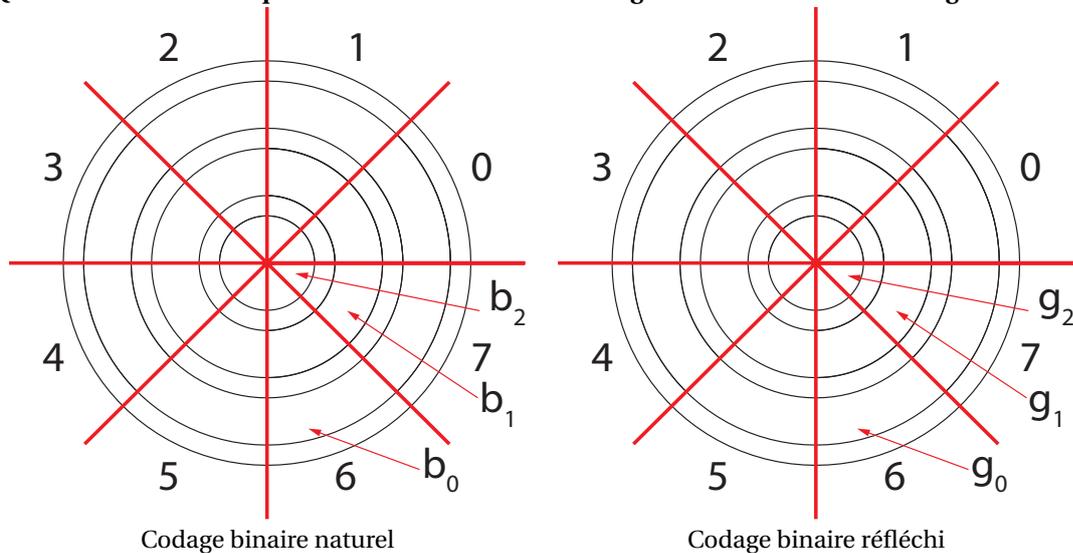
On note :

- G , le mot binaire renvoyé en code Gray, composé de 3 bits : $G = (g_2 g_1 g_0)$;
- B , le mot binaire recherché correspondant au numéro de secteur angulaire codé en binaire naturel, composé également de 3 bits $B = (b_2 b_1 b_0)$.

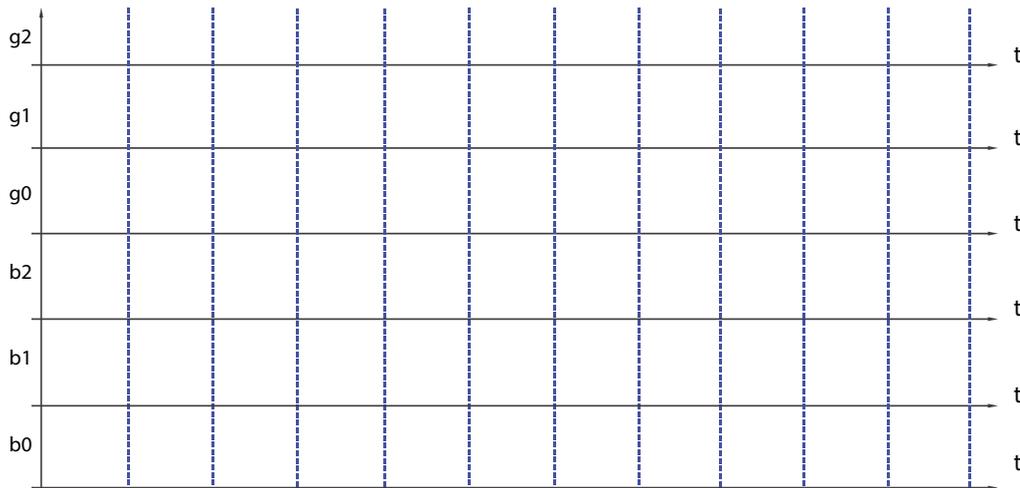
Q 6 : Compléter la table de vérité suivante donnant le codage binaire réfléchi et binaire naturel sur 3 bits.

Numéro de secteur	Codage binaire réfléchi			Codage binaire naturel		
	g_2	g_1	g_0	b_2	b_1	b_0
0	?	?	?	?	?	?
1	?	?	?	?	?	?
2	?	?	?	?	?	?
3	?	?	?	?	?	?
4	?	?	?	?	?	?
5	?	?	?	?	?	?
6	?	?	?	?	?	?
7	?	?	?	?	?	?

Q 7 : Griser les deux disques suivants en utilisant le codage binaire naturel et le codage binaire réfléchi.



Q 8 : Le disque tourne dans le sens horaire et il y a un changement d'état à chaque unité de temps. Compléter les chronogrammes des informations logiques g_2, g_1 et g_0 puis ceux de b_2, b_1 et b_0 .



Q 9 : Conclure sur l'intérêt du code réfléchi, notamment lorsqu'une des LED de la rampe est décalée.

Afin de décoder l'information, il est nécessaire de décoder l'information renvoyée par le codeur absolu. Il est nécessaire de réaliser un transcodeur pour passer du code Gray au code binaire naturel.

- Soit G , le mot binaire renvoyé en code Gray, composé de 3 bits : $G = (g_2 g_1 g_0)$.
- Soit B , le mot binaire recherché correspondant au numéro de secteur angulaire codé en binaire naturel, composé également de 3 bits $B = (b_2 b_1 b_0)$.

Q 10 : Exprimer les fonctions logiques b_2 , b_1 et b_0 en fonction de g_2 , g_1 et g_0 .

Q 11 : Donner le nombre de pistes pour obtenir la précision souhaitée.

b) Utilisation du codeur incrémental relatif.

On étudie ici la solution d'un codeur incrémental constitué d'un disque muni de deux pistes ainsi que de trois sous-systèmes permettant de repérer les fentes sur les pistes : une DEL et un photorécepteur. Les deux pistes extérieures sont composées de 1000 fentes. Deux photorécepteurs (A et B) détectent le passage des fentes sur cette piste. La piste intérieure est percée d'une seule fente. Le détecteur noté Z permet de détecter le passage de cette fente. Il permet de fixer une référence (POM : Prise d'Origine Machine) permettant alors connaître la position absolue.

Q 12 : Donner la résolution du capteur.

Q 13 : Quelle doit être la fréquence d'échantillonnage minimal du système d'acquisition pour traiter l'information ?

Q 14 : Les deux LED sont décalées « d'un quart de fente ». Réaliser le chronogramme des sorties A et B lorsque le codeur tourne dans le sens direct puis dans le sens indirect. Réaliser un troisième graphe indiquant l'état du compteur.

Q 15 : Expliquer comment détecter le sens de rotation du codeur.

Q 16 : Expliquer comment la gestion des fronts permet d'obtenir une meilleure résolution du codeur.

Corrigé

Exercice 1 : Etude de la téléchirurgie par méthode haptique

1 Corrigé : Précision de la méthode de téléchirurgie

Q 1 : Sachant qu'une mesure est réalisée sur chaque front montant (passage de 0 à 1 d'une variable) et front descendant (passage de 1 à 0 d'une variable), déterminer la résolution du codeur. Vérifier la satisfaction de l'exigence « Résolution mesure consigne »

Ce codeur délivre 4000 impulsions par tour (2 impulsions par fente et par capteur). Il a donc une résolution de $360^\circ/4000 = 0,09^\circ/\text{point}$.

La figure donnant l'évolution de X_E en fonction θ_1 nous donne le coefficient de proportionnalité :

$$\frac{\Delta X_E(\text{mm})}{\Delta \theta_1(^{\circ})} = \frac{38 - (-55)}{260 - 100} = \frac{93}{160} = 0,581 \text{ mm}/^{\circ}$$

Pour une rotation de $0,09^\circ$ du moteur correspond un déplacement du point E de :

$$\Delta X_E(\text{mm}) = 0,581 \text{ mm}/^{\circ} \times 0,09^\circ = 0,052 \text{ mm}$$

Cette valeur est inférieure à $0,1 \text{ mm}$ imposée par l'exigence (id : 1.2.2.1) qui est donc satisfaite.

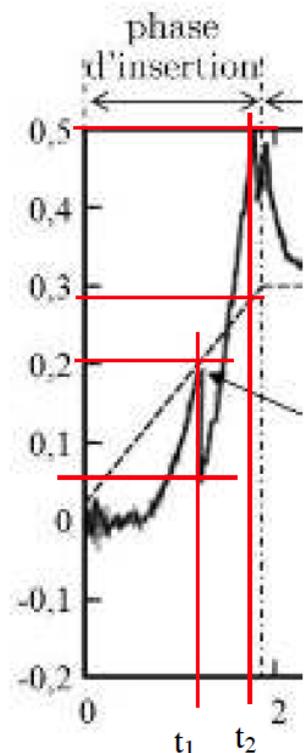
Q 2 : En considérant uniquement la fin de la phase d'insertion, justifier le choix de modéliser (en première approche) l'effort de pénétration d'une aiguille dans un tissu par une fonction linéaire : $f_e(t) = k_e \cdot x_e(t)$. Évaluer la valeur de k_e .

Il faut considérer la figure 2, et la fin de la phase d'insertion. Compte-tenu de ce qui est demandé (relation linéaire), on va retenir la phase entre les instants t_1 et t_2 sur l'extrait de la figure 2 ci-contre. Durant cette phase, les grandeurs f_e et x_e ont toutes deux une évolution linéaire. De plus $x_e = 0$ quand $f_e = 0$. Par suite on peut écrire :

$$k_e = \frac{\Delta f_e(t)}{\Delta x_e(t)} = \frac{f_e(t_2) - f_e(t_1)}{x_e(t_2) - x_e(t_1)}$$

Application numérique :

$$k_e = \frac{0,5 - 0,005}{0,028 - 0,02} = 56 \text{ N/m}$$



Q 3 : Justifier la modélisation du déplacement par la fonction : $x_e(t) = A \cdot \left[-1 + \sin\left(\frac{f \cdot t}{2\pi} + \varphi\right) \right]$ et donner les valeurs de A et f . En déduire l'expression de $f_e(t)$.

L'évolution de $x_e(t)$ est périodique et apparemment sans discontinuité de tangente. On peut donc la modéliser par une sinusoïde. On relève sa période $T = 4,25 \text{ s}$ environ.

Son amplitude est $\Delta x_e = 0 \text{ mm} - (-10 \text{ mm}) = \pm 10 \text{ mm}$.

Sa valeur moyenne est non nulle et on relève $x_{e0} = -5 \text{ mm}$.

Enfin $x_e(0) \neq 0$ donc la fonction sinus possède une phase non nulle à l'origine. D'où l'expression de la fonction

$$x_e(t) = x_{e0} + \frac{\Delta x_e}{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

En remplaçant par les valeurs numériques de déplacement, et $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$, il vient :

$$x_e(t) = -5 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = 5 \cdot 10^{-3} [-1 + \sin(\omega \cdot t + \varphi)]$$

On identifie :

$$\begin{cases} A = 5mm \\ f = \frac{1}{T} \approx 0,24Hz \end{cases}$$

Q 4 : Il est nécessaire d'ajouter un filtre avant la Conversion Analogique Numérique. Ce filtre « anti-repliement » est généralement réglé à la fréquence $f_0 = \frac{f_{ech}}{2}$ où f_{ech} est la fréquence d'échantillonnage qui est ici de 50 Hz.

Calculer le produit RC du filtre passe-bas schématisé sur la figure ci-contre pour que sa fréquence propre soit f_0 .

Le filtre passe-bas RC a pour constante de temps $\tau = RC$. Sa pulsation propre est $\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$ d'où la fréquence propre $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$.

On impose $f_0 = \frac{f_{ech}}{2}$ d'où finalement $\frac{f_{ech}}{2} = \frac{1}{2\pi RC}$

Ainsi

$$RC = \frac{1}{\pi \cdot f_{ech}} = \frac{1}{50 \cdot \pi} = 6,37ms$$

Q 5 : La plage de tension du convertisseur étant de 5V, calculer le nombre de bits N nécessaires pour avoir une erreur $e(t)$ de 0,005V maximum.

Le codage numérique d'une grandeur analogique génère une erreur potentielle majorée par la précision du codage, c'est-à-dire sa résolution. On veut donc que le pas de quantification soit inférieur à l'erreur :

$$q = \frac{A}{2^N} \leq e(t)_{min} = 5 \times 10^{-3}$$

D'où :

$$\frac{5}{2^N} < 5 \times 10^{-3}$$

Ce qui revient à :

$$N > \frac{3 \ln(10)}{\ln(2)} = 9,97$$

On choisit donc $N = 10$

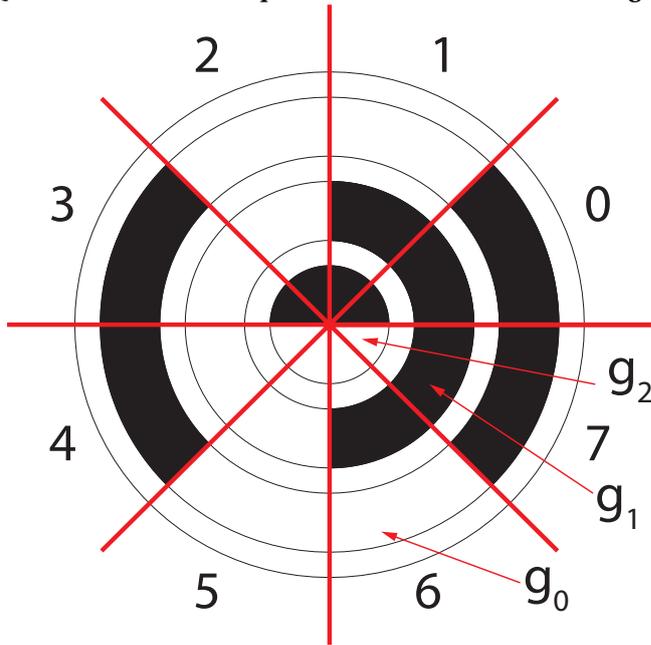
Exercice 2 : Codeur (cheville robot NAO)

2 Corrigé : Commande d'un robot anthropomorphe : codeur de position absolue et transcodage Gray-binaire

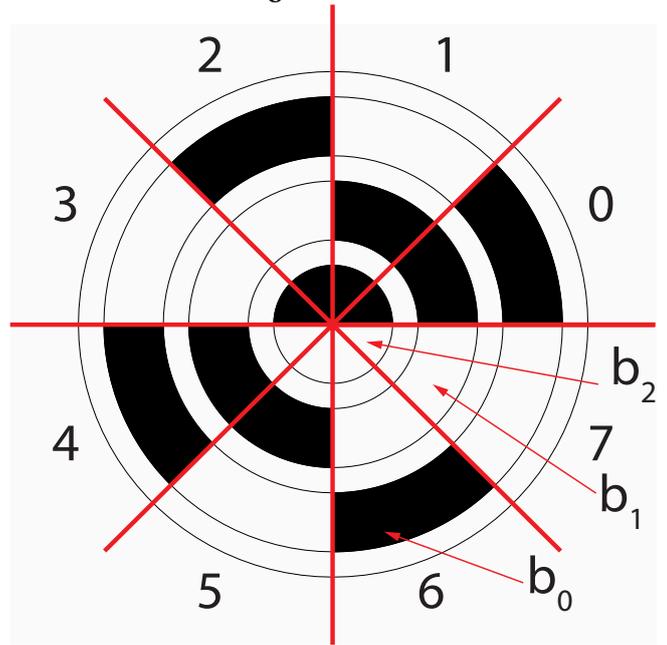
Q 6 : Compléter la table de vérité suivante donnant le codage binaire réfléchi et binaire naturel sur 3 bits.

Numéro de secteur	g_2	g_1	g_0	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	0
5	1	1	1	1	0	1
6	1	0	1	1	1	0
7	1	0	0	1	1	1

Q 7 : Griser les deux disques suivants en utilisant le codage binaire naturel et le codage binaire réfléchi.

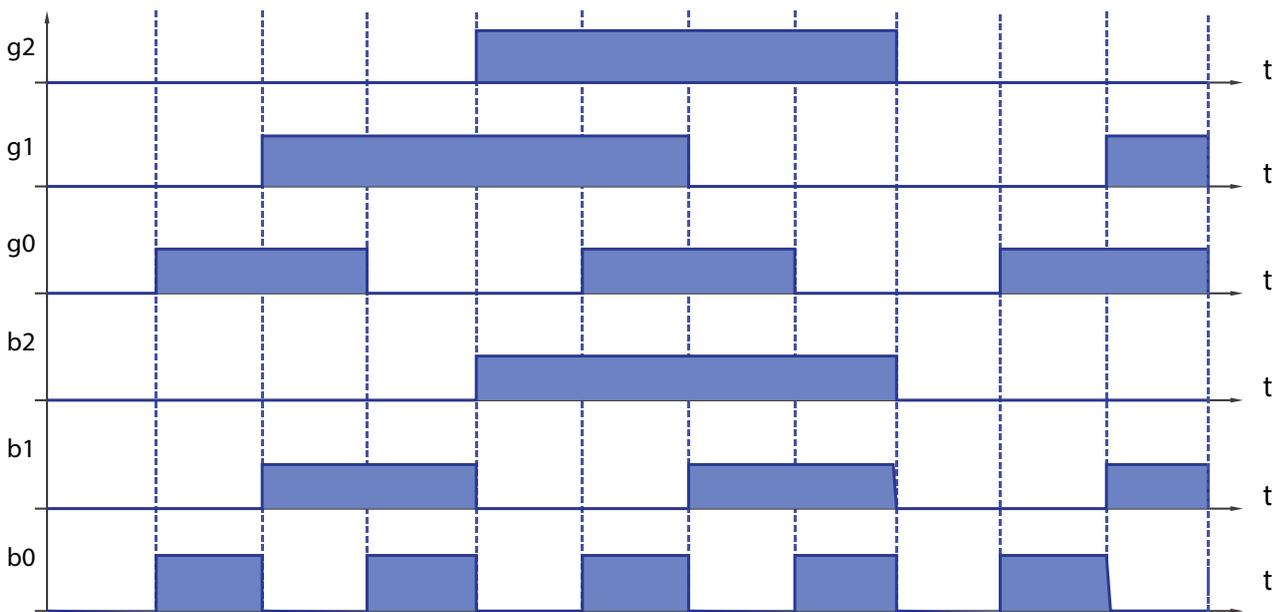


Codage binaire naturel



Codage binaire réfléchi

Q 8 : Le disque tourne dans le sens horaire et il y a un changement d'état à chaque unité de temps. Compléter les chronogrammes des informations logiques g_2, g_1 et g_0 puis ceux de b_2, b_1 et b_0 .



Q 9 : Conclure sur l'intérêt du code réfléchi, notamment lorsqu'une des LED de la rampe est décalée.

Q 10 : Exprimer les fonctions logiques b_2, b_1 et b_0 en fonction de g_2, g_1 et g_0 .

- Pour b_2 : directement : $b_2 = g_2$
- Pour b_1

$$b_1 = \overline{g_2} \cdot g_1 \cdot g_0 + \overline{g_2} \cdot g_1 \cdot \overline{g_0} + g_2 \cdot \overline{g_1} \cdot g_0 + g_2 \cdot \overline{g_1} \cdot \overline{g_0}$$

$$= \overline{g_2} \cdot g_1 \cdot (g_0 + \overline{g_0}) + \overline{g_2} \cdot g_1 \cdot (g_0 + \overline{g_0}) = \overline{g_2} \cdot g_1 + \overline{g_2} \cdot g_1 = g_2 \oplus g_1$$

- Pour b_0

$$b_0 = \overline{g_2} \cdot \overline{g_1} \cdot g_0 + \overline{g_2} \cdot g_1 \cdot \overline{g_0} + g_2 \cdot \overline{g_1} \cdot g_0 + g_2 \cdot \overline{g_1} \cdot \overline{g_0}$$

$$= \overline{g_2} \cdot (\overline{g_1} \cdot g_0 + g_1 \cdot \overline{g_0}) + g_2 \cdot (\overline{g_1} \cdot g_0 + \overline{g_1} \cdot \overline{g_0}) = \overline{g_2} \cdot (g_1 \oplus g_0) + g_2 \cdot g_0 \oplus g_1$$

Q 11 : Donner le nombre de pistes pour obtenir la précision souhaitée.

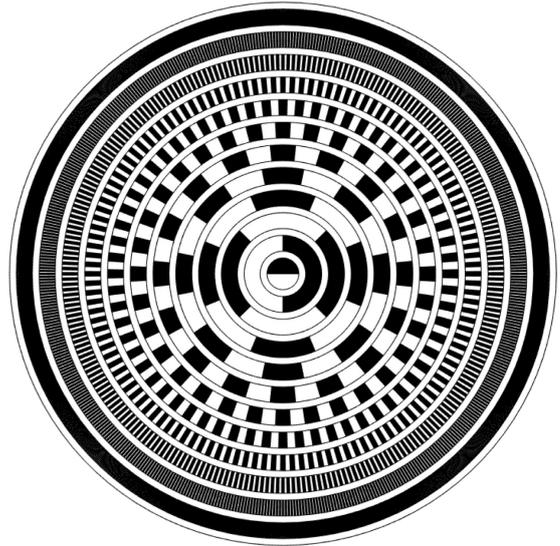
Soit N le nombre de fentes.
La précision est donnée par $360^\circ / 2^N$.
On veut donc

$$\frac{360^\circ}{2^N} < 0,1^\circ$$

On obtient donc :

$$N > \frac{\ln(3600)}{\ln(2)} = 11,81$$

Il faut donc 12 pistes (figure ci-contre)



Q 12 : Donner la résolution du capteur.

On a 2000 fentes et donc 4000 changement d'état du détecteur par tour. La résolution est donc de $0,09^\circ$.

Q 13 : Quelle doit être la fréquence d'échantillonnage minimal du système d'acquisition pour traiter l'information ?

Si on souhaite détecter toutes les positions angulaires d'un tour, on doit donc déterminer 5000×4000 positions en une minute, soient 333 333,333 positions par seconde. La fréquence d'échantillonnage est donc de 333,333 kHz.

Q 14 : Les deux LED sont décalées « d'un quart de fente ». Réaliser le chronogramme des sorties A et B lorsque le codeur tourne dans le sens direct puis dans le sens indirect. Réaliser un troisième graphe indiquant l'état du compteur.

Les signaux sont décalés d'un quart de période

Q 15 : Expliquer comment détecter le sens de rotation du codeur.

Pour un sens de rotation, on peut établir une équation logique à partir de la somme de 4 produits (produit de l'état d'une voie et d'un front montant ou descendant sur l'autre voie?). On obtient une autre équation pour le sens opposé.

Q 16 : Expliquer comment la gestion des fronts permet d'obtenir une meilleure résolution du codeur.

On a « 4 événements » pour un sens de rotation qui permet d'incrémenter ou de décrémenter le compteur ?