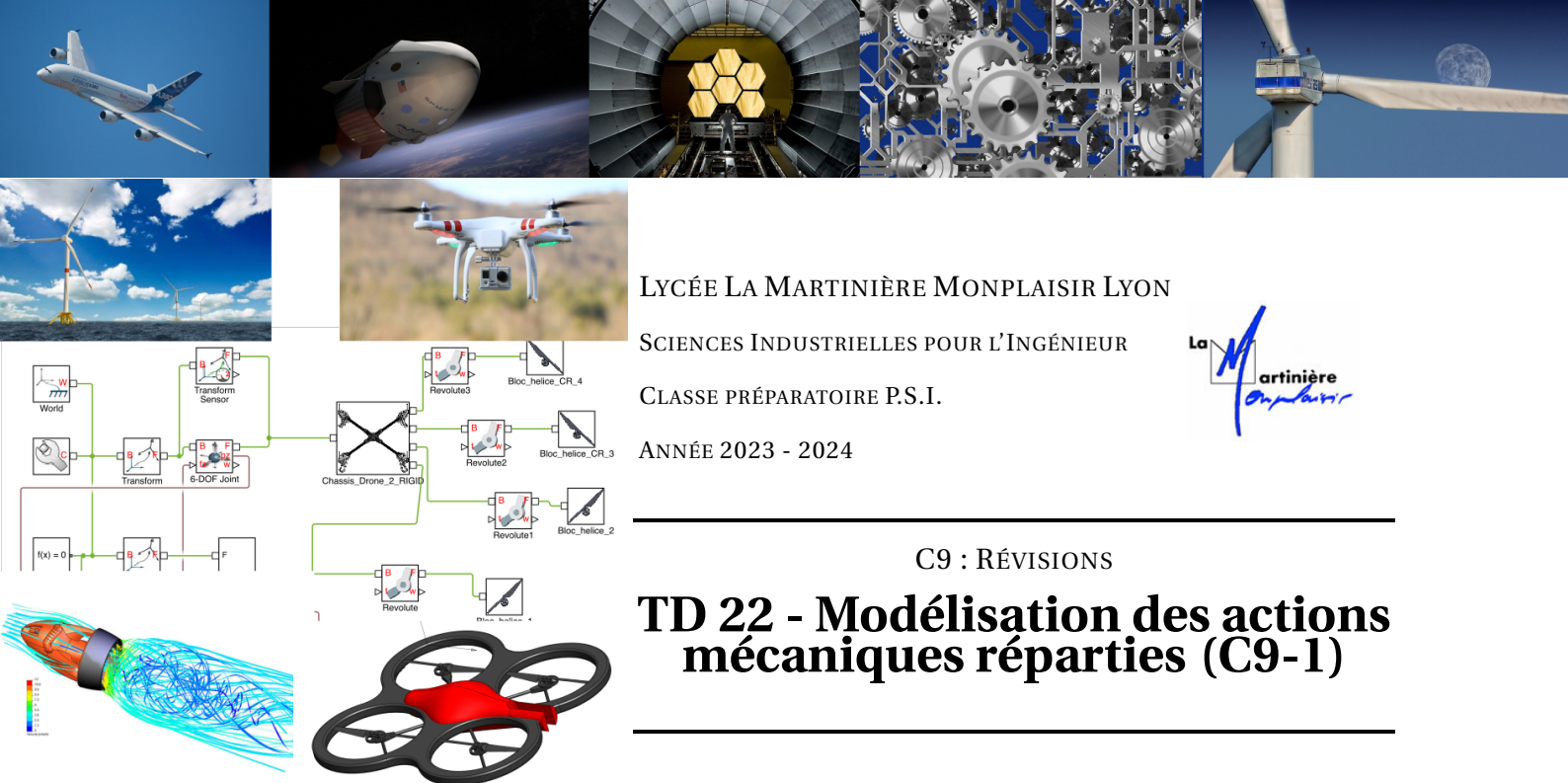




LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C9 : RÉVISIONS

TD 22 - Modélisation des actions mécaniques réparties (C9-1)

Compétences

Exercice 1 : Modélisation d'un support de maintenance de Tramway

Source : CCP PSI 2011 On s'intéresse ici au dimensionnement du système de fixation d'une colonne de levage d'un tramway pour des opérations de maintenance. On souhaite déterminer la surface d'appui du système de fixation.

Le cahier des charges du système permettant de réaliser la maintenance des tramway en soulevant ces derniers est donné en figure 1.

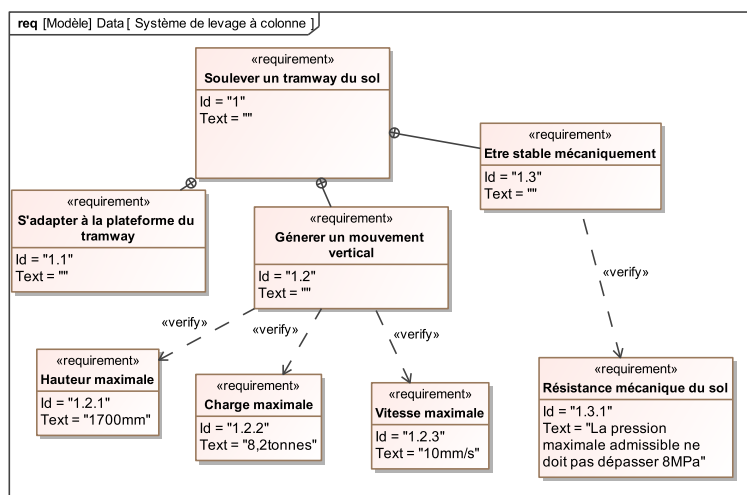


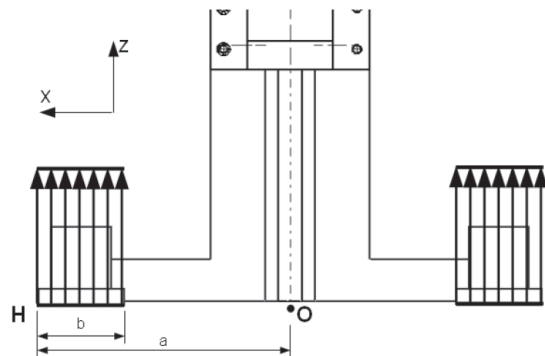
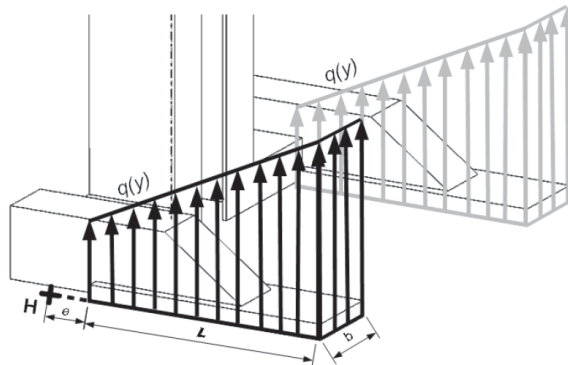
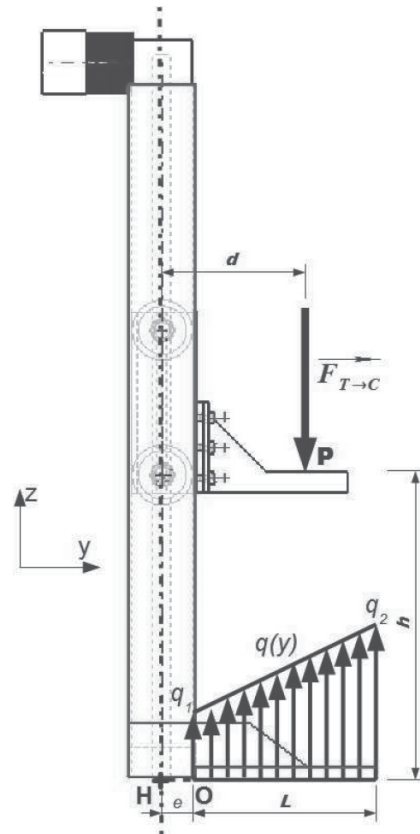
FIGURE 1 – Diagrammes des exigences du système

- Système isolé : colonne entière.
- Le plan yOz est plan de symétrie pour les efforts et la géométrie.
- Le poids des éléments de la colonne est négligé par rapport à la charge à soulever.
- L'action de contact sol/colonne est modélisée par une répartition de pression $q(y)$ variant linéairement entre q_1 et q_2 pour $y \in [e, e+L]$, et restant uniforme selon x , comme indiqué sur les deux figures ?? L'unité de $q(y)$ est le MPa .
- La charge à soulever est modélisée par un glisseur $\vec{F}_{T \rightarrow C}$ dont le support passe par le point P situé à la distance d de l'axe Oz de la vis du chariot.

On souhaite vérifier le critère P_{adm} de non dépassement de la résistance mécanique du sol.

Données géométriques : $L = 600 \text{ mm}$; $b = 200 \text{ mm}$; $d = 480 \text{ mm}$; $e = 110 \text{ mm}$

Charge à soulever : $F_{T \rightarrow C} = 60000 \text{ N}$



a) Questions

Q 1 : En vous appuyant sur la figure précédente donner l'évolution de la répartition de pression $q(y)$ en fonction des paramètres géométriques (e et L) et en fonction de q_1 et q_2

Q 2 : Déterminer l'expression du torseur des actions mécaniques réparties du sol sur la colonne en O.

Q 3 : Montrer que ce torseur est un glisseur.

Q 4 : Représenter le graph de structure du système.

Q 5 : Faire le bilan des actions mécaniques extérieures à la colonne.

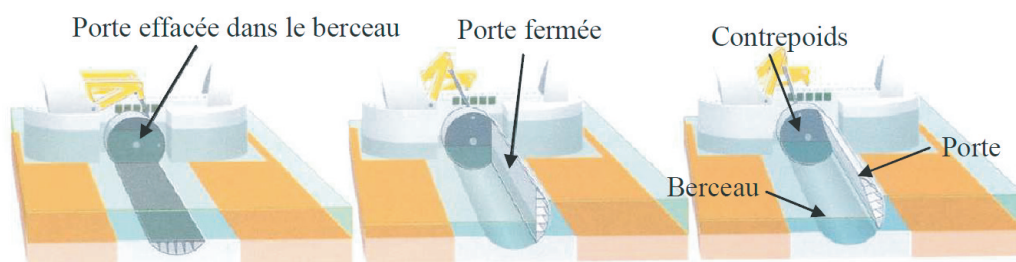
Q 6 : Par application du principe fondamental de la statique à la colonne en O défini par $\vec{HO} = -a \vec{x} + e \vec{y}$, déterminer la valeur de la pression de contact maximale P_{max} entre les pieds et le sol.

Q 7 : Conclure.

Exercice 2 : Barrage sur la Thames

Source : Florestan Mathurin

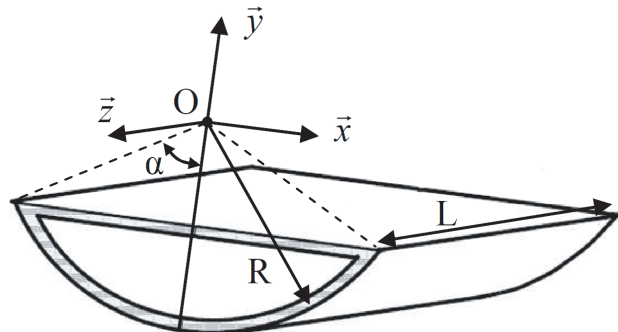
Le Thames Barrier est un barrage spectaculaire conçu pour protéger la ville de Londres des fortes marées qui peuvent remonter de la mer du nord. Sa construction s'est achevée en 1982 et a nécessité 51000 tonnes d'acier et 210000 m^3 , ce qui en fait le 2^{ème} barrage mobile le plus grand du monde. La structure s'étend sur 520 mètres de large et est constituée de 10 portes en forme de secteur angulaire de 20 mètres de haut. Chaque porte est totalement effacée dans un berceau de béton coulé au fond de la rivière. En cas de montée des eaux, les portes pivotent en position verticale actionnées par une machinerie hydraulique.



L'objectif est de déterminer la position du centre de gravité de la porte qui est une structure creuse en tôle épaisse et dont on donne le modèle ci-contre.

Données :

- Longueur porte : $L = 58 \text{ m}$
- Rayon : $R = 12,4 \text{ m}$
- Épaisseur tôle : $e = 0,05 \text{ m}$ (considéré négligeable de R)
- Masse volumique porte : $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$ et $\alpha = \pi/3$.



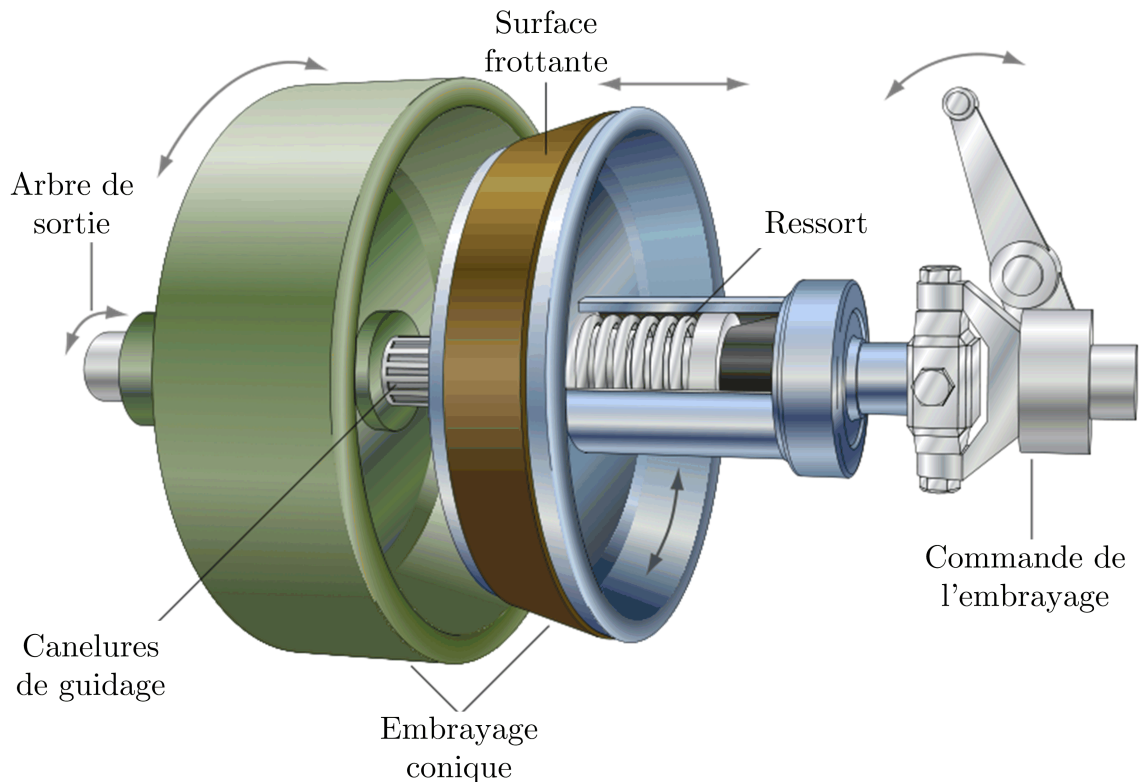
Q 8 : Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la porte.

Q 9 : Donner le torseur de l'action mécanique du poids sur la porte au point O.

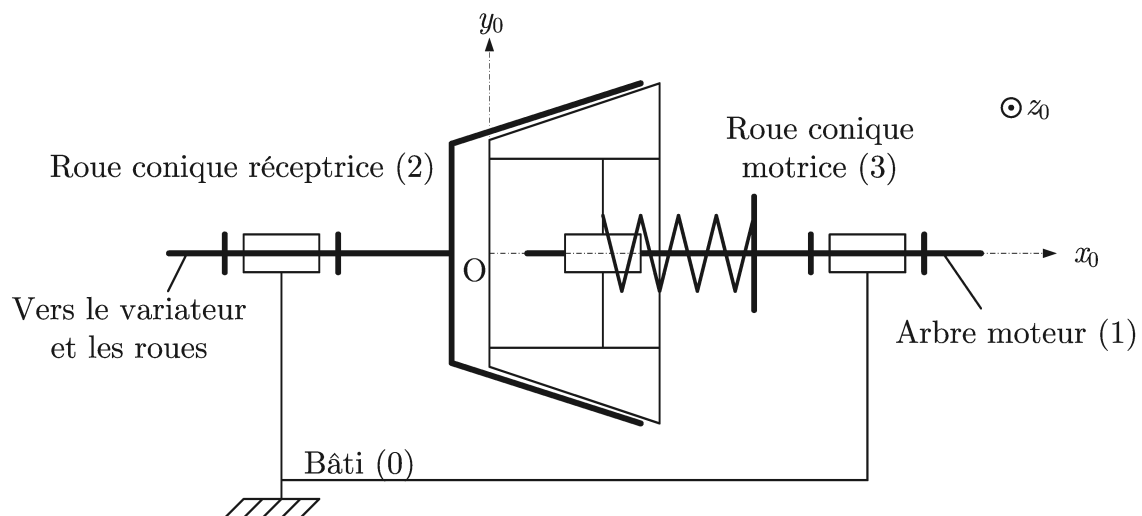
Exercice 3 :

1 Étude d'un embrayage conique

On se propose d'étudier la possibilité de mettre en place un embrayage conique dans le système. l'embrayage a la forme ci-dessous :



Le système d'embrayage conique est modélisé ci-dessous.



Le couple transmis entre les arbres (1) (arbre d'entrée lié au moteur) et (2) (arbre de sortie lié au variateur) est limité par le tarage du ressort et les matériaux en contact à une valeur maximale au delà de laquelle il apparaît du glissement entre les roues coniques (3) et (2) : ce système permet donc la transmission (embrayage) et / ou la limitation de la transmission (limiteur) d'un couple.

Les rayons minimum et maximum de contact entre les deux roues sont notés R_1 et R_2 .

L'angle au sommet du cône est noté 2β . La hauteur du cône est notée H .

Le facteur d'adhérence entre les deux cônes est noté f .

On suppose que $\vec{\Omega}(2/3) \cdot \vec{x}_0 < 0$. On se place à la limite de la rupture d'adhérence entre les deux surfaces coniques.

On note $\vec{\Delta}_P(3 \rightarrow 2)$ la « densité surfacique » (en $N.m^{-2}$ ou Pa) des actions mécaniques de (3) sur (2) en un point P courant de la zone de contact : on a localement un effort $d\vec{F}(3 \rightarrow 2) = \vec{\Delta}_P(3 \rightarrow 2) \cdot dS$ transmis entre (2) et (3).

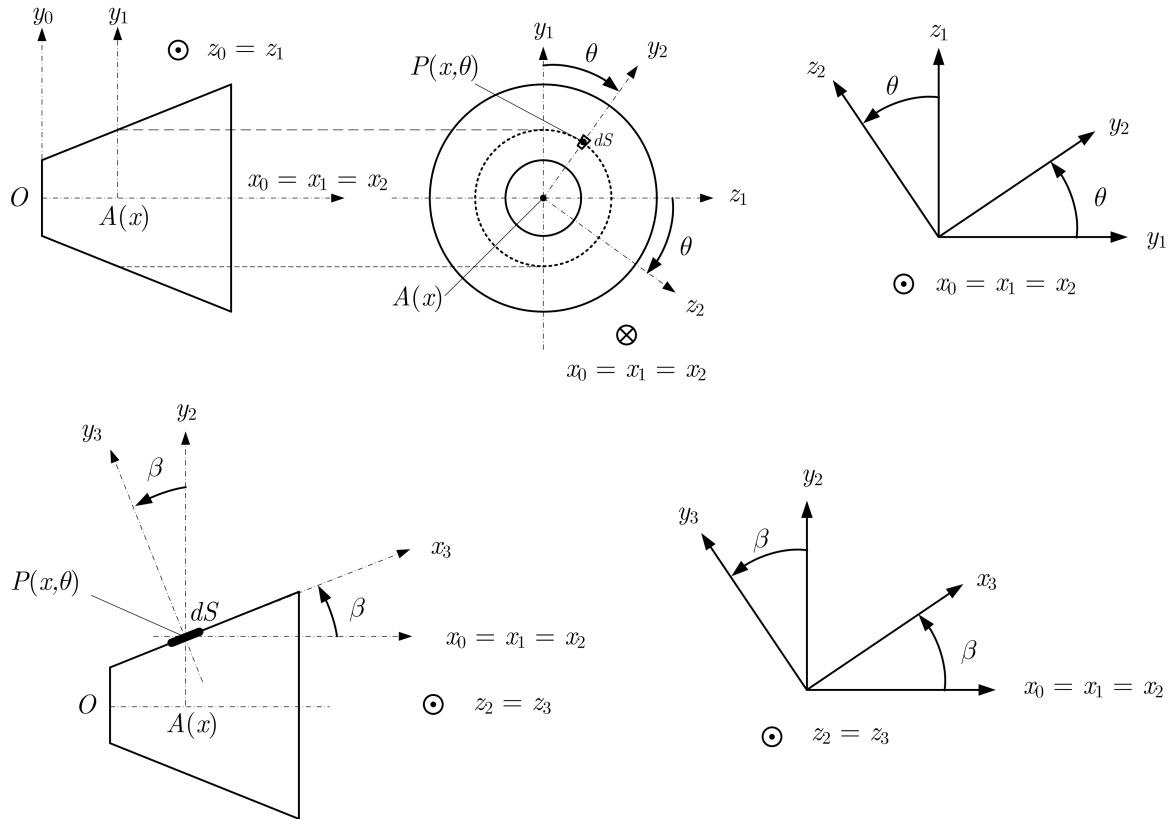
On suppose que les composantes normale et tangentielle de cette densité de forces sont constantes en module quel que soit le point P considéré de la surface de contact conique entre les roues (2) et (3).

On note $\{\mathcal{T}_{(3 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{(3 \rightarrow 2)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{P(3 \rightarrow 2)}} \end{matrix} \right\}$ le torseur des actions mécaniques transmissibles de la roue conique motrice

(3) à la roue conique réceptrice (2).

F est l'effort axial de (3) sur (2) dû au ressort et C est le moment du couple transmis entre (2) et (3).

Paramétrage



Q 10 : Donner la relation entre H , R_1 , R_2 et β .

Q 11 : Paramétrer rigoureusement la position d'un point P quelconque de la surface de contact de la roue (3).

En déduire que l'expression de la surface élémentaire de contact entre les deux roues coniques est $dS = r \cdot d\theta \cdot \frac{dx}{\cos \beta} = r \cdot d\theta \cdot \frac{dr}{\sin \beta}$.

Q 12 : Déterminer l'expression des éléments de réduction du torseur $\{\mathcal{T}_{(3 \rightarrow 2)}\}$ en P à la limite de la rupture d'adhérence entre les deux roues coniques.

Q 13 : En déduire l'expression du torseur $\{\mathcal{T}_{(3 \rightarrow 2)}\}$ en O à la limite de la rupture d'adhérence.

Q 14 : En déduire que le moment maximum C_{Max} transmissible par l'embrayage conique est

$$C_{Max} = \frac{2}{3 \sin \beta} \cdot f \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \cdot F$$

Q 15 : Quel est l'intérêt d'un tel embrayage par rapport à un embrayage classique plan ?

Exercice 4 : Bassin de traction du LHEEA

Source : CCMP 2021 MP

1 Présentation

Le système étudié, nommé bassin de traction, est un des nombreux bassins d'essais du *Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Énergétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA)* situé à Nantes.

Ce bassin de traction mesure 140 m de long, 5 m de large, et a une profondeur constante de 3 m (Figure 2 et en annexe figure c)). Il est équipé d'un chariot de traction pouvant se déplacer dans l'une ou l'autre des directions, avec

des vitesses atteignant jusqu'à 8 m.s^{-1} (Figure 3). À une extrémité du bassin se trouve un batteur à houle permettant de générer des houles unidirectionnelles régulières de hauteur crête-à-croix maximale de $0,5 \text{ m}$. A son autre extrémité, une plage d'amortissement sert à faire déferler les vagues pour limiter leur réflexion dans le bassin.



FIGURE 2 – Bassin de traction

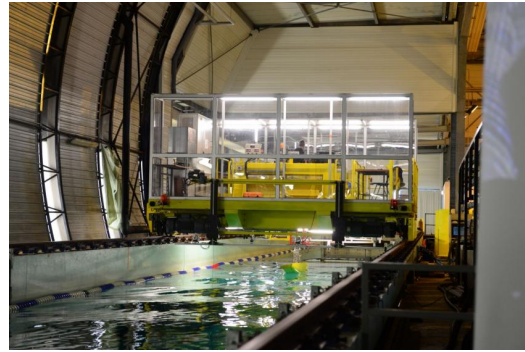


FIGURE 3 – Chariot de traction

Ce bassin, 2^{ème} plus grand bassin de traction en France et le 1^{er} au niveau académique, permet de mener un certain nombre d'expériences :

- études de navires sur eau calme et sur houle;
- tests de résistance à l'avancement de navires avec ou sans houle;
- optimisations de carènes, tenue à la mer de navires ou structures flottantes;
- tests de technologies en Energies Marines Renouvelables.

Il a par exemple servi aux tests menés sur la nouvelle hydrolienne développée par Alstom (Figure 4).

L'industriel a utilisé une maquette de l'hydrolienne sur ce bassin de traction afin d'étudier son comportement pendant la phase de remorquage et, ainsi, vérifier jusqu'à quel état de mer elle pouvait être tracée.

L'analyse fonctionnelle globale de ce bassin est disponible en Annexe (figure b)). Le diagramme des exigences est consultable en Annexe (figure d) et tableau 2).



FIGURE 4 – Maquette de l'Hydrolienne testée par Alstom

2 étude de l'exigence 1.1.1 : « Durée de l'essai »



Objectif 1 :

Choisir un matériau pour la bande de roulement de chaque roue en contact avec le rail, afin de permettre des mesures correctes pendant une durée de mesure t_{acq} donnée.

a) Détermination de l'accélération minimale

Dans un premier temps, on va déterminer l'accélération minimale nécessaire pour que le chariot puisse se déplacer à une vitesse constante $V_m = 8 \text{ m.s}^{-1}$ pendant une durée d'acquisition $t_{\text{acq}} = 10 \text{ s}$.

Modélisation :

Lors d'un essai, le chariot (3) (voir Figure 5) se déplace par rapport au sol (0) en translation rectiligne à une vitesse $V_3(t)$ qui suit une loi de vitesse (Figure 4) découpée en 3 phases :

- première phase : accélération $\gamma = \frac{dV_3(t)}{dt}$ constante ($\gamma > 0$) jusqu'à atteindre la vitesse terminale souhaitée $V_3(t) = V_m$;
- deuxième phase : vitesse terminale conservée pendant la durée de l'acquisition $t_{\text{acq}} = T_2 - T_1$;
- troisième phase : décélération $-\gamma = \frac{dV_3(t)}{dt}$ constante ($\gamma > 0$) jusqu'à l'arrêt complet.

Le profil de vitesse adopté est le suivant :

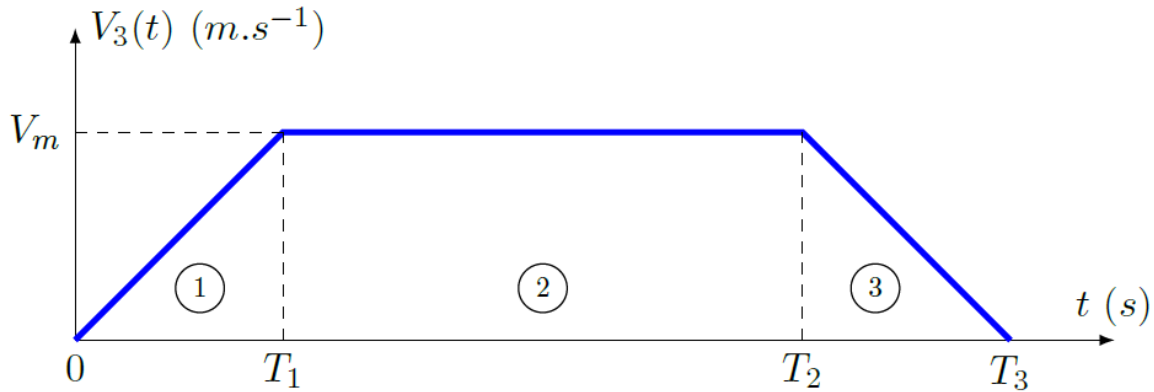


FIGURE 5 – Profil de vitesse souhaité du chariot

termine sa course à une position finale X_f .

Données :

Pour rappel, la longueur complète du bassin est de 140 m. Le chariot doit observer une distance de sécurité à chaque extrémité du bassin. Autrement dit on prendra $X_0 = 10$ m et $X_f = 130$ m.

La vitesse de déplacement du chariot par rapport au sol pendant la deuxième phase sera prise maximale et égale à $V_m = 8$ m.s⁻¹. La durée de l'acquisition sera prise égale à $t_{\text{acq}} = 10$ s.

Q 16 : A partir de la Figure 5, donner l'expression littérale du temps T_1 nécessaire pour avoir $t_{\text{acq}} = 10$ s. En déduire l'expression littérale de l'accélération γ de la première phase en fonction de V_m , t_{acq} , X_0 et X_f . Faire l'application numérique.

3 étude de l'exigence 3 : « Acquérir les données »



Objectif 2 :

Déterminer l'ensemble des composantes du torseur des actions mécaniques de l'eau agissant sur la maquette en déplacement à vitesse stabilisée.

a) Principe de la mesure de l'action de l'eau sur la maquette

La maquette de bateau à étudier et le mât métallique de support forment l'ensemble (5). Cet ensemble est lié à la plateforme (3) par l'intermédiaire du solide (4) et de 6 barres ($\mathbf{B}_1$), ($\mathbf{B}_2$), ..., ($\mathbf{B}_6$) dotées chacune d'un capteur dynamométrique (voir Figure 6 ci-dessous ainsi que les photos en Annexe g)).

Données et hypothèses :

- $OA = OC = OD = a$
- $OB = d$
- $\vec{OL} = -e.\vec{x}_0 + f.\vec{z}_0$
- $\vec{LG}_5 = -\lambda(t).\vec{y}_0$
- Toutes les barres ($\mathbf{B}_i$) ont la même longueur a , et on considérera leur masse négligeable.
- m_4 est la masse du solide (4), de centre d'inertie O.

Les liaisons représentées en A et en C sont constituées chacune de 2 liaisons sphériques concentriques ($\mathcal{L}_{B_1/4}$ et $\mathcal{L}_{B_5/4}$ sphériques en A, et $\mathcal{L}_{B_2/4}$ et $\mathcal{L}_{B_6/4}$ sphériques en C).

Dans toute cette partie, on considérera la plateforme (3) immobile.

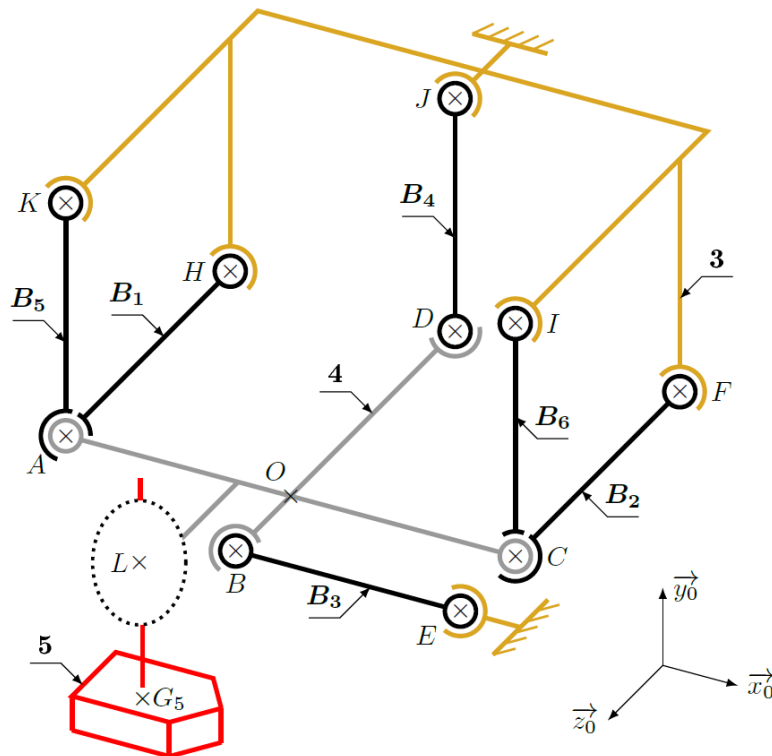


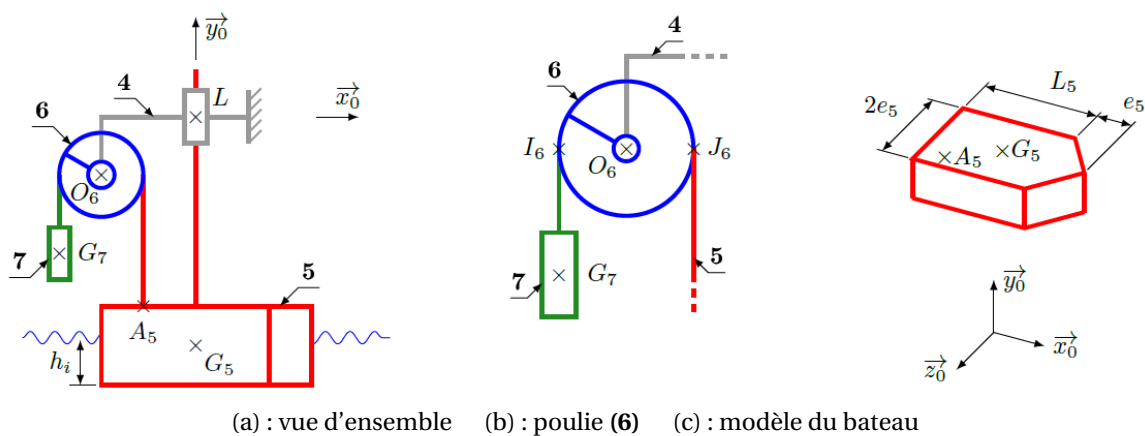
FIGURE 6 – Schéma cinématique 3D du dispositif de mesure

La fonction principale de ce dispositif est de mesurer les actions mécaniques qu'exerce l'eau sur la maquette de bateau. On cherche donc à mesurer à tout instant $\{T_{eau \rightarrow 5}\}$ au point G_5 , centre d'inertie de l'ensemble (5).

b) Réglage de la ligne de flottaison

Dans un souci de polyvalence du banc de mesure, il est nécessaire de pouvoir régler la position de la ligne de flottaison (exigence 3.2.1). De plus, il est important de compenser la présence du dispositif de mesure (exigence 3.2.2), c'est à dire d'annuler l'influence du poids du mât vertical. Un système de poulie avec contrepoids a donc été ajouté pour satisfaire conjointement ces deux exigences (Figure 7).

On note m_5 la masse de l'ensemble (5), considéré homogène et m_7 la masse du contrepoids (7). Connaissant la géométrie de la coque (simplifiée sur la Figure 7), on souhaite pouvoir régler la hauteur immergée h_i .



(a) : vue d'ensemble (b) : poulie (6) (c) : modèle du bateau

FIGURE 7 – Système de réglage de la ligne de flottaison

Hypothèses

- On considère le système à l'arrêt. Ainsi, le solide (4) est immobile par rapport au sol.
- Pour les questions 13 à 15, on considère que le bassin ne génère pas de houle. On admettra alors que la poussée d'Archimède est la seule action mécanique exercée par l'eau sur la maquette. Cette action mécanique sera modélisée par un glisseur passant par G_5 , de direction verticale, dirigée du bas vers le haut et de norme égale au poids du volume d'eau déplacé (volume correspondant au volume de la partie immergée de la maquette).
- Les masses du câble et de la poulie sont négligées. Le câble ne glisse pas sur la poulie, et les brins tendus seront considérés comme inextensibles dans le cadre d'une étude statique. Le câble est lié à la maquette en A_5 .
- On admettra que le brin tendu lié à la maquette exerce sur la poulie l'action mécanique suivante :

$$\{T_{5 \rightarrow 6}\} =_{J_6} \begin{Bmatrix} F_{56} \cdot \vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Données :

- $\vec{I}_6 G_7 = -l_7 \cdot \vec{y}_0$
- $\vec{G}_5 A_5 = -a_5 \cdot \vec{x}_0 + b_5 \cdot \vec{y}_0 + c_5 \cdot \vec{z}_0$
- $\vec{A}_5 J_6 = l_6 \cdot \vec{y}_0$
- R_6 : rayon de la poulie (6)
- ρ : masse volumique de l'eau

Q 17 : En appliquant le Principe Fondamental de la Statique à l'ensemble {6+7}, exprimer F_{56} en fonction de m_7 , g et des paramètres géométriques nécessaires. Préciser la ou les équations utilisées.

Q 18 : Exprimer le torseur modélisant l'action de la poussée d'Archimède sur la maquette $\{T_{eau \rightarrow 5}\}$, au point G_5 , en fonction de L_5 , e_5 , h_i , ρ et g . En appliquant le Principe Fondamental de la Statique à (5), en déduire la hauteur de maquette immergée h_i en fonction de m_5 , m_7 , ρ , e_5 et L_5 .

Q 19 : Montrer que ce dispositif permet à lui seul de satisfaire les exigences 3.2.1 et 3.2.2. L'emplacement du point d'ancrage du câble du contrepoids sur la maquette a-t-il une influence sur la hauteur immergée?

c) Détermination du torseur des actions mécaniques de l'eau sur la maquette

L'objectif de cette étude est de trouver une relation entre les mesures des 6 capteurs dynamométriques et le torseur des actions mécaniques de l'eau sur la maquette (Figure 6 ou Annexe g) et Figure 7), lorsque le bassin génère une houle.

Hypothèses :

- On considèrera dans la partie 3.4 que la plateforme (3) est toujours à l'arrêt. Du fait de la géométrie du mécanisme, (4) est donc immobile par rapport à (3).
- On rappelle que les masses des barres (B_i) seront négligées dans cette étude.
- Le bassin génère maintenant une houle, donc $\lambda(t)$ varie au cours du temps. Conformément au paramétrage de la partie 3.1, on définit alors : $\vec{\Gamma}_{G_5 \in 5/4} = \gamma_5 \cdot \vec{y}_0$ avec $\gamma_5 = -\frac{d^2 \lambda(t)}{dt^2}$
- La modélisation de $\{T_{eau \rightarrow 5}\}$ est maintenant définie par :

$$\{T_{eau \rightarrow 5}\} =_{G_5} \begin{Bmatrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ Z_e & N_e \end{Bmatrix}_{b_0}$$

Q 20 : Réserve 5/2 Sur la base de la Figure 6, on considère le système constitué des solides (3), (4) et des 6 barres (B_i). Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé. Que peut-on en déduire?

En considérant que les distances a_5 et c_5 sont très petites, une étude dynamique préliminaire a permis d'établir que l'action du câble sur la maquette s'écrit en G_5 : $\{T_{6 \rightarrow 5}\} =_{G_5} \begin{Bmatrix} m_7 (g - \gamma_5) \cdot \vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Q 21 : En tenant compte des hypothèses précédentes, déterminer le torseur $\{T_{4 \rightarrow 5}\}$ (exprimé au point L) des actions mécaniques transmises par la liaison glissière entre (4) sur (5) en fonction de X_e , Y_e , ..., N_e et des différents paramètres géométriques. On exprimera le résultat dans b_0 .

Q 22 : Sachant que les coordonnées de $\{T_{4 \rightarrow 5}\}$ seront mesurées par les 6 capteurs dynamométriques de la balance, indiquer s'il est possible de mesurer Y_e avec ce dispositif. Justifier.

On note $F_1, F_2, \dots, F_6$ les valeurs algébriques mesurées par les 6 capteurs ($c_1, c_2, \dots, c_6$), telles que, pour une barre (B_i) de direction $\vec{u}_i$: $\{T_{B_i \rightarrow 4}\} =_{M_i} \begin{Bmatrix} F_i \cdot \vec{u}_i \\ 0 \end{Bmatrix}$ avec le point M_i à choisir parmi les points A, B, C et D.

Q 23 : Montrer que l'action mécanique de la barre (B_1) sur (4) est un glisseur et préciser son axe.

Q 24 : Exprimer en fonction des F_i la forme des torseurs des actions mécaniques suivantes dans la base b_0 : $\{T_{B_1 \rightarrow 4}\}, \{T_{B_2 \rightarrow 4}\}, \{T_{B_3 \rightarrow 4}\}, \{T_{B_4 \rightarrow 4}\}, \{T_{B_5 \rightarrow 4}\}$ et $\{T_{B_6 \rightarrow 4}\}$.

Quels que soient les résultats obtenus précédemment, on admettra pour la suite :

$$\{T_{5 \rightarrow 4}\} =_O \left\{ \begin{array}{cc} X_e & L_e - \lambda(t).Z_e \\ 0 & M_e + e.Z_e + f.X_e \\ Z_e & N_e + \lambda(t).X_e \end{array} \right\}_{b_0}$$

Q 25 : Déterminer les expressions de X_e , Z_e , L_e , M_e et N_e en fonction de F_1 , F_2 , ..., F_6 et des diverses grandeurs géométriques.

Q 26 : Au vu des expressions précédentes, quelle(s) grandeur(s) est-il nécessaire de connaître sur le système pour obtenir à tout instant une mesure de X_e , Z_e , L_e , M_e et N_e ? Proposer un dispositif permettant de connaître cette (ces) grandeur(s) en temps réel.

4 Annexe

a) Annexe 1 : Aide au calcul

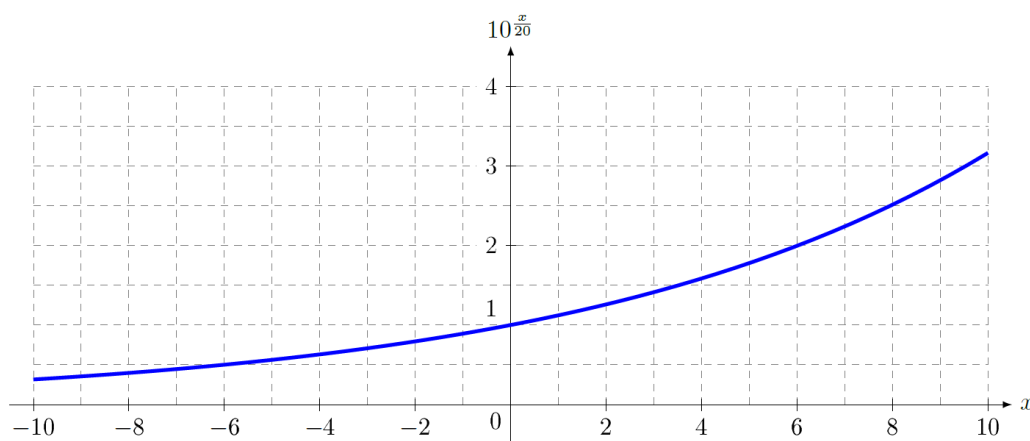


FIGURE 8 – Fonction $f(x) = 10^{\frac{x}{20}}$

b) Annexe 2 : Analyse fonctionnelle

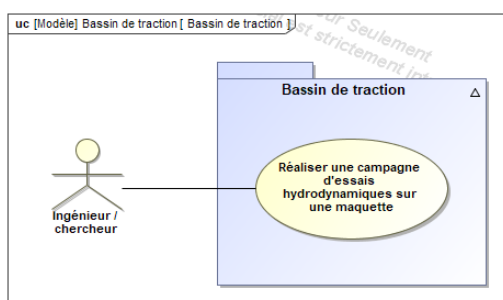


FIGURE 9 – Diagramme de cas d'utilisation

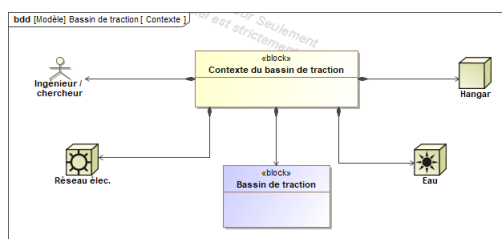
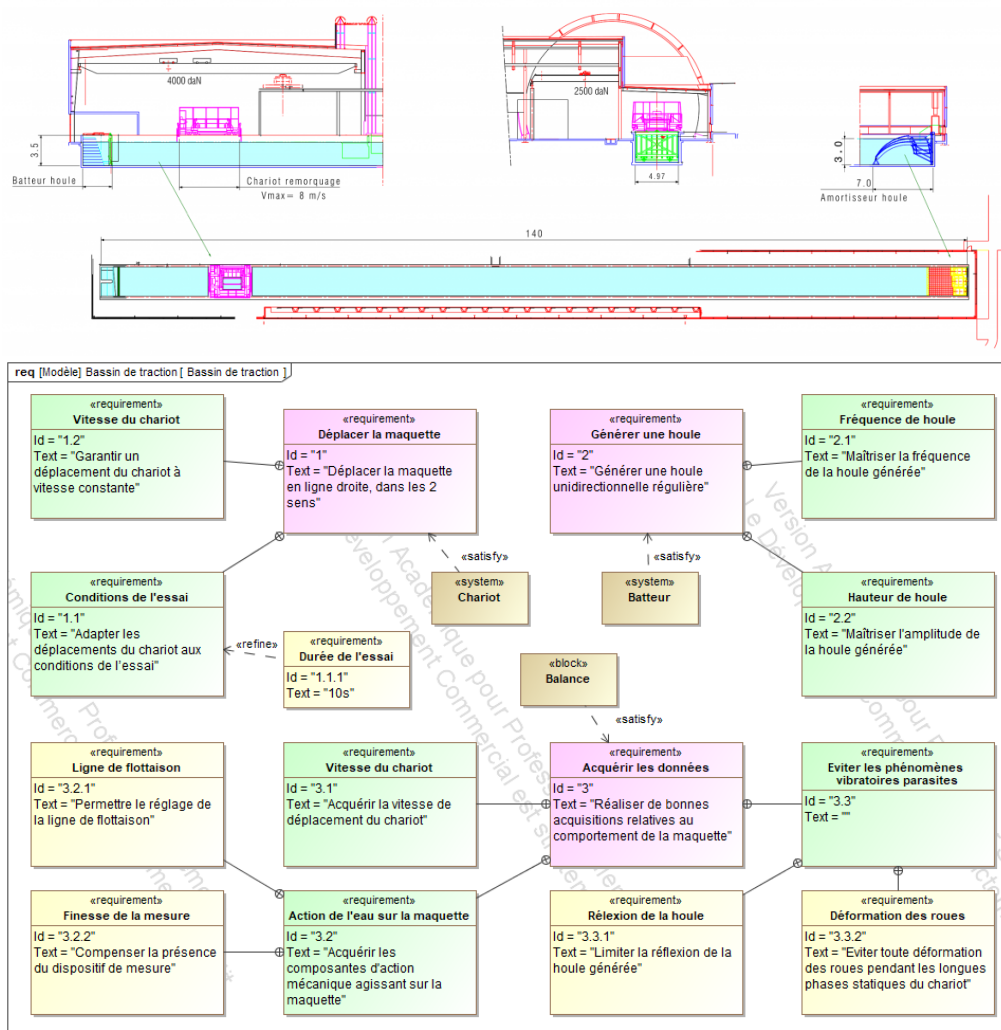


FIGURE 10 – Diagramme de contexte

c) Annexe 3 : Vues du bassin

FIGURE 11 – **Dimensions** : 140 m de long x 5 m de largeur x 3 m de profondeur

d) Annexe 4 : Extrait du recueil des exigences

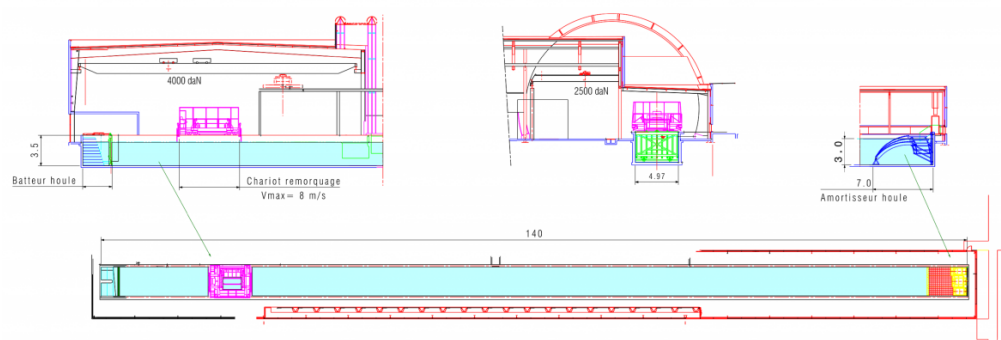


FIGURE 12 – Diagramme des exigences (partiel)

Id	Exigences	Id	Exigences	Niveaux
1	Déplacer la maquette en ligne droite, dans les 2 sens			
1.1	Adapter les déplacements du chariot aux conditions de l'essai	1.1.1	Durée de l'essai	$t_{acq} \geq 10 \text{ s}$
		1.1.2	Distance de freinage	$D_{FU} \leq 10 \text{ m}$
		1.1.3	Glissement de la roue libre sur le rail	Nul
1.2	Garantir un déplacement du chariot à vitesse constante	1.2.1	Rapidité (Temps de réponse à 5%)	$T_{r5\%} \leq 3 \text{ s}$
		1.2.2	Stabilité : Marge de gain Stabilité : Marge de phase	$M_G \geq 12\text{dB}$
				$M_\varphi \geq 45^\circ$
		1.2.3	Précision : Erreur statique avec $V_0 = 8m.s^{-1}$	$\varepsilon_S = 0$
				Précision : Erreur de trainage avec $\gamma_0 = 1,6m.s^{-2}$
		1.2.4	Dépassement en réponse à un échelon de vitesse	$D_{1E} \leq 10\%$
				Dépassement en réponse à un échelon de vitesse
2	Générer une houle unidirectionnelle régulière			
3	Réaliser de bonnes acquisitions relatives au comportement de la maquette			

TABLE 2 – Tableau des exigences (partiel)

e) Annexe 5 : Architecture organique du système

Le bassin de traction est composé d'un bassin rempli d'eau, d'un batteur générant une houle, de deux rails sur lesquels un chariot est mis en mouvement pour générer une vitesse relative d'une maquette par rapport à l'eau.

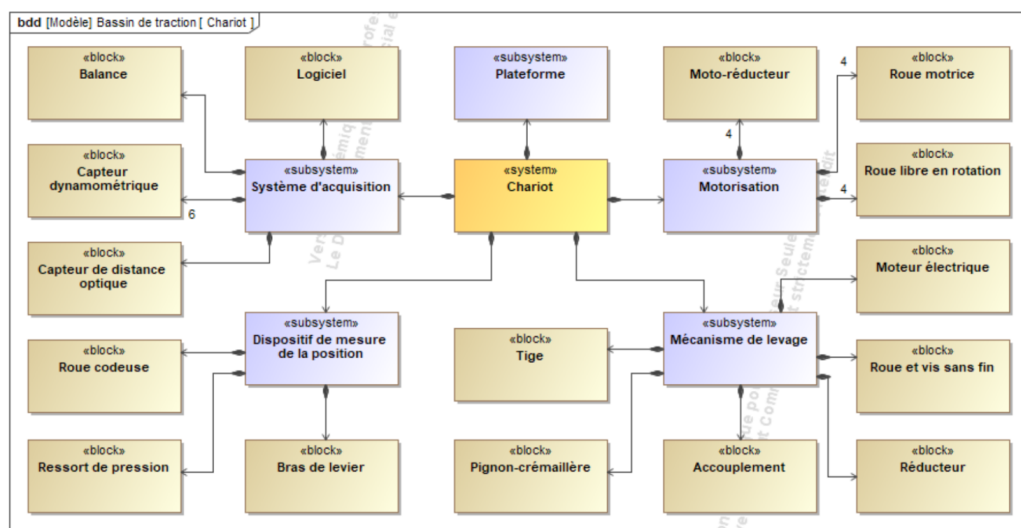
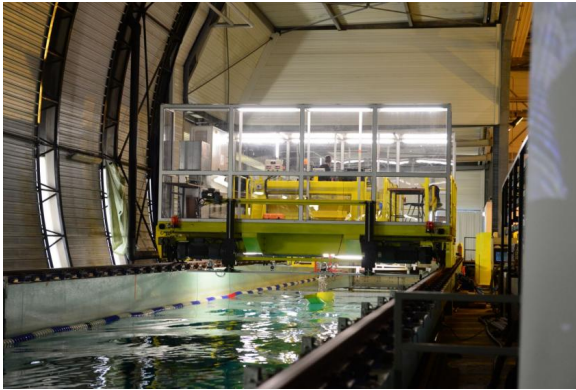


FIGURE 13 – Diagramme de Définition de Blocs du Bassin de Traction

f) Annexe 6 : Modélisation du chariot et de son guidage



La plateforme se déplace sur deux rails (voir ci-contre). Le schéma ci-dessous représente l'architecture du guidage sur un seul rail. Le système est considéré symétrique. Dans tout l'énoncé, on utilisera la base orthonormée directe $b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ comme présentée dans la figure ci-dessous.

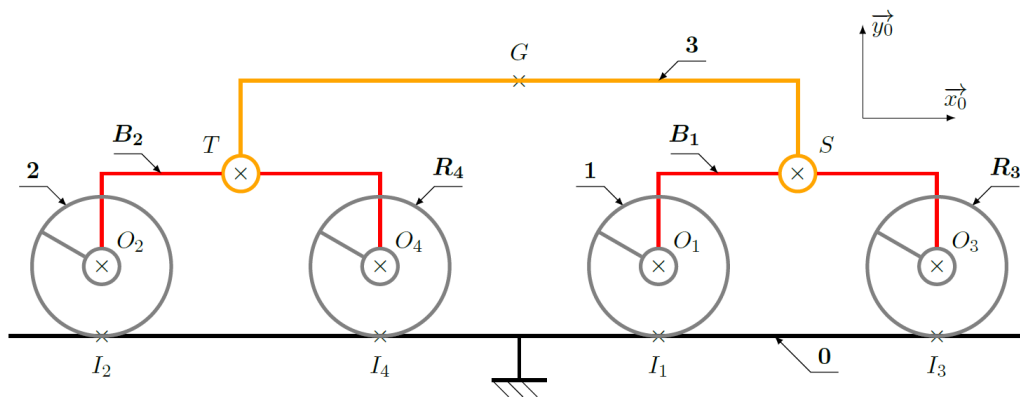
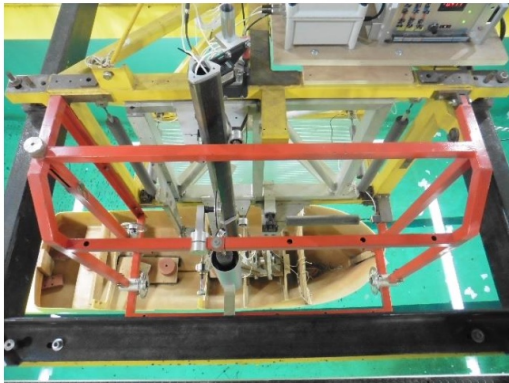
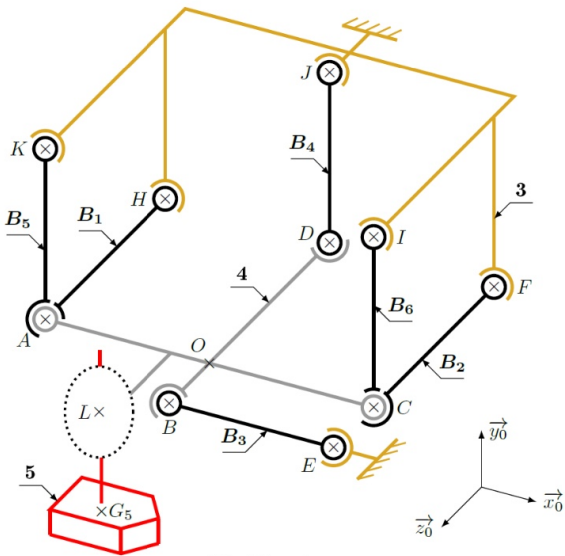


FIGURE 14 – Schéma cinématique complet du chariot

g) Annexe 7 : Dispositif de mesure - photos et modèle retenu



Vue du dispositif réel



Modèle retenu

$OA = OC = OD = a$	$\overrightarrow{LG_5} = -\lambda(t) \cdot \vec{y_0}$
$OB = d$	Toutes les barres (B_i) ont la même longueur a . On considèrera leur masse négligeable.
$\overrightarrow{OL} = -e \cdot \vec{x_0} + f \cdot \vec{z_0}$	m_4 est la masse du solide (4), de centre d'inertie O .



Guidage vertical du mât



Dispositif de contrepoids



Maquette de bateau