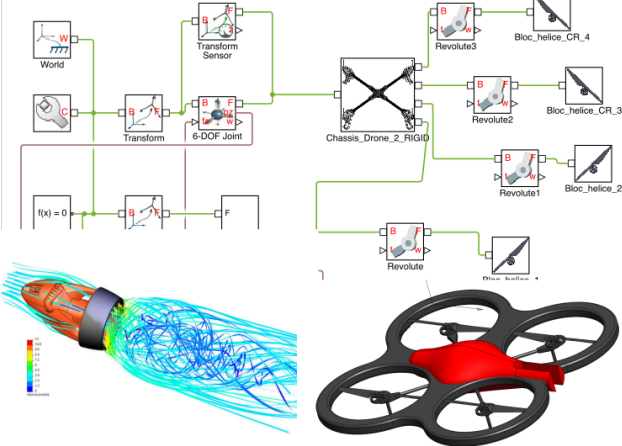


LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C10 : PRÉPARATION AUX ORAUX

TD 24 - Préparation aux oraux (C10-1)

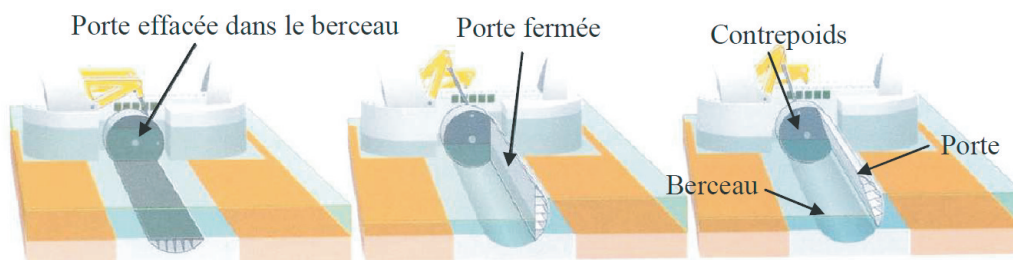
Compétences

- **Analyser**
 - Traduire un besoin fonctionnel en exigences.
 - Définir les domaines d'application et les critères technico-économiques et environnementaux.
 - Qualifier et quantifier les exigences.
 - Évaluer l'impact environnemental et sociétal.
 - Isoler un système et justifier l'isolement.
 - Définir les éléments influents du milieu extérieur.
 - Justifier le choix des constituants dédiés aux fonctions d'un système.
 - Interpréter tout ou partie de l'évolution temporelle d'un système séquentiel.
 - Identifier la structure d'un système asservi.
- **Modéliser**
 - Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
 - Identifier les performances à prévoir ou à évaluer.
 - Identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un modèle.
 - Identifier les paramètres d'un modèle.
 - Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.
 - Compléter un modèle multiphysique.
 - Associer un modèle aux composants des chaînes fonctionnelles.
 - Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
 - Modéliser un système par schéma-blocs.
 - Simplifier un modèle.
 - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
 - Simplifier un modèle de mécanisme.
 - Modifier un modèle pour le rendre isostatique.
 - Décrire le comportement d'un système séquentiel.
 - Préciser les limites de validité d'un modèle.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique.
 - Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
 - Déterminer les actions mécaniques en statique.
- **Expérimenter**
 - Repérer les constituants réalisant les principales fonctions des chaînes fonctionnelles.
 - Identifier les grandeurs physiques d'effort et de flux.
 - Identifier les erreurs de méthode.

Exercice 1 : Barrage sur la Thames

Source : Florestan Mathurin

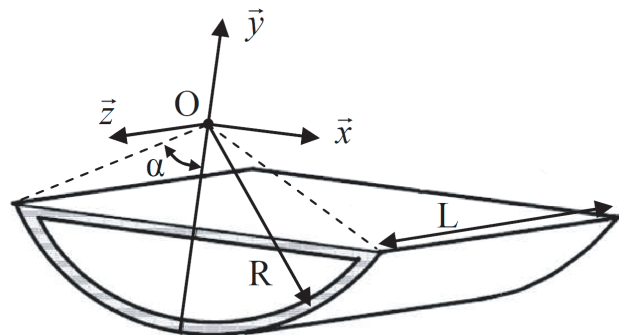
Le Thames Barrier est un barrage spectaculaire conçu pour protéger la ville de Londres des fortes marées qui peuvent remonter de la mer du nord. Sa construction s'est achevée en 1982 et a nécessité 51000 tonnes d'acier et 210000 m^3 , ce qui en fait le 2^{ème} barrage mobile le plus grand du monde. La structure s'étend sur 520 mètres de large et est constituée de 10 portes en forme de secteur angulaire de 20 mètres de haut. Chaque porte est totalement effacée dans un berceau de béton coulé au fond de la rivière. En cas de montée des eaux, les portes pivotent en position verticale actionnées par une machinerie hydraulique.



L'objectif est de déterminer la position du centre de gravité de la porte qui est une structure creuse en tôle épaisse et dont on donne le modèle ci-contre.

Données :

- Longueur porte : $L = 58 \text{ m}$
- Rayon : $R = 12,4 \text{ m}$
- Épaisseur tôle : $e = 0,05 \text{ m}$ (considéré négligeable de R)
- Masse volumique porte : $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$ et $\alpha = \pi/3$.



Q 1 : Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la porte.

Q 2 : Déterminer l'opérateur d'inertie de la porte au centre de gravité.

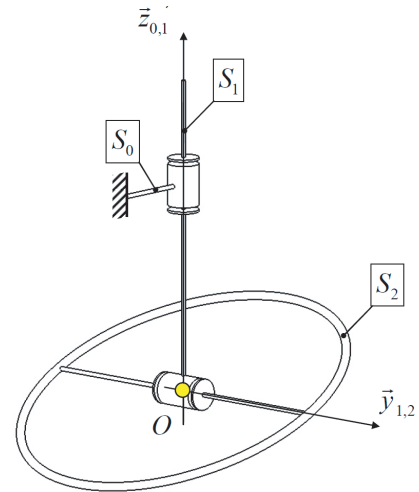
Exercice 2 :

1 Étude d'un tachymètre

a) Repérage - Paramétrage

On propose d'étudier le fonctionnement du mécanisme ci-contre, il est constitué :

- d'un axe d'entrée S_1 , en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_{0,1})$ avec le bâti S_0 :
Paramètre de mouvement 1/0 : $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.
- d'un anneau S_2 , en liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_{1,2})$ avec S_1 :
Paramètre de mouvement 2/1 : $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.



b) Géométrie des masses

- S_1 : masse m_1 et moment d'inertie I par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_{0,1})$. Le centre d'inertie de S_1 se situe sur l'axe $(O, \vec{z}_{0,1})$
- S_2 : masse m_2 centre de masse O et matrice d'inertie en O

$$\bar{I}_0(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Avec $C_2 > A_2$.

c) Actions mécaniques et hypothèses

- Les liaisons pivots 0/1 et 1/2 sont parfaites et le repère R_0 est galiléen.
- Un ressort de torsion (non représenté), monté entre S_1 et S_2 , exerce sur S_2 le torseur couple de moment : $\vec{M}_0(R \rightarrow 2) = -k(\theta - \theta_0)\vec{y}_{1,2}$.
- Un moteur (non représenté), monté entre S_0 et S_1 , exerce sur S_1 un torseur couple d'intensité C_m et tel que $\dot{\psi} = \omega = Cst$.

d) Modélisation et obtention des équations de mouvement

Q 3 : Construire le graph des structure.

Q 4 : Identifier les isollements à effectuer pour obtenir les équations de mouvement.

Q 5 : Écrire les équations de mouvement.

Q 6 : Écrire l'équation donnant la position stationnaire ($\theta = \theta_S = Cste$) et donner le couple moteur correspondant.

Q 7 : Résoudre cette équation en écrivant $\theta_S = \theta_0 + \bar{\theta}_S$ et en supposant $\bar{\theta}_S$ petit.

Q 8 : Préciser en quoi ce mécanisme est un tachymètre.

Q 9 : Que devient θ_S si θ_0 est petit. Le mécanisme est-il toujours un tachymètre ?

Q 10 : En écrivant $\theta = \theta_S + \theta^*$ (θ^* et ses dérivées petits), écrire l'équation linéarisée des petits mouvements en θ^* et donner la pulsation propre ω_0 associée.

Exercice 3 :

Nacelle articule de grande portée

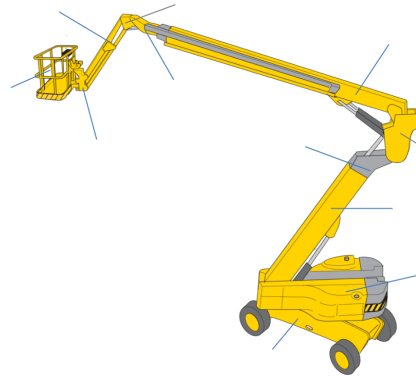


FIGURE 1 – Nacelle de grande portée

La nacelle articulée (Figure 41) étudiée permet de sécuriser des opérations de travail en hauteur.

Cette nacelle s'utilise en extérieur et est adaptée à tous les terrains grâce à ses 4 roues motrices et son essieu oscillant. Elle est principalement utilisée pour : la construction de gros et second œuvre, l'aménagement d'espaces verts, la logistique, la distribution et l'industrie, la maintenance et la restauration.

Son excellente maniabilité lui permet de se rendre dans des zones encombrées et de contourner facilement les obstacles grâce à son bras articulé. Le télescopage du bras et de la flèche permettent d'atteindre des hauteurs de travail très importantes (40 mètres environ).

Les organes d'élévation sont principalement hydrauliques : un ensemble constitué d'une pompe, de distributeurs, et de vérins permet le déplacement du bras, de la flèche et du pendulaire. Le châssis, mobile, est actionné par des moteurs hydrauliques.

Les organes de commande servent à contrôler le déplacement au sol et les mouvements dans l'espace. Le poste de commande principal est implanté dans le panier. Il est utilisé par le conducteur pour la réalisation des mouvements souhaités.

Pour cette étude, une cinématique simplifiée du système est utilisée : le conducteur peut piloter les cinq liaisons pivots définies dans le schéma en de la figure 2, ainsi que les deux liaisons glissière de bras et de flèche.

Il est aussi possible de se déplacer grâce aux roues du châssis sur le sol.

e) Zones d'accessibilité dans le cas où le châssis est fixe

Dans cette partie, le châssis est supposé fixe par rapport au sol et la liaison en A est bloquée. Les mouvements suivants sont pris en compte :

- La rotation associée à la liaison pivot en B entre la tourelle (2) et le bras (3) ; - La rotation associée à la liaison pivot en C entre le bras (4) et la flèche (6) ;
- La rotation associée à la liaison pivot en D entre la flèche (7) et le pendulaire (9) ;
- Les translations associées aux deux liaisons glissières.
- Les rotations associées aux liaisons en B et C sont limitées en amplitude. Les 2 positions extrêmes sont :
- Position « déployée » : la position du bras est celle du de la figure donné dans le document réponse du sujet original, la flèche est verticale.

Dans la configuration de la figure 3 les longueurs du bras et de la flèche sont maximales. On ne s'intéresse qu'à la limite extérieure des zones d'accessibilité.

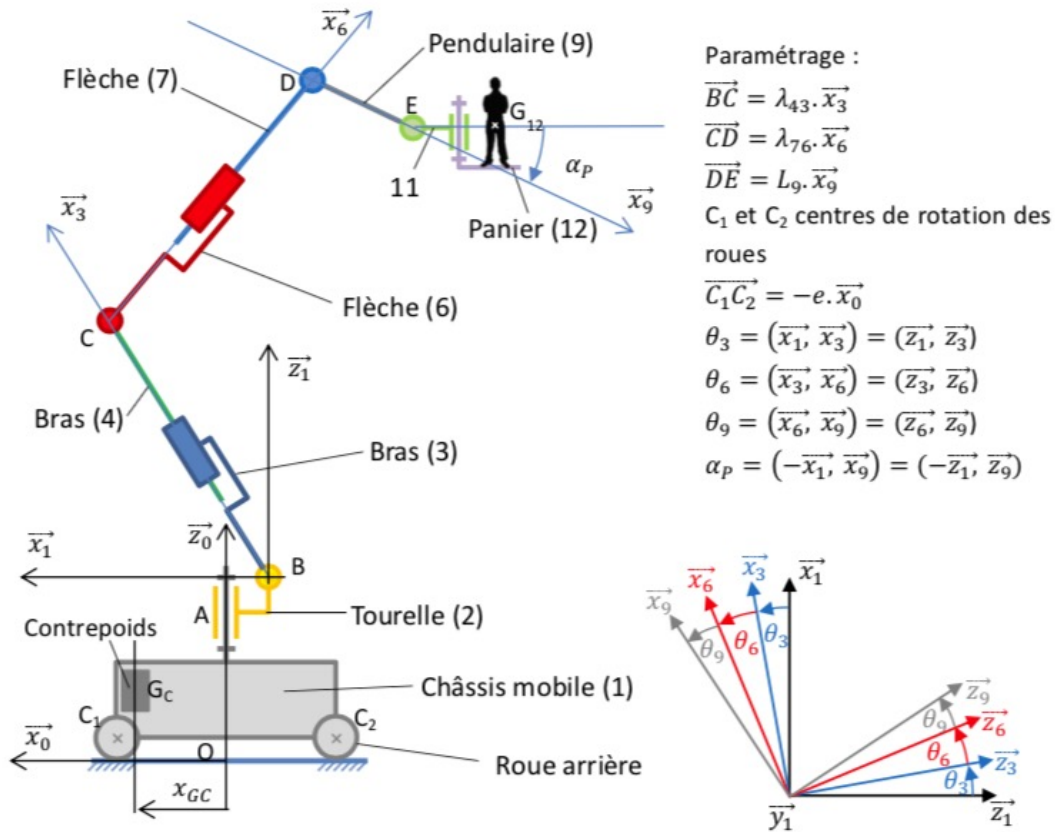
La « *zone d'accessibilité statique* » est la zone d'accessibilité du point E assurant le non basculement de la nacelle, dans le cas où le châssis est immobile.

Le centre de gravité G_E de l'ensemble {châssis (1) avec contrepoids, tourelle (2), bras (3), bras (4)} est situé sur une droite verticale d'abscisse $x_{GE} = 0,3m$ dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$.

Q 11 : A partir des données massiques et dimensionnelles du document réponse DR1 (figure 3) et de l'annexe 1 (figure 2), justifier la position de ce centre de gravité, et donner les limites de cette simplification.

Q 12 : Sur le document réponse DR1 (figure 3), représenter la limite de la zone dans laquelle doit se situer le centre de gravité G_3 de l'ensemble {flèche, pendulaire, panier} pour éviter le basculement. La réponse sera justifiée précisément sur la feuille de copie.

Q 13 : Conclure quant à la zone d'accessibilité statique. Il est possible d'utiliser le document réponse DR1 (figure ?? pour justifier la réponse.



Dimensions et masses

| | Masse et centre de gravité | Dimensions |
|-----------------------------|--|-----------------------------|
| Châssis (1) et tourelle (2) | Ensemble hors contrepoids : Masse : $M_1 = 12$ tonnes Centre de gravité $G_1 : \overrightarrow{OG_1} = h \cdot \overrightarrow{z_0}$ | $h = 1$ m $e = 4$ m |
| | Contrepoids : Masse : $M_c = 4$ tonnes Centre de gravité $G_c : \overrightarrow{OG_c} = x_{GC} \cdot \overrightarrow{x_0} + h \cdot \overrightarrow{z_0}$ | $x_{GC} = 1.8$ m |
| Bras (3+4) | $M_2 = 4,5$ tonnes Centre de gravité G_2 , situé au milieu de [BC] | $\lambda_{43} = 8$ à 18 m |
| Flèche (6+7) | Masse flèche : $m_{67} = 2400$ kg Centre de gravité G_{67} , situé au milieu de [CD] | $\lambda_{76} = 8$ à 17 m |
| Pendulaire (9) | $M_3 = 3$ tonnes Centre de gravité G_3 , situé au milieu de [CE] | $L_9 = 3$ m |
| Panier(12) chargé | Masse panier chargé : $m_{12} = 400$ kg Centre de gravité $G_{12} : \overrightarrow{EG_{12}} = -L_{12} \cdot \overrightarrow{x_1}$ | $L_{12} = 0.5$ m |
| Pièce (11) | Masse négligée | |

FIGURE 2 – Paramétrage du modèle simplifié

f) Accessibilité en roulage

La partie véhicule est équipée de quatre moteurs hydrauliques capables de faire évoluer longitudinalement le châssis vers l'avant ou vers l'arrière à une vitesse maximale V_{max} de 5 km/h (1.4 m/s). Le freinage, assuré par ces mêmes moteurs hydrauliques, permet une décélération constante et une distance maximale d'arrêt d_1 de 25 cm.



Objectif 1 :

L'objectif est de déterminer la hauteur maximale du centre de gravité permettant d'éviter le basculement au moment du freinage.

Hypothèses

- Pour simplifier le problème, l'abscisse du centre de gravité G_3 de l'ensemble $E_2 = \{6,7,9,12\}$ est considérée constante égale à -10 m ($x_{G_3} = -10$).
- De même, celle du centre de gravité G_E de l'ensemble $E_1 = \{1,2,3,4, \text{contrepoids}\}$ est aussi constante égale à 0 m ($x_{G_E} = 0$).
- On note G_Σ le centre de gravité de l'ensemble $\Sigma = \{E_1 + E_2\}$. H est la hauteur de ce centre de gravité donc sa distance par rapport au sol.

Q 14 : Estimer la hauteur H maximale permettant d'éviter le basculement lors du freinage. Justifiez la réponse en citant les théorèmes utilisés. Conclure.

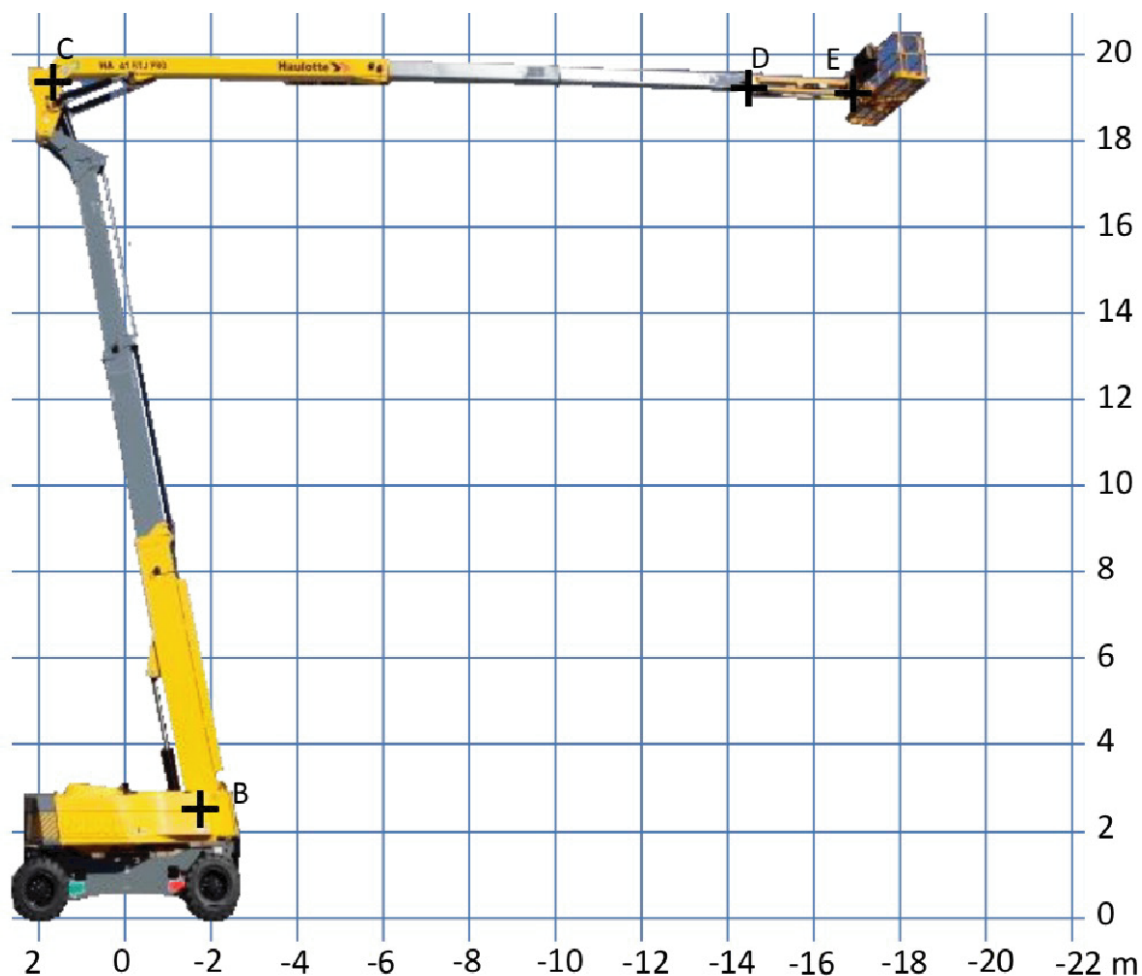


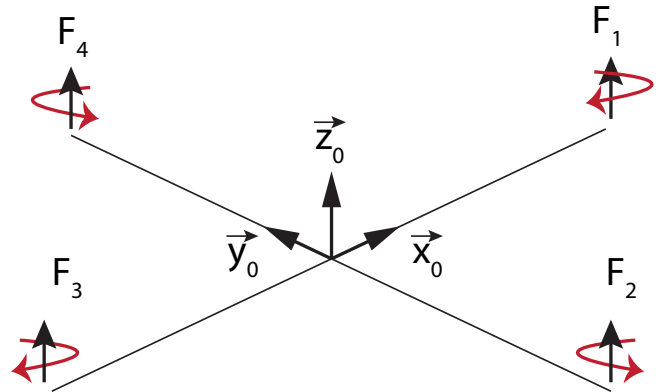
FIGURE 3 – Extrait du document réponse

Exercice 4 :

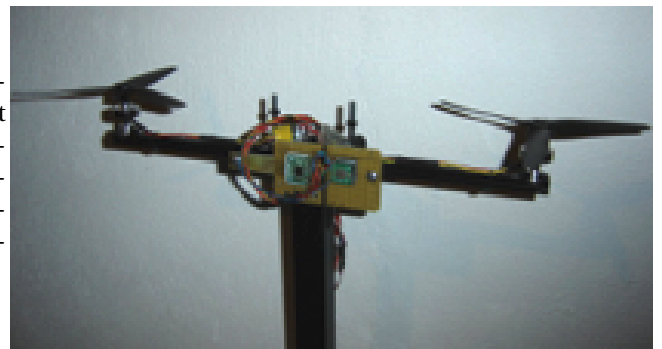
1 Etude dynamique du basculement de roulis d'un drone quadrirotor

a) Présentation

L'objectif de cette partie est d'étudier le comportement du quadrirotor lors du basculement autour de l'axe \vec{x}_0 de Roulis (moteurs F2 et F4 actifs.)



Le réglage des différents constituants de la boucle d'asservissement nécessite de tester les solutions sur un support fixe; pour cela il a été construit un support appelé « balançoire » (photo ci-contre). L'objectif de l'étude est de quantifier l'importance des effets dynamiques lors des changements d'inclinaison selon l'axe de roulis \vec{x}_0 , et en particulier d'analyser le phénomène de couple gyroscopique.

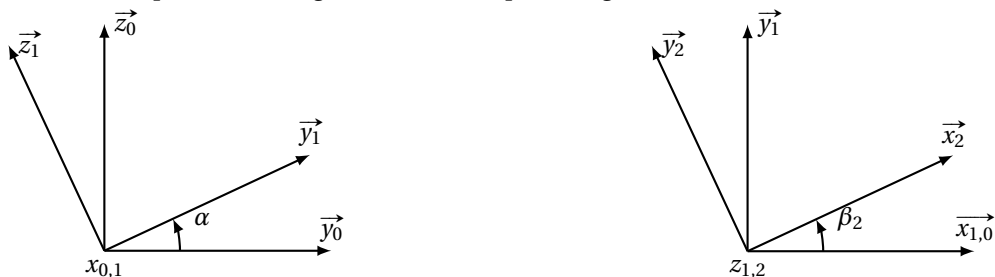


Le schéma paramétré du dispositif est fourni figure 4.

On travaillera dans un premier temps sur l'ensemble $\{E2\} = \{\text{hélice 2} + \text{rotor moteur 2}\}$, puis sur l'ensemble $\{E4\} = \{\text{hélice 4} + \text{rotor moteur 4}\}$ dont les caractéristiques inertielles sont identiques à celles de $\{E2\}$, et enfin on y adjoindra la structure $\{S1\} = \{\text{bras} + \text{stator moteur 2} + \text{stator moteur 4}\}$ qui comprend le bras reliant les deux moteurs et les stators de chaque moteur; $\{S1\}$ est en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) par rapport au support fixe $\{S0\}$; les frottements de cette liaison sont négligeables; O est le centre de gravité de $\{S1\}$. On appelle « balançoire » l'ensemble $\{B\} = \{E2\} + \{E4\} + \{S1\}$; son centre de gravité est O .

On note $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le repère fixe galiléen de référence, lié au support fixe $\{S0\}$.

Les différentes bases et les paramètres angulaires sont récapitulés figure ci-dessous :



Pour $\{E2\}$, l'hélice est un modèle tripale (figure ci-dessous) de centre $C2$ et dont les pales sont orientées à 120° les unes des autres.

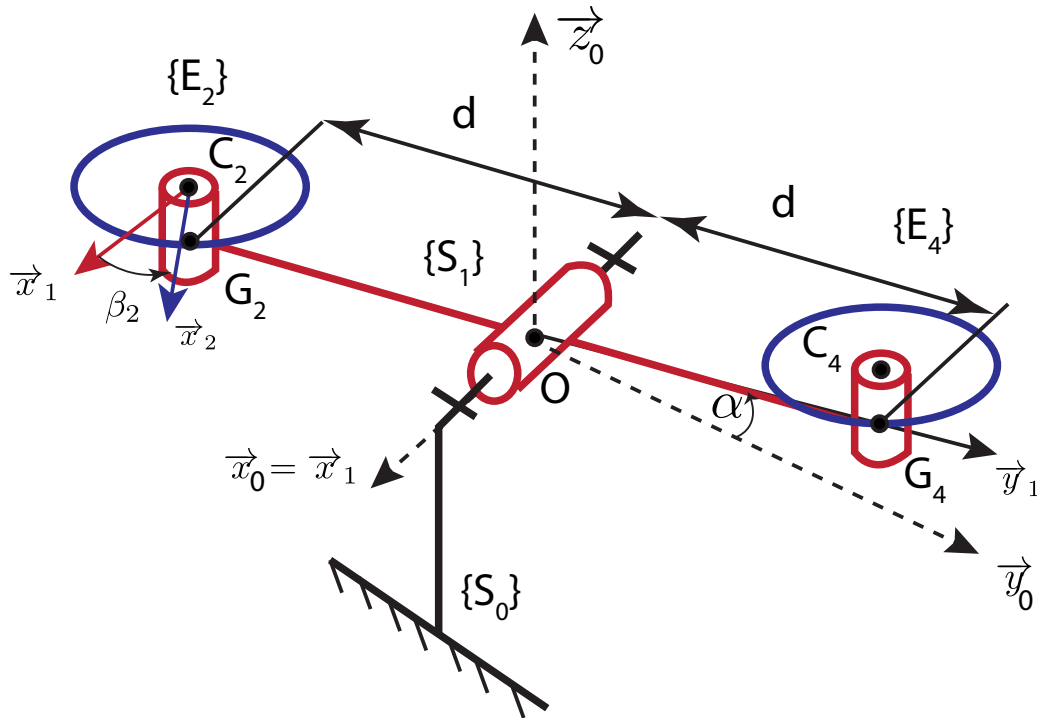
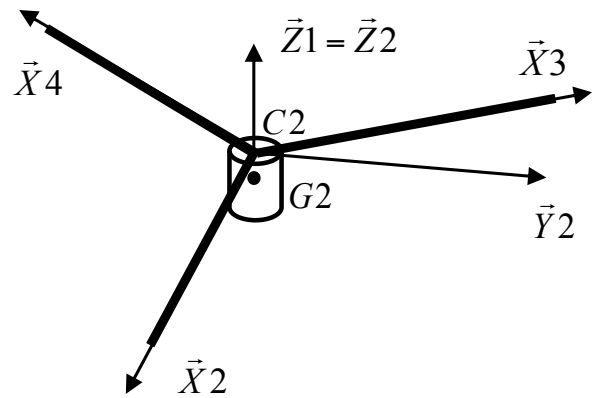


FIGURE 4 – Paramétrage du problème



Le rotor moteur sur lequel l'hélice est fixée est considéré comme un cylindre homogène; la masse de l'ensemble $\{E2\} = \{ \text{hélice 2} + \text{rotor moteur 2} \}$ est notée : m . Le centre de masse de l'ensemble est G_2 situé sur l'axe (C, \vec{z}_2) . La masse de l'hélice seule est notée m_h .

On donne la matrice d'inertie de cet ensemble $\{E2\}$:

$$\bar{\bar{I}}_{G_2}(E_2) = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{1,2})}$$

Q 15 : Indiquer quelle est la particularité géométrique qui permet de dire que $I_{xy} = 0$ et $I_{yz} = 0$.

Q 16 : démontrer que $I_{xz} = 0$ et que $I_{xx} = I_{yy}$ (on pourra considérer les pales comme des tiges rectilignes de directions respectives : (C_2, \vec{x}_2) , (C_2, \vec{x}_3) , (C_2, \vec{x}_4) , et raisonner séparément sur le rotor cylindrique et l'hélice).

On admettra sans démonstration que la matrice $\bar{\bar{I}}_{G_2}(E_2)$ est identique dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{1,2})$ et $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{1,2})$; On utilisera pour la suite la matrice d'inertie de l'ensemble $\{E2\}$ suivante :

$$\overline{\overline{I}}_{G_2}(E_2) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{1,2})}$$

au point G_2 , exprimée dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

On donne : $\overrightarrow{OG_2} = -d \cdot \vec{y}_1$ avec $d = 0,2m$

Q 17 : Donner l'expression analytique au point O, du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}_O(E_2/R_0)$.

Q 18 : Donner l'expression analytique au point O, du moment dynamique de {E2} dans son mouvement par rapport à R_0 : $\overrightarrow{\delta}_O(E_2/R_0)$

Q 19 : Identifier dans l'expression du moment dynamique, chacun des termes associés aux dénominations suivantes :

- **R** = « moment des effets dynamiques selon l'axe de Roulis » ;
- **L** = « moment des effets dynamiques selon l'axe de Lacet » ;
- **C** = « moment des effets dynamiques de Coriolis » ou « couple gyroscopique ».

On note

$$\overline{\overline{I}}_O(S_1) = \begin{pmatrix} I_{xx}^1 & I_{xy}^1 & I_{xz}^1 \\ I_{xy}^1 & I_{yy}^1 & I_{yz}^1 \\ I_{xz}^1 & I_{yz}^1 & I_{zz}^1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{1,2})}$$

la matrice d'inertie de l'ensemble S_1 dans la base b_1

Q 20 : Donner l'expression analytique du moment dynamique $\overrightarrow{\delta}_O(S_1/R_0)$.

On utilise l'angle β_4 pour paramétrer la position angulaire de {E4} par rapport à {S1}.

On étudie l'ensemble {E4} = { hélice 4 + rotor moteur 4 }.

La matrice d'inertie de {E4} exprimée en G_4 dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est identique à la matrice de {E2} exprimée en G_2 ;

$$\overline{\overline{I}}_{G_4}(E_4) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{1,2})}$$

On a : $\overrightarrow{OG_4} = d \cdot \vec{y}_1$

Q 21 : A partir des résultats obtenus précédemment, donner l'expression analytique au point O, du moment dynamique $\overrightarrow{\delta}_O(E_4/R_0)$ de {E4} en fonction (entre autre) de l'angle β_4 et de ses dérivées.

Q 22 : En déduire l'expression analytique $\overrightarrow{\delta}_O(B/R_0)$ du moment dynamique de l'ensemble balançoire : {B}={E2}+{E4}+{S1} dans son mouvement par rapport à {S0} et exprimer le terme CB = « moment des effets dynamiques de Coriolis » ou « couple gyroscopique » qui s'exerce sur l'ensemble {B}.

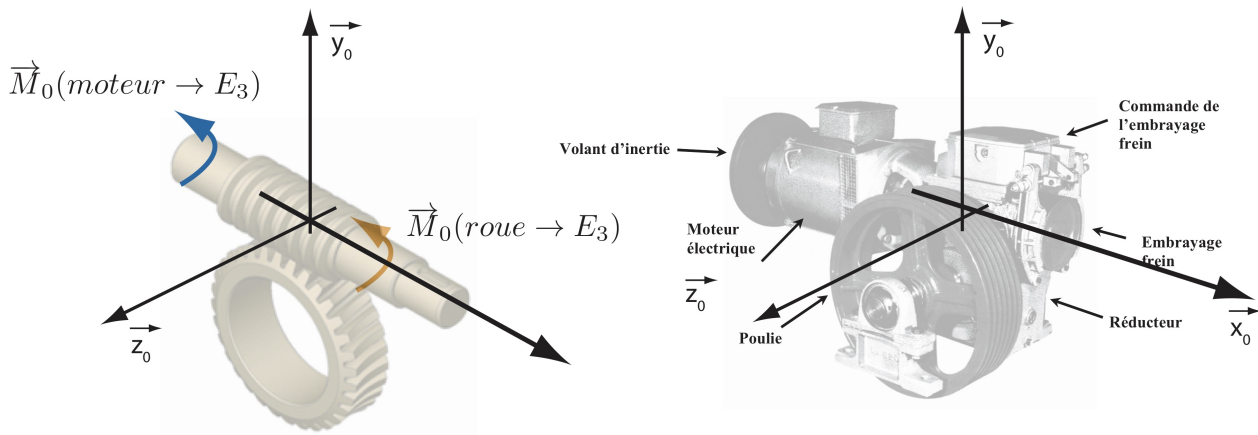
Exercice 5 : Modélisation dynamique d'un ascenseur

Source : CCP PSI 2005

Pour assurer la sécurité du transport, les appareils destinés à l'usage de personnes, sont soumis à des normes édictées par les arrêtés des pays concernés et à des directives et normes éditées par la Commission Européenne (Normes CE). Ces normes très strictes visent principalement à assurer la sécurité des utilisateurs, notamment en imposant des limiteurs de vitesse mécanique ainsi que des dispositifs de blocage en cas de chute. L'objet de notre étude est de vérifier certaines performances du cahier des charges d'un ascenseur.

Le treuil est constitué :

- d'un moteur électrique
- d'un réducteur roue et vis sans fin
- d'une poulie de traction
- d'un volant d'inertie
- d'un embrayage frein à tambour



1 Données de l'étude

Données cinétiques

- Masse de la cabine avec sa charge maxi : $m_c = 1000 \text{ kg}$;
- Masse du contrepoids : $m_p = 800 \text{ kg}$;
- Moments d'inertie :
 - poulie + roue du réducteur + axe : I_{pr} ;
 - rotor + vis du réducteur + tambour du frein : I_m ;
 - volant d'inertie : I_v ;
 - câbles : masses négligées.

Efforts

- L'action du système de guidage sur la cabine est un glisseur vertical passant par G (centre de gravité de l'ensemble cabine + charge) qui a pour module F (cet effort correspond à un frottement).
- L'action du système de guidage sur le contrepoids est négligée.

Mouvements

- le cahier des charges impose l'accélération $\Gamma_{max} < 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- la vitesse (hors phase d'accélération) est notée V.

Moteur

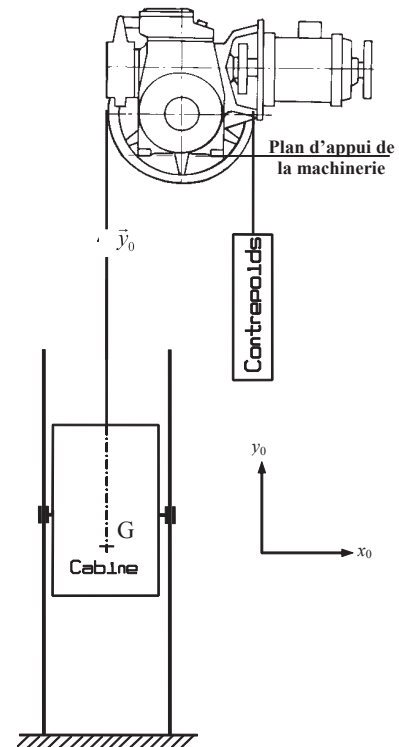
- Puissance mécanique nominale : $P_m = 4,7 \text{ kW}$;
- Couple moteur (supposé constant) : $C_m = 30 \text{ Nm}$;
- Vitesse de rotation en charge : $\omega_m = 1500 \text{ tr/min}$.

Ensemble réducteur + poulie

- Rapport de réduction du réducteur : $\lambda = 1/50$;
- Diamètre de la poulie : d_p ;
- Rendement de l'ensemble réducteur + poulie : η ;
- Hypothèse : pas de glissement du câble sur la poulie.

2 Détermination de l'inertie du volant

Pour limiter l'accélération et la décélération de la cabine, les treuils d'ascenseur sont équipés d'un volant d'inertie monté sur l'arbre moteur. L'objet de cette première étude est de déterminer les dimensions de ce volant de façon à répondre au cahier des charges en terme d'accélération. Pour déterminer le moment d'inertie I_V (et donc le diamètre D) du volant, on peut au choix utiliser le théorème de l'énergie cinétique (méthode la plus rapide et proposée dans le sujet original) ou les théorèmes généraux de la dynamique (proposés ici sous une forme guidée). Les calculs se feront dans le cas de la montée de la cabine à l'accélération. Le rendement de ce réducteur est très faible (de l'ordre de 15% dans les meilleurs cas) mais il est naturellement irréversible (en l'absence de rotation de la vis, la roue reste parfaitement immobile quelles que soient les intensités des efforts extérieurs), ce qui est très important ici pour des raisons de sécurité.



Q 23 : Donner les relations cinématiques qui existent entre :

1. la vitesse V de la cabine et la vitesse de rotation ω_p de la poulie;
2. la vitesse V de la cabine et la vitesse de rotation ω_m du moteur.

3 Méthode utilisant les théorèmes généraux

Q 24 : La cabine est guidée en translation par rapport au bâti : déterminer l'expression de la tension $F_{\text{câble} \rightarrow \text{cabine}}$ dans le câble tractant la cabine.

Q 25 : Dans les hypothèses énoncées précédemment, le contrepoids est libre de se déplacer : déterminer l'expression de la tension $F_{\text{câble} \rightarrow \text{cp}}$ dans le câble retenant le contrepoids.

Q 26 : L'ensemble {poulie + roue du réducteur + axe} est guidé en rotation par rapport au bâti : déterminer l'expression du couple C_1 exercé par la vis sur la roue du réducteur selon l'axe de rotation de la roue.

Q 27 : L'ensemble {rotor + vis du réducteur + tambour du frein + volant d'inertie} est guidé en rotation par rapport au bâti : déterminer la relation entre le couple C_m et le couple C_2 exercé par la roue sur la vis du réducteur selon l'axe de rotation de la vis.

Le rendement impose la relation suivante entre les deux efforts déterminés aux questions Q4 et Q5 : $\eta = -\frac{C_2}{C_1} \lambda$.

Q 28 : En déduire l'expression littérale de I_V en fonction de λ , d_p , Γ , η , C_m , m_p , m_c , g , I_V , I_m , I_{pr} et F pour que l'accélération Γ_{max} ne soit jamais dépassée.

4 Méthode utilisant les théorème énergétique

Q 29 : Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble.

Q 30 : Déterminer les puissance des actions mécaniques extérieures.

Q 31 : Déterminer les puissance intérieurs.

Q 32 : Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire l'équation de mouvement du mécanisme.

Q 33 : En déduire l'expression littérale de I_V en fonction de $\lambda, d_p, \Gamma, \eta, C_m, m_p, m_c, g, I_v, I_m, I_{pr}$ et F pour que l'accélération Γ_{max} ne soit jamais dépassée.

Exercice 6 : Misson insight

Source : CCINP MP 2019

1 Présentation générale

a) Contexte

L'étude proposée porte sur la réplique terrestre^a du système InSIGHT (**I**nterior exploration using **S**eismic **I**vestigations, **G**eodesy and **H**eat **T**ransport), projet du CNES (Centre National d'Études Spatiales) qui a pour but de déployer une station d'étude de la structure interne de la planète Mars.

L'atterrisseur InSIGHT (figure 41) emportera quatre sous-systèmes d'instrumentation à la surface de Mars afin d'analyser en détail pour la première fois les "statistiques vitales" de la planète :

- son pouls, activité interne, mesuré par l'instrument SEIS;
- sa température mesurée par l'instrument HP;
- ses réflexes mesurés par l'instrument RISE.

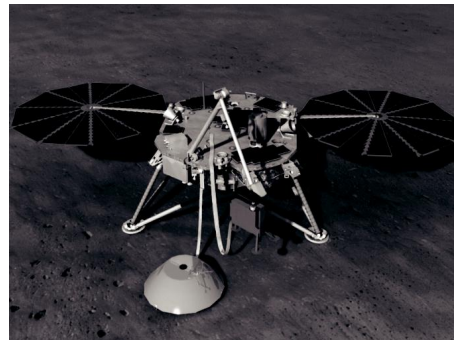


FIGURE 5 – Atterrisseur du projet InSIGHT

a. Utilisée sur Terre pour validation des différents sous-systèmes.

b) Cahier des charges

La 7 le diagramme partiel des exigences concernant le système de déploiement DPL et le module SEIS.

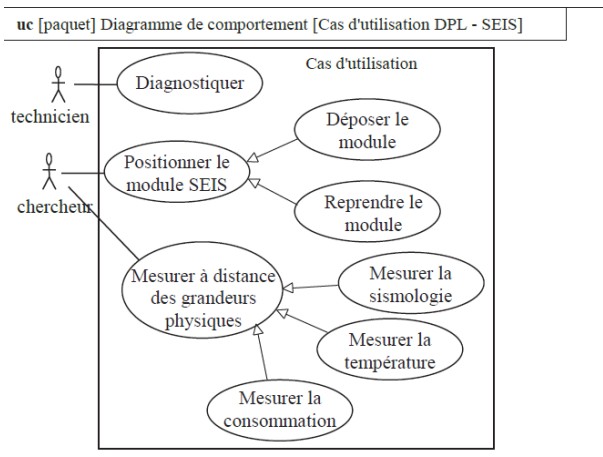


FIGURE 6 – Diagramme de cas d'utilisation

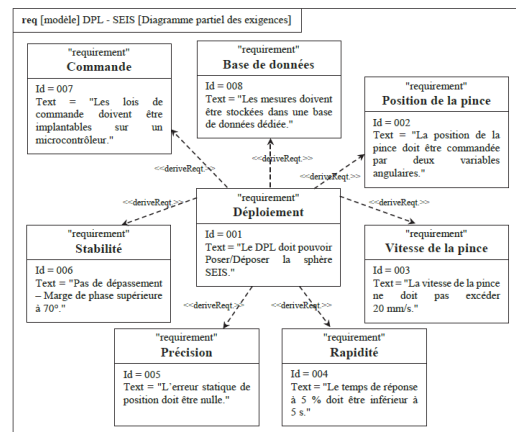
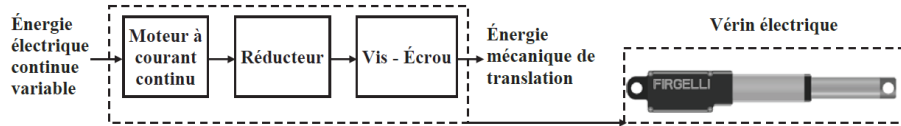


FIGURE 7 – Diagramme partiel des exigences

2 Validation du positionnement du module SEIS

Objectif 2 :

Valider les réglages de la commande des trois actionneurs linéaires associés aux pieds, afin de respecter les exigences liées à leur positionnement. On limitera l'étude à un des trois actionneurs. La chaîne structurelle de l'actionneur électrique utilisé dans le système est donnée ci-dessous.



Chaque actionneur électrique, appelé aussi vérin électrique, est asservi en position.

Notations et spécifications

- Masse à déplacer pour chaque vérin : $M = 1 \text{ kg}$
- Pesanteur de la Terre : $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- Rapport de réduction du réducteur : $r = 0,01$
- Rendement du réducteur : $\eta_r = 0,95$
- Pas de la vis du système vis-écrou : $p = 12 \text{ mm}$
- Rendement du système vis-écrou : $\eta_v = 0,96$
- Coefficient de frottement visqueux du moteur : $f = 0,002 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$
- Moment d'inertie équivalent total ramené sur l'arbre moteur : $J = 0,00004 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- Résistance de l'induit de la MCC (Machine à Courant Continu) : $R = 1\Omega$
- Inductance de l'induit de la MCC : $L = 20\mu\text{H}$
- Constante de couple : $K_c = 0,35 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$
- Constante de force contre électromotrice : $K_e(t) = 0,35 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad}$
- Tension d'alimentation de l'induit de la MCC : $u(t)$ [V]
- Courant absorbé par l'induit de la MCC : $i(t)$ [A]
- Vitesse de rotation en sortie de la MCC : $\omega(t)$ [rad/s]
- Position angulaire en sortie de la MCC : $\theta(t)$ [rad]
- Force contre électromotrice de la MCC : $e(t)$ [V]
- Couple moteur de la MCC : $C_m(t)$ [N.m]
- Couple résistant total ramené sur l'arbre moteur : $C_r(t)$ [N.m]

Équations du moteur à courant continu

- Equation électrique : $u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ (1)
- Équations de couplage électro-mécanique : $e(t) = K_e \cdot \omega(t)$ (2)
 $C_m(t) = K_c \cdot i(t)$ (3)
- En isolant l'arbre moteur, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème du moment dynamique sur l'axe de rotation du moteur :
 $J \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f \cdot \omega(t)$

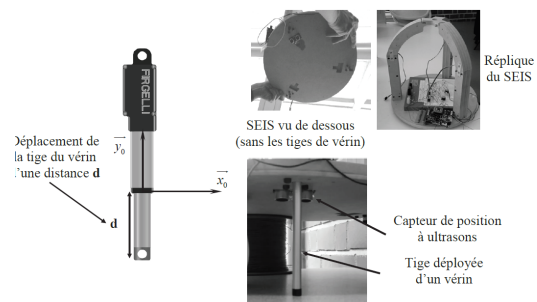
Transformée de Laplace

On se place dans les conditions d'Heaviside pour l'ensemble de l'étude (conditions initiales nulles). La transformée de Laplace d'une fonction $h(t)$ dans le domaine temporel sera notée en majuscule : $L[h(t)] = H(p)$.

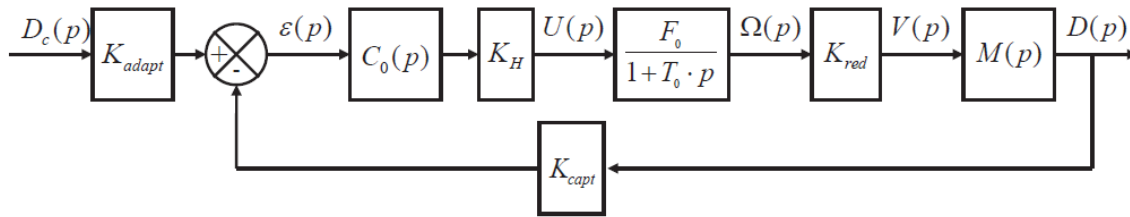
a) Étude de l'asservissement en position du vérin

Objectif 3 :

Choisir un correcteur approprié permettant de satisfaire le cahier des charges vis-à-vis des exigences concernant l'asservissement en position du vérin électrique suivant l'axe \vec{y}_0 conformément à la figure ci-contre. La mesure de la distance est obtenue grâce à un capteur à ultrason permettant de délivrer, sous la forme d'impulsions, une image de la distance entre la structure sur SEIS et le sol. Cette information est ensuite traitée afin de générer un signal image de la distance parcourue par la tige du vérin.



L'étude précédente a permis d'obtenir un modèle de comportement de la MCC intégré dans le schéma bloc de l'asservissement présenté sur la figure ci-dessous pour lequel $C_r(p) = 0$.



Notations et spécifications

- Gain du capteur : $K_{capt} = 588 \text{ impulsions/m}$
- Gain de l'ensemble réducteur et vis-écrou : $K_{red} = 19,1 \cdot 10^{-6} \text{ m/rad}$
- Vitesse linéaire de la tige du vérin : $V(t) \text{ m.s}^{-1}$
- Déplacement linéaire de la tige du vérin : $d(t) [m]$
- Correcteur : $C_0(p)$
- Gain du hacheur : $K_H = 1,163$
- Pour toute la suite du sujet, on considère : $C_r(p) = 0$.

Tout d'abord, le correcteur est considéré unitaire : $C_0(p) = 1$.

Q 34 : Donner l'expression littérale de $M(p)$ et K_{adapt} , pour garantir un bon asservissement.

Q 35 : Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(p)$ et mettre celle-ci sous forme canonique. Évaluer la classe de cette fonction de transfert.

Q 36 : Calculer $\varepsilon(p)$ en fonction de $D_c(p)$ et des constantes du problème. En déduire l'erreur statique et de traînage. Conclure sur la précision du système.

On donne l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_{BO}(p) = \frac{0,0112}{p \cdot (0,00028 \cdot p + 1)}$$

Q 37 : Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels de la fonction de transfert $G_{BO}(p)$ sur le document réponse. En déduire la marge de phase de l'asservissement en effectuant toutes les constructions graphiques nécessaires. Conclure sur le respect de l'exigence 006 « Stabilité ».

On désire quantifier la rapidité du système à la suite d'une sollicitation en échelon. On donne les relations permettant de calculer le temps de réponse à 5%, noté $tr_{5\%}$, pour un système d'ordre deux (avec ξ le facteur d'amortissement et ω_0 la pulsation propre du système non amorti) avec la figure 15.

Q 38 : Déterminer et calculer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert en boucle fermée $G_{BF}(p) = \frac{D(p)}{D_c(p)}$. En déduire le temps de réponse de l'asservissement en vitesse. Conclure sur le respect de l'exigence 004 « Rapidité ».

Afin d'améliorer les performances de l'asservissement, on choisit un correcteur proportionnel de gain K_D tel que $C_0(p) = K_D$. La valeur numérique du gain sera déterminée à partir de deux méthodes :

- approche graphique, à partir de la marge de phase (maîtrise de la stabilité) ;
- approche analytique, à partir d'un comportement imposé.

Q 39 : À partir de constructions graphiques sur le diagramme de Bode du document réponse, donner la valeur du gain du correcteur K_{D1} , permettant de garantir une marge de phase supérieure à 70° . La valeur de K_{D1} vous paraît-elle pertinente et réaliste ?

On impose un temps de réponse à 5% de 5 s et un facteur d'amortissement ξ supérieur à 1.

On donne l'expression numérique de $G_{BF}(p)$ avec un correcteur de gain K_D :

$$G_{BF}(p) = \frac{1}{\frac{0,025}{K_D} p^2 + \frac{89}{K_D} p + 1}$$

Q 40 : À partir des équations 1 de la figure 15 liant le temps de réponse, le facteur d'amortissement et la pulsation propre ainsi que de l'expression numérique de $G_{BF}(p)$, donner une expression liant $tr_{5\%}$ et K_{D2} . En déduire la valeur de K_{D2} permettant de respecter la contrainte imposée en termes de rapidité.

On donne ci-dessous (figure 8) les tracés de la sortie du système asservi à la suite d'un échelon de consigne de 10 cm pour $K_{D1} = 220000$ et $K_{D2} = 53$.

Q 41 : Commenter les courbes (respect des exigences) et choisir le correcteur qui vous paraît le plus pertinent.

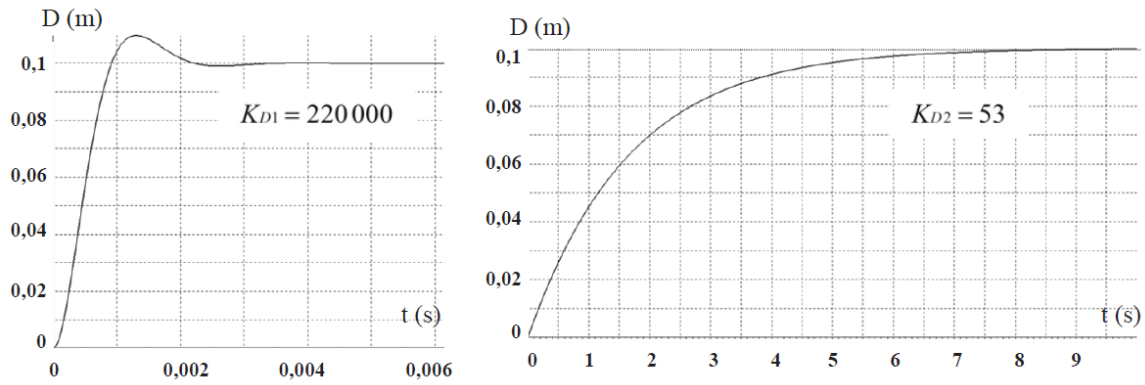


FIGURE 8 – Réponses indicielles du système asservi

3 Annexes

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad tr_{5\%} \approx \frac{3}{\xi \cdot \omega_0} \\ \xi > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad tr_{5\%} \approx \frac{6 \cdot \xi}{\omega_0} \end{array} \right. \quad (1)$$

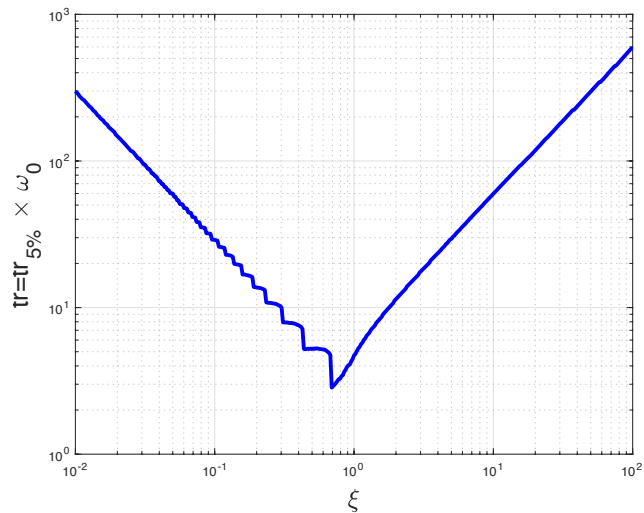


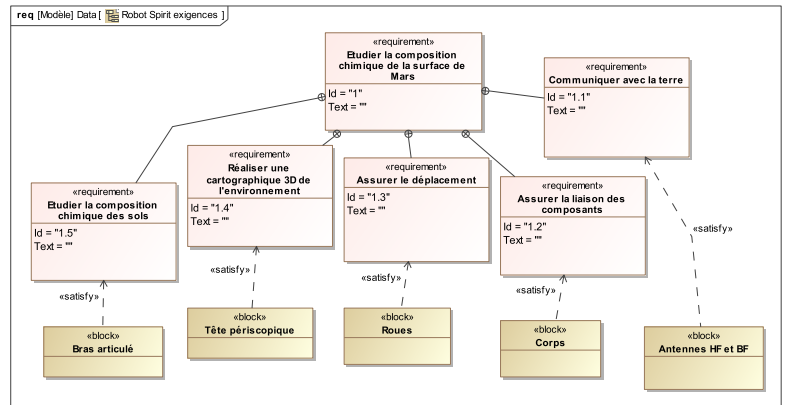
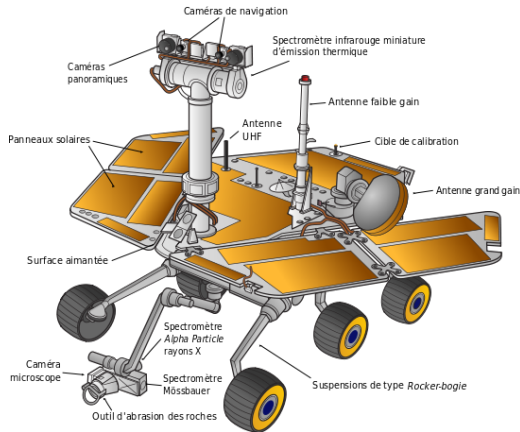
FIGURE 9 – Abaques pour un système linéaire d'ordre 2

Exercice 7 : Modélisation du robot d'exploration martienne Spirit

Source : XENS PSI 2005

1 Mise en situation de l'étude

Le robot Spirit a été conçu par la NASA pour étudier la composition chimique de la surface de la planète Mars. La figure ci-dessous donne un diagramme des exigences partiel technique du robot.



2 Principe d'étude de l'exigence "Permettre à la NASA d'étudier la composition chimique de la surface de Mars"

Cette exigence est réalisée, d'un point de vue temporel, par les 3 phases suivantes :

- la phase d'approche : Spirit "repère" une roche dont la forme est adaptée à l'étude chimique. Son rôle consiste à s'en rapprocher suffisamment près pour pouvoir l'étudier.
- la phase de déploiement : le corps de Spirit est fixe, le bras articulé se déploie et amène l'ensemble des 4 outils à proximité de la roche.
- la phase de prospection : le corps de Spirit ainsi que le bras articulé sont fixes, les 4 outils étudient la composition chimique de la roche.

Dans le cadre de ce sujet, on va se limiter à l'analyse de la phase d'approche. L'objectif est de vérifier que la solution constructive satisfait les niveaux attendus des critères des exigences techniques.

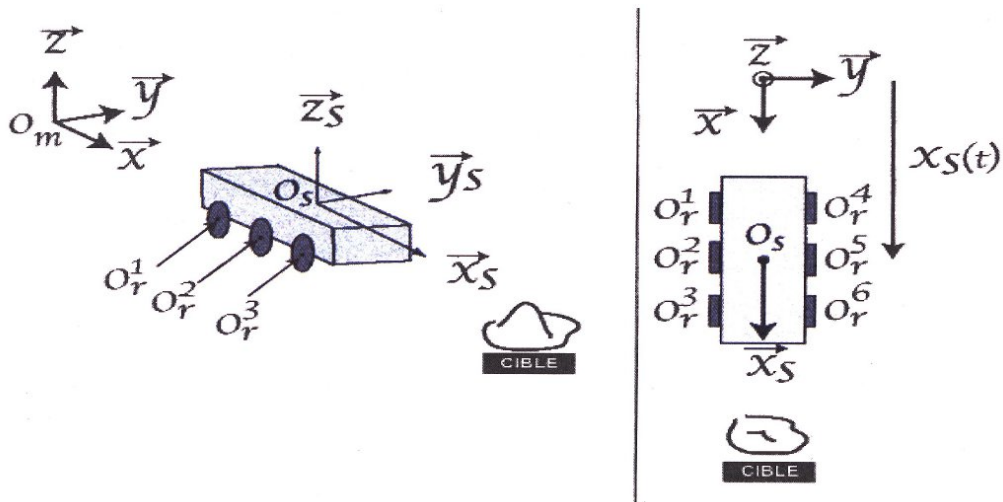
a) Étude de la phase d'approche

L'objectif est de définir l'asservissement de Spirit de manière à répondre aux spécifications de la phase d'approche. Celle-ci consiste à amener Spirit avec **précision et rapidité** au voisinage d'une roche à étudier :

| Désignation | Critère | Niveau |
|-------------------------|--|--|
| S'approcher de la cible | Erreur $\epsilon_{position}$ sur la position cible | $\epsilon_{position} < 0,01m$ |
| | Rapidité | Temps de réponse à 5% inférieur à 300s |

L'asservissement de ce déplacement est indispensable du fait de l'existence de perturbations mal connues, qui sont principalement engendrées par les rafales de vent sur la surface de Mars. Pour effectuer cette approche, la motorisation est assurée par un bloc motoréducteur à courant continu dans chacune des six roues (cf ci dessous). Le mouvement ainsi généré est observé de manière optique. En effet, les caméras situées sur la tête périscopique Pancam (cf figure 10) permettent à tout instant de connaître la position absolue de Spirit. Le traitement de cette information par l'électronique embarquée fournit donc une mesure de l'erreur par rapport à la position cible.

A titre d'information, on donne le paramétrage ci dessous. On désignera par (S) le corps du robot.



L'objectif est d'asservir la position $x_s(t)$ de Spirit de manière à approcher la cible en respectant la cahier des charges précédent.

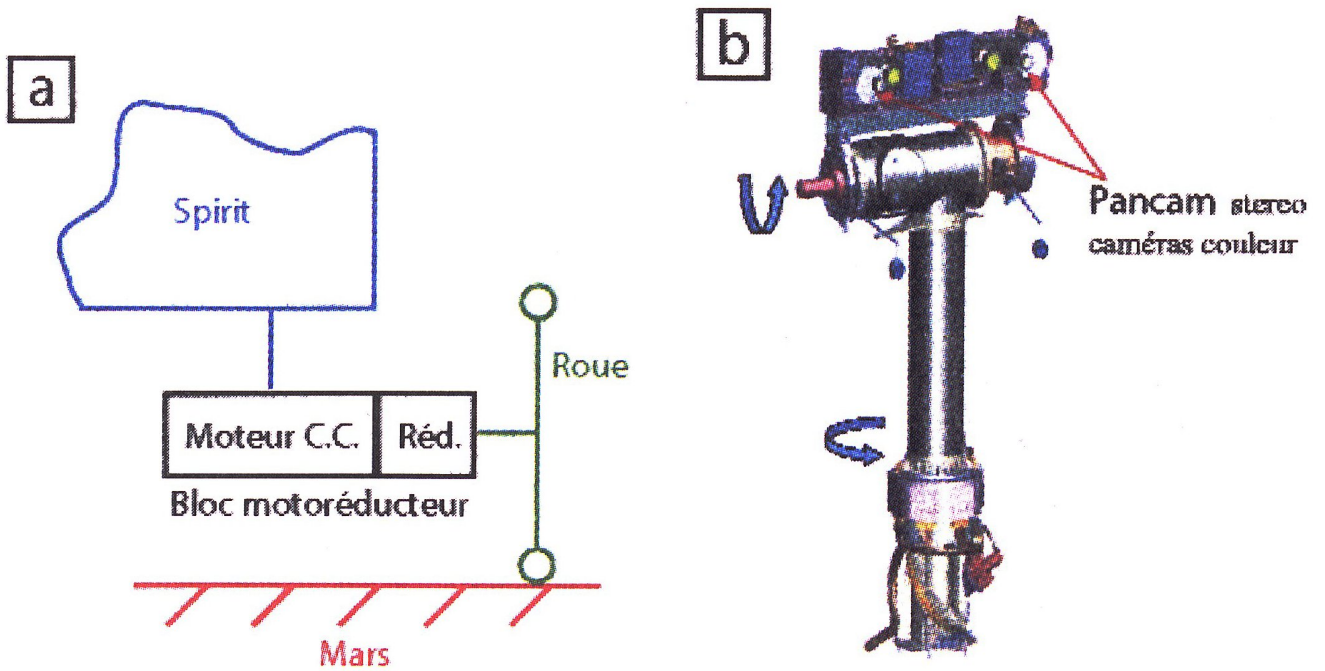


FIGURE 10 – Schéma d’implantation du bloc motoréducteur sur une des roues (chaque roue est motorisée) et de la tête périscopique Pancam

b) Architecture du système asservi

Une étude de Dynamique de Spirit en déplacement par rapport au sol, sous l’action mécanique des moteurs et de la perturbation due au vent donne les équations suivantes (programme de 2ème année) :

$$M_s \ddot{x}_s(t) = 6 F_{r-s}^x(t) + F_{v-s}^x(t) \tag{2}$$

$$\left(M_r + \frac{\tilde{I}_r^y}{R_r^2} \right) \ddot{x}_s(t) = - F_{r-s}^x(t) + \frac{C_{s-r}^y(t)}{R_r} \tag{3}$$

On définit les constantes suivantes :

- M_s : masse de Spirit sans les roues ;
- M_r : masse d'une roue ;
- $\tilde{I}_r^y = I_r^y + \eta^2 \cdot I_{\text{arbre moteur}}^y$: inertie de rotation d'une roue et de son moteur, autour de son axe de révolution ;
- R_r : rayon d'une roue ;
- η : rapport de réduction du réducteur à engrenage.

On définit également les grandeurs variables suivantes :

- $x_s(t)$: position de Spirit sur Mars ;
- $C_{s-r}^y(t)$: couple moteur appliqué sur la roue ;
- $F_{r-s}^x(t)$: effort d'une roue sur Spirit ;
- $F_{v-s}^x(t)$: effort du vent, modélisant la perturbation sur Spirit.

L'étude de la motorisation, dans le cas d'un moteur à courant continu, donne les équations suivantes :

$$u(t) = e(t) + R_m i(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{C_{s-r}^y(t)}{\eta} = K_t \cdot i(t), \quad (5)$$

$$e(t) = K_e \frac{\eta}{R_r} \dot{x}_s(t). \quad (6)$$

On définit les constantes suivantes :

- R_m : résistance aux bornes de l'induit,
- L : inductance aux bornes de l'induit,
- K_t : constante de couple,
- K_e : constante de force contre-électromotrice.

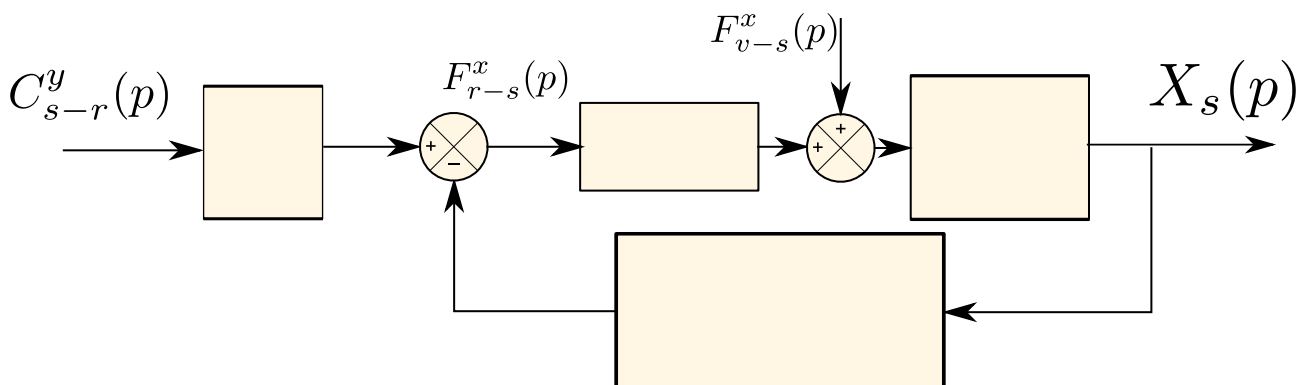
On définit également les grandeurs variables suivantes :

- $u(t)$: tension d'alimentation,
- $e(t)$: force contre-électromotrice,
- $i(t)$: intensité.

3 Mise en place du modèle de connaissance

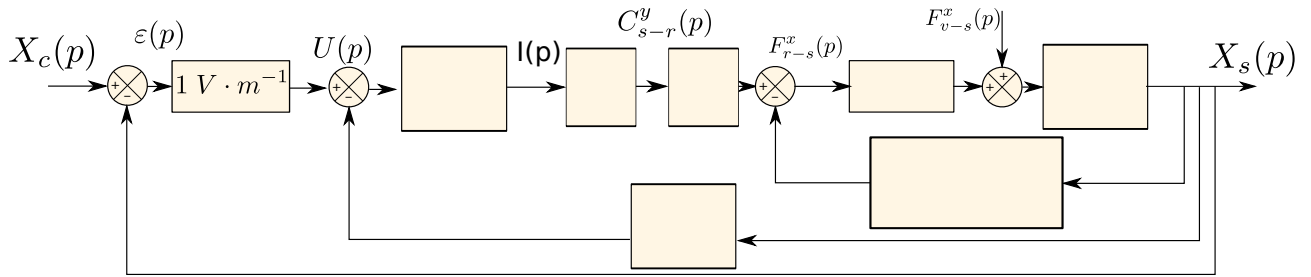
Q 42 : Écrire la transformée de Laplace des équations de la Dynamique, notées **2** et **3** en considérant que les conditions initiales sont nulles.

Q 43 : A partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, remplir les schémas blocs situés sur la figure ci-dessous.



Q 44 : Écrire la transformée de Laplace des équations régissant le Moteur à Courant Continu, notées **4**, **5** et **6** en considérant que les conditions initiales sont nulles.

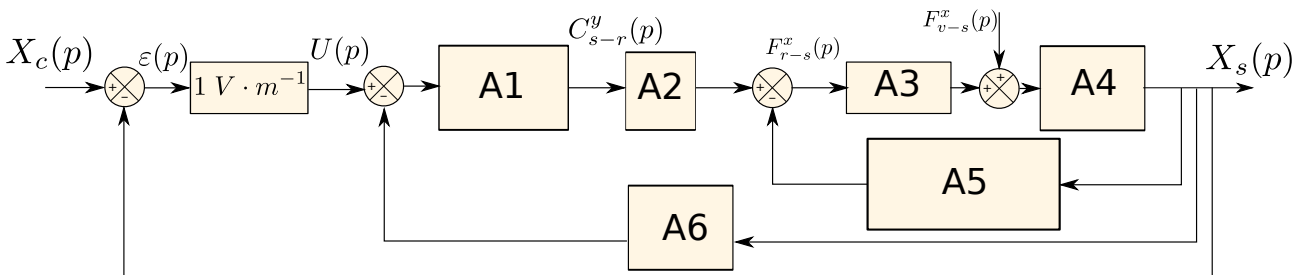
Q 45 : A partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, remplir le schéma bloc du document ci-dessous.



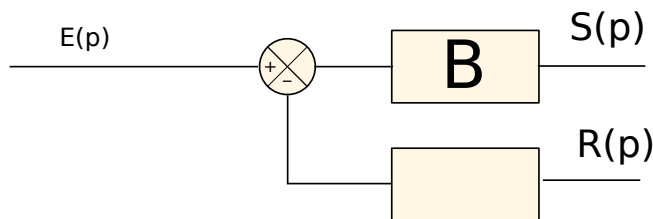
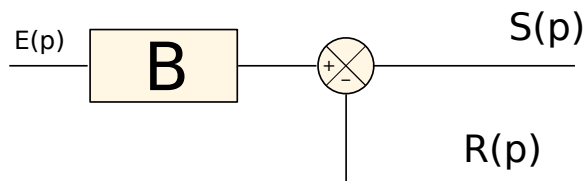
a) Modèle de commande du robot

La tension $u(t)$ de commande est déterminée à partir de l'écart $\varepsilon(p)$ entre la position cible $X_c(p)$ et la position courante $X_s(p)$, via une boucle d'observation (ie de retour) unitaire (système PANCAM). L'ensemble des schémas blocs précédents viennent donc s'insérer comme détaillé sur la figure ci-dessous, pour constituer un système reliant la consigne $X_c(p)$ et la position courante de Spirit $X_s(p)$. On choisit de prendre une amplification unitaire de $1V \cdot m^{-1}$.

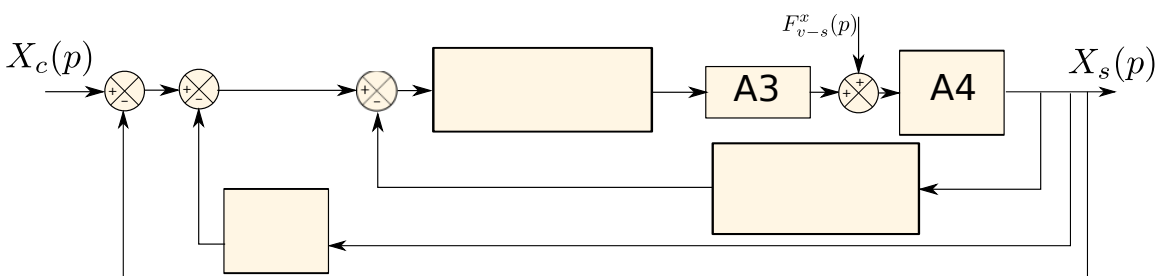
Remarque : les blocs avec les fonctions de transferts A_i sont ceux déterminés lors des questions précédentes. On pourra dans un premier tout exprimer en fonctions des différents A_i .



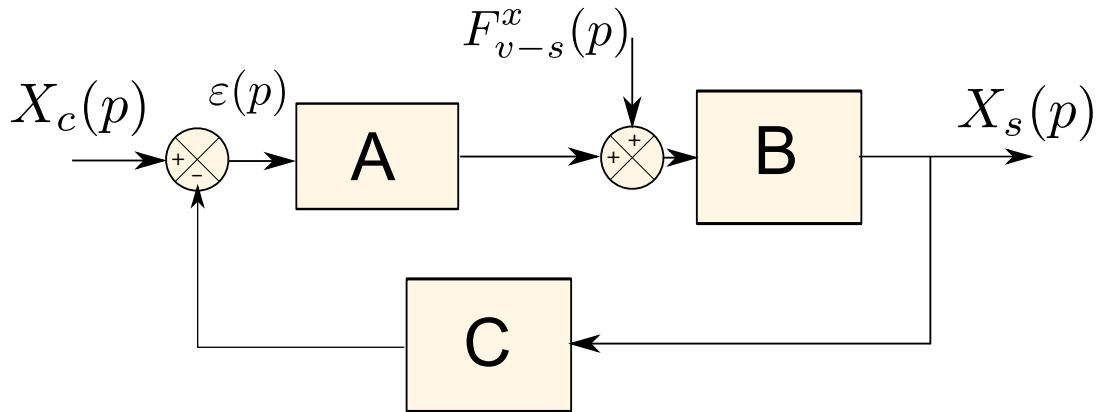
Q 46 : Pour réduire ce schéma bloc nous allons le manipuler en passant des blocs de l'amont vers l'aval des points de prélèvement. On raisonne donc déjà dans le cas général grâce à la figure ci-dessous. Donner l'expression du bloc manquant en fonction de B



Q 47 : Montrer alors que l'on peut mettre le schéma bloc sous la forme suivante avec 3 retours en parallèle.



Q 48 : Ce schéma bloc peut se réduire à un schéma de bloc de la forme de celui proposé ci dessous (On pourra regrouper les trois boucles retours parallèles en une seule. Exprimer alors A, B et C en fonctions des A_i



Q 49 : A partir des résultats de l'étude préliminaire et de la partie précédente, donner l'expression des blocs A, B et C.

Le moteur utilisé dispose d'une inductance très faible qui permet par la suite de simplifier le modèle. On va donc considérer $L=0$.

Q 50 : Sous couvert de cette hypothèse d'inductance nulle, montrer que les fonctions de transfert A, B et C s'expriment :

$$A = \frac{6 \cdot \eta K_t}{R_m R_r}, B = \frac{1}{M_s p^2}$$

et

$$C = \frac{(\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t}{\eta R_r K_t}$$

Pour la suite du problème, on admettra ce résultat.

On va à présent s'intéresser à la relation liant la sortie aux deux entrées du système, que l'on notera :

$$X_S(p) = G_1(p) \cdot X_c(p) + G_2(p) \cdot F_{v-s}^x(p)$$

Q 51 : A partir de la méthode de votre choix, exprimer $G_1(p)$ et $G_2(p)$ en fonction de A, B et C.

Q 52 : En remplaçant A, B et C par leur valeur (cf ci dessus), montrer que l'on peut écrire sous forme canonique :

$$G_1(p) = \frac{\tilde{K}_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

et

$$G_2(p) = \frac{\tilde{K}_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Q 53 : Donner l'expression des constantes caractéristiques : \tilde{K}_1 , \tilde{K}_2 , ξ et ω_0

4 Étude des performances du systèmes corrigé vis-à-vis du cahier des charges

Le robot Spirit est étudié pour une entrée de consigne en échelon, d'amplitude notée X_{C0} constante. Dans un premier temps, on prendra la perturbation $F_{v-s}^x(p)$ nulle.

Q 54 : Définir l'expression de $X_c(p)$

Q 55 : Définir l'erreur statique absolue, notée ε_{Sa} , de ce système. En précisant le théorème utilisé, calculer cette erreur statique absolue. Le système est il précis vis à vis de sa consigne d'entrée ?

On tient à présent compte de l'entrée de perturbation, que l'on modélise également par un échelon d'amplitude constante F . A partir des valeurs des constantes du moteur, on peut montrer que l'erreur statique absolue est de 0,172 m.

Une étude non demandée ici permettrait de montrer qu'une correction non unitaire de gain $K_1 = 20$ assurerait les contraintes de précision en cas de perturbation. Le modèle ainsi obtenu serait toujours du second ordre et aurait pour fonction de transfert :

$$G_1(p) = \frac{1}{1 + 27,7 p + 0,36 p^2}$$

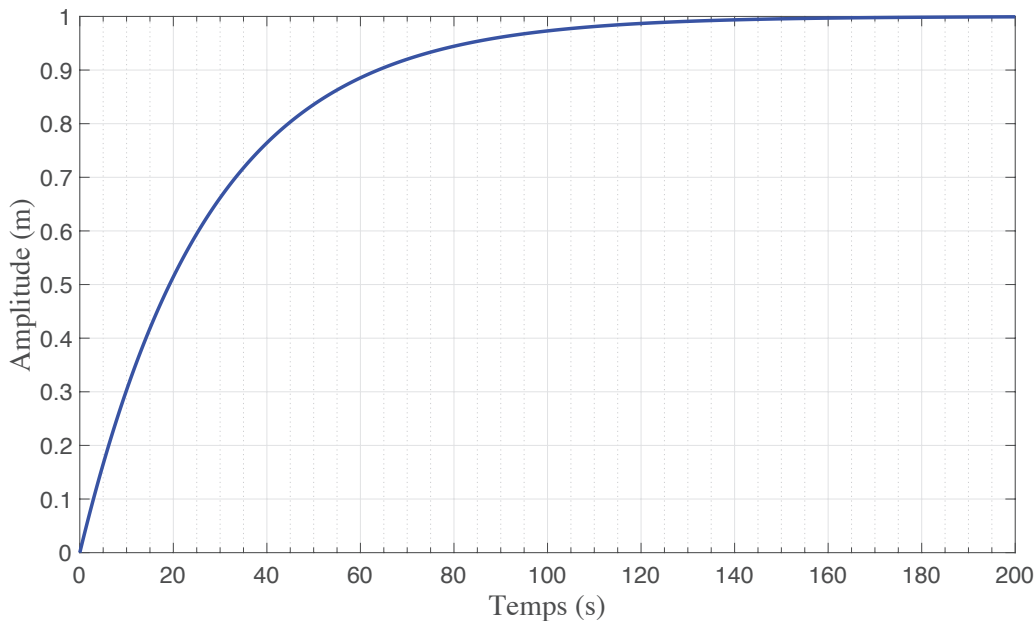
Q 56 : Montrer que la fonction de transfert précédente peut être mise sous la forme :

$$G_1(p) = \frac{1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Q 57 : Donner la valeur numérique des deux constantes : τ_1, τ_2 . Montrer que l'une est négligeable devant l'autre.

Le système ainsi corrigé a été testé. On a alors enregistré l'allure de sa réponse pour une entrée en échelon d'amplitude 1. Le relevé est donné dans le document réponse. Cette courbe permet de définir un modèle simplifié du système. On parle alors de modèle de comportement.

Q 58 : A partir de la réponse expérimentale, et en le justifiant, identifier l'ordre de la fonction de transfert du modèle de comportement. Sur le graphe du document réponse, effectuer les tracés nécessaires pour identifier les paramètres caractéristiques de ce système.



Q 59 : Vérifier que les critères de rapidité et de précision sont vérifiés

Q 60 : Tracer le diagramme de Bode (sur la figure ??) du comportement du système (pour $G_1(p)$)

Exercice 8 : Télé-chirurgie

Source : CCP PSI 2015

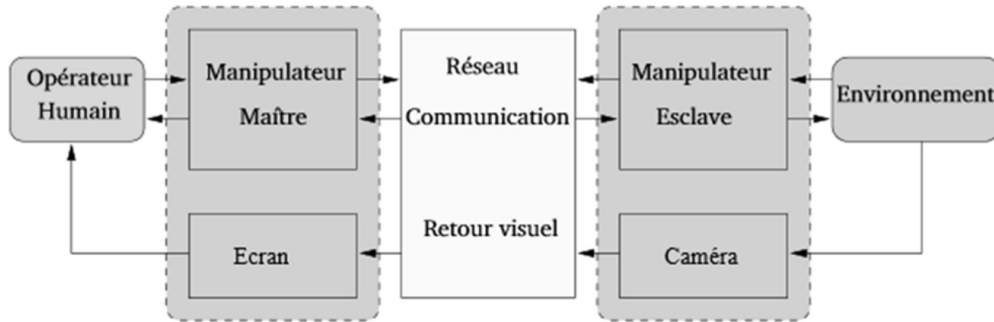
1 Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

a) Présentation

La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent

des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.

Le cas d'utilisation étudié dans ce sujet est la téléopération sur organe mobile. Lors d'une opération, les organes sont soumis à des mouvements induits notamment par la respiration et les battements cardiaques. Lorsque le champ visuel est réduit, ces mouvements apportent une gêne au praticien qui doit les compenser manuellement. De plus il est montré qu'il est préférable d'utiliser des systèmes à interfaces haptiques¹. On donne en figure 11, le diagramme des exigences du système.



Objectif 4 :

Les effets du mouvement cardiaque sont négligeables lorsque la zone d'intérêt ne se situe pas dans le voisinage du coeur. En revanche, les effets du mouvement respiratoire se propagent sur une grande partie des organes tels que les poumons, le diaphragme, le foie, les reins et le pancréas. Ils occasionnent une gêne importante en chirurgie abdominale. Le dispositif expérimental étudié dans le sujet est réalisé à partir de 2 interfaces haptiques à 1 degré de liberté.

L'objectif de cette étude est de concevoir et valider une commande permettant de rejeter une perturbation périodique.

b) Modélisation

La structure globale de la commande du système de téléchirurgie est donnée sur la figure suivante (figure 12) :

On s'intéresse ici à la commande du système esclave dont la modélisation dans son environnement perturbé est représentée par la figure 13. Cette modélisation permet de relier la consigne $x_m(t)$ issue du dispositif maître au déplacement $x_v(t)$ de l'organe terminal.

- $H_{ad} = k_a = 1N \cdot m^{-1}$ permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_s(p) = \frac{X_s(p)}{F_s(p)} = \frac{k_s}{p(m_s \cdot p + b_s)}$ avec $k_s = 1m \cdot N^{-1}$, $m_s = 0,152kg$ et $b_s = 1,426N \cdot s \cdot m^{-1}$;
- $k_e = 200N \cdot m^{-1}$.

Q 61 : Simplifier le schéma bloc de la figure 13 pour lui donner la forme illustrée par la figure 14. Exprimer $H_t(p)$ et $H(p)$ en fonction de k_e , k_a et $H_s(p)$.

Pour la suite du problème, on prendra :

$$H(p) = \frac{1}{m_s p^2 + b_s p + k_e}$$

c) Analyse temporelle et vérification des performances

Q 62 : Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle : $X_{*e}(p) = 0$ et $C(p) = 1$) : $FBF_1(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$, puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique (K), pulsation propre (ω_0) et coefficient d'amortissement (z).

Q 63 : Faire l'application numérique.

Q 64 : En vous aidant des abaques de la figure 15, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).

1. Le terme haptique est utilisé pour désigner le retour d'effort au sens kinesthésique mais également au sens tactile

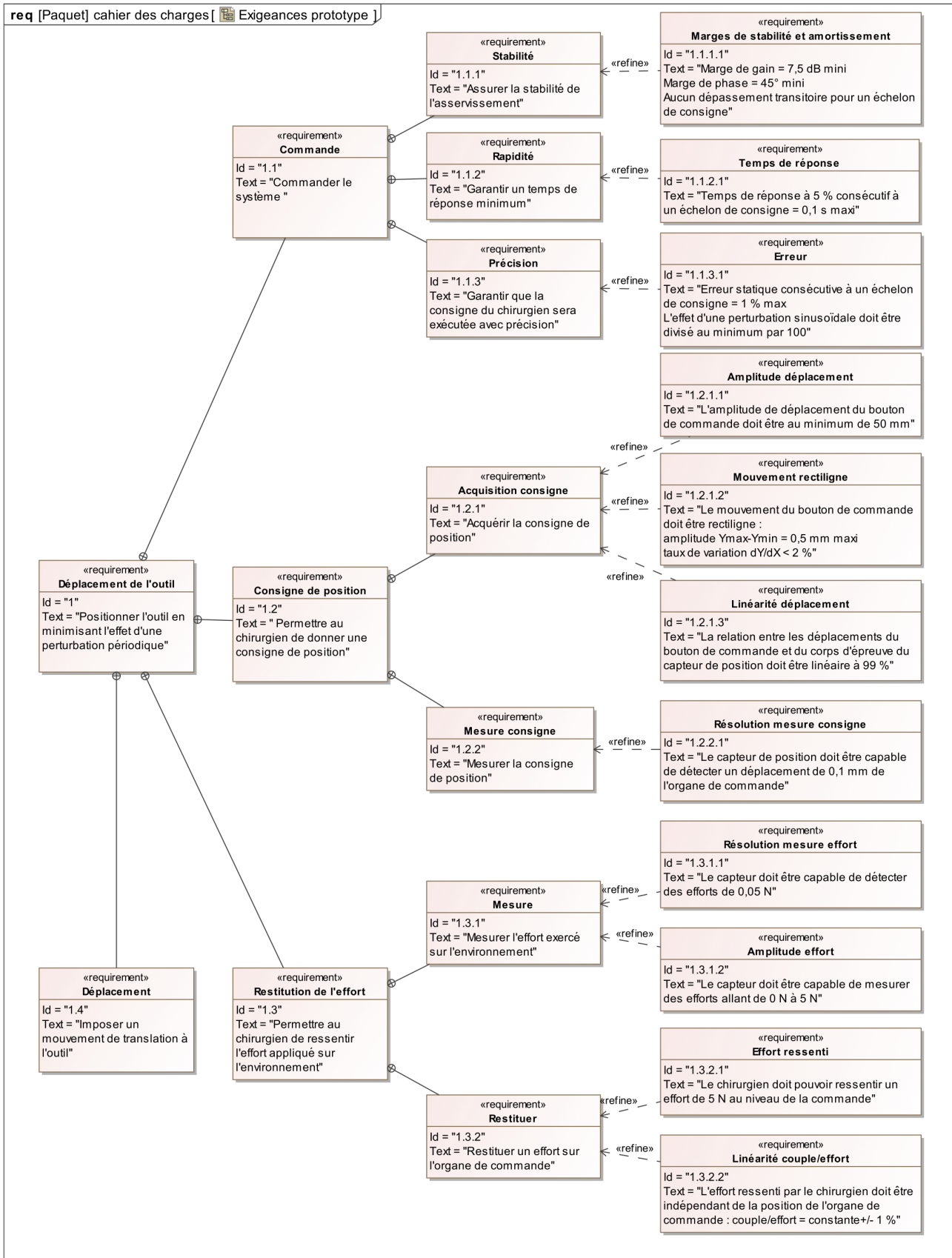


FIGURE 11 – Diagramme des exigences

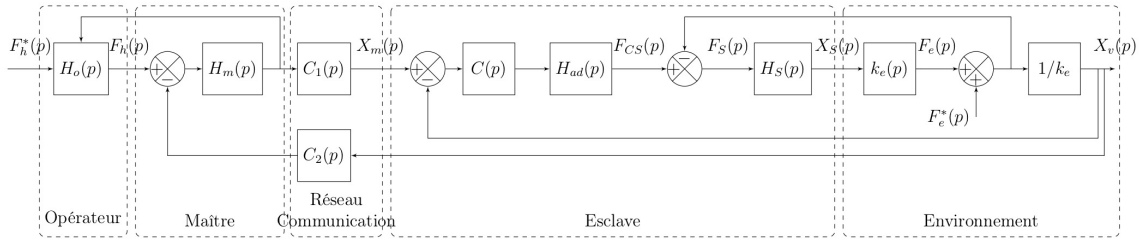


FIGURE 12 – Schéma bloc simplifié de la commande

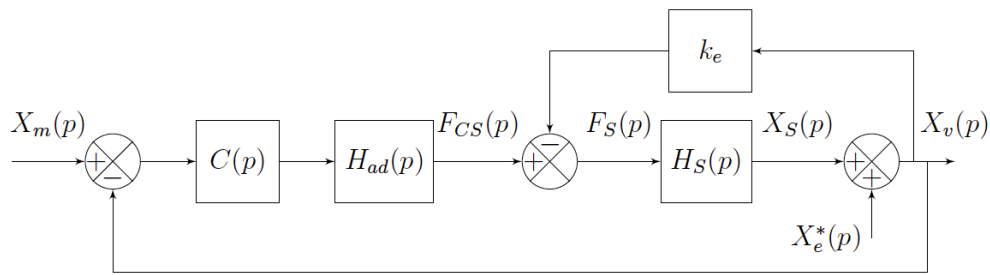


FIGURE 13 – Modélisation du dispositif esclave avec son environnement perturbé

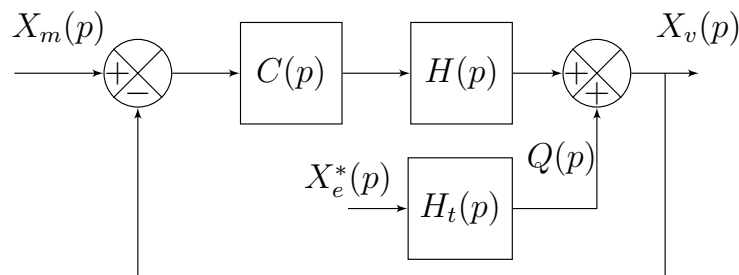


FIGURE 14 – Modélisation simplifié

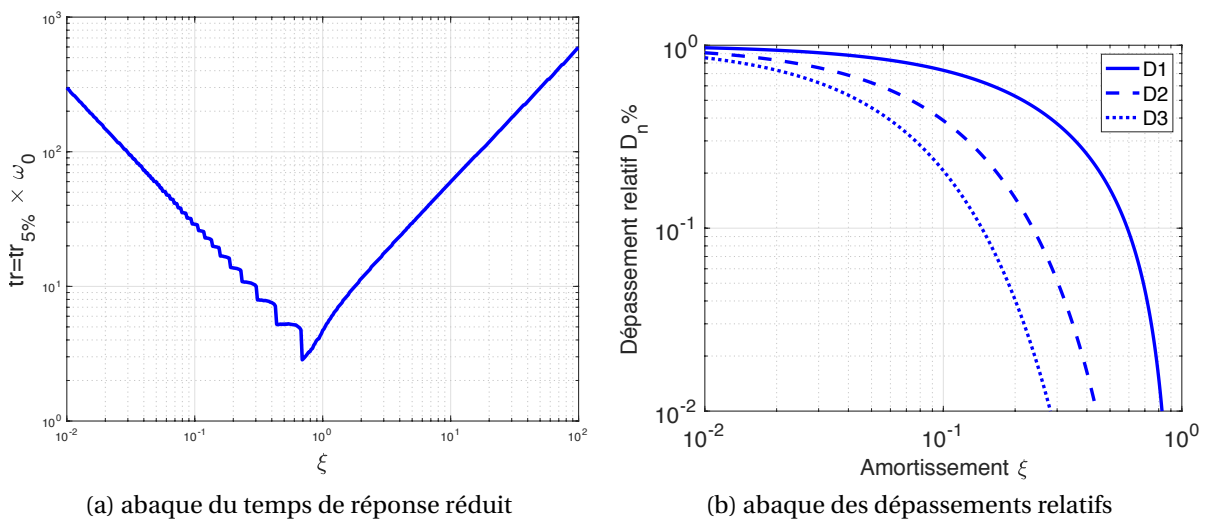


FIGURE 15 – Abaques pour un système linéaire d'ordre 2

d) Amélioration des performances du système avec correction IMC

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma bloc est donné sur la figure 16.

Avec $F(p)$ la fonction de transfert d'un filtre de la forme $F(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$ et la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{(m_s p^2 + b_s p + k_e)}$$

La grandeur de sortie $X_v(p)$ peut s'exprimer par l'équation :

$$X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$$

avec $A(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$ et $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$.

Q 65 : Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne $x_m(t) = x_0$ (on prendra $Q(p) = 0$ pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

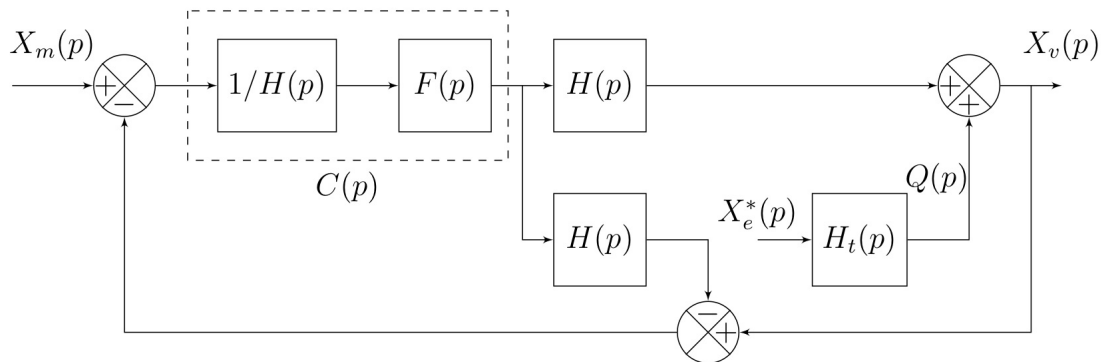


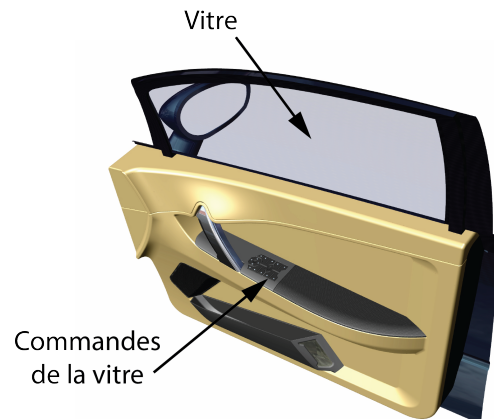
FIGURE 16 – Modélisation avec correcteur IMC

Exercice 9 : Système de commande d'un lève vitre électrique

Source : CCINP PSI 2017

1 Présentation

On s'intéresse ici au pilotage automatisé des vitres des portières d'une automobile. L'utilisateur demande simplement à ce que l'ouvrant se déplace jusqu'à une position prédéfinie. Une brève action de sa part entraîne le déplacement complet de l'ouvrant. Pour le lève-vitre électrique séquentiel, l'utilisateur demande à ce que la vitre remonte complètement, par une courte action sur l'interrupteur. Dès lors, le système de contrôle/commande gère le déplacement de l'ouvrant dans le cas normal, mais aussi en cas de dysfonctionnement (perte de fonctionnalité ou présence d'un obstacle sur le trajet de la vitre). Il faut donc assurer un fonctionnement sûr et robuste du système d'ouvrant piloté automatisé pour éviter que le système blesse un occupant. Dans ce mode de fonctionnement l'utilisateur peut également arrêter l'ouverture de la vitre en ré-appuyant sur l'interrupteur.



Le diagramme des exigences de la figure 17 liste quelques performances attendues pour le lève-vitre électrique. On s'intéressera ici à l'exigence 6 qui concerne la prise en charge d'un éventuel pincement du doigt. Il faudra aussi veiller à respecter l'exigence 4.3 qui nécessite d'actionner la vitre avec un seul bouton.

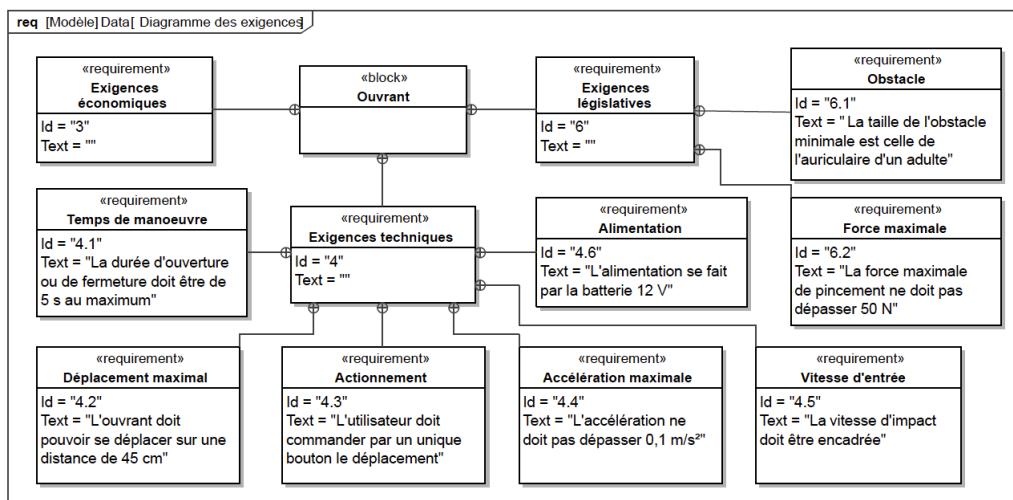


FIGURE 17 – Diagramme des exigences du lève-vitre électrique

2 Modélisation de la mise en place d'un algorithme de commande

Pour détecter la présence d'un obstacle la solution proposée par le constructeur repose sur l'estimation d'une variation de la mesure de vitesse de montée de la vitre. Celle-ci est mesurée à l'aide de capteurs à effet Hall situés près du moteur (figure 18). Une roue magnétique possédant 2 paires de pôles Nord-Sud est solidaire de l'axe du rotor du moteur. Deux capteurs à effet Hall sont placés en quadrature et repèrent les changements de champ magnétique (fronts montants et descendants) de la roue en fonction de la rotation du moteur.

On utilise alors les mesures de variation de durée entre deux impulsions successives pour en déduire une image de la vitesse instantanée. Après la détection d'une impulsion, un prédicteur temporel permet de déterminer le temps auquel la prochaine impulsion est attendue. Si la nouvelle impulsion intervient avant le temps prédit, alors il n'y a pas de blocage, sinon un blocage est détecté et une alarme est déclenchée. En réalité, cette technique conduit à de fausses détections et une modification permettant d'améliorer la robustesse est de ne déclencher l'alarme qu'au bout de 3 dépassements du temps prédit. Cet algorithme est résumé sur la figure 19 pour lequel :

- **appui bouton haut** est un évènement qui survient quand le bouton « monter la vitre » est actionné,

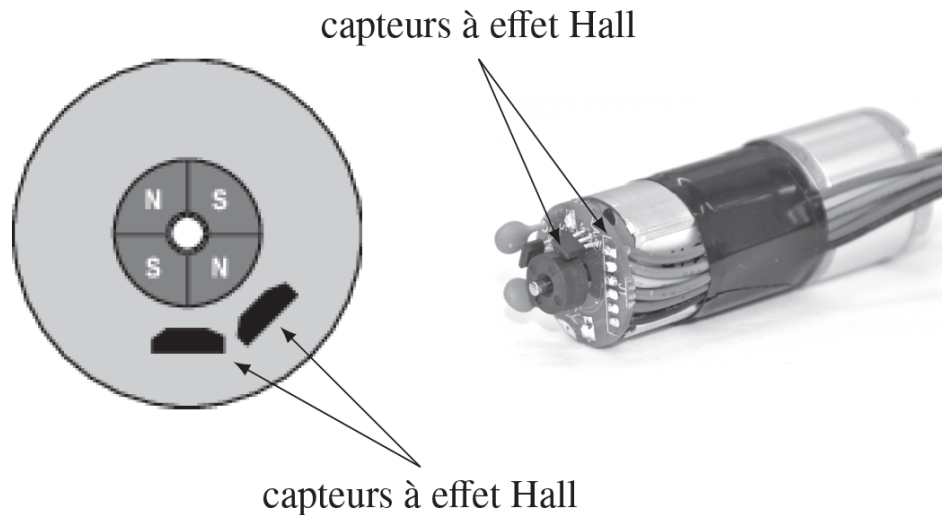


FIGURE 18 – Principe d'un capteur à effet Hall

- **M+** est la variable permettant de faire tourner le moteur dans le sens de la montée de la vitre,
- **M0** permet d'arrêter le moteur,
- **impulsion** est un événement qui survient à chaque nouvelle impulsion envoyée par les capteurs,
- **fin course haut** est un événement permettant de détecter l'arrivée en position haute de la vitre,
- **prediction()** est une fonction qui renvoie le temps auquel la prochaine impulsion est attendue,
- **alarme** permet d'activer l'alarme.

Q 66 : Donner l'expression des deux conditions notées « $t1$ » et « $t2$ » permettant de passer de l'état "montée" à l'état "arrêt" directement.

Q 67 : Compléter le chronogramme (figure 20) en indiquant par des créneaux les durées pendant lesquelles un état est activé et l'évolution du contenu de la variable N. La durée de l'alarme et de l'arrêt est supposée très faible et sera représentée par un dirac (une impulsion).

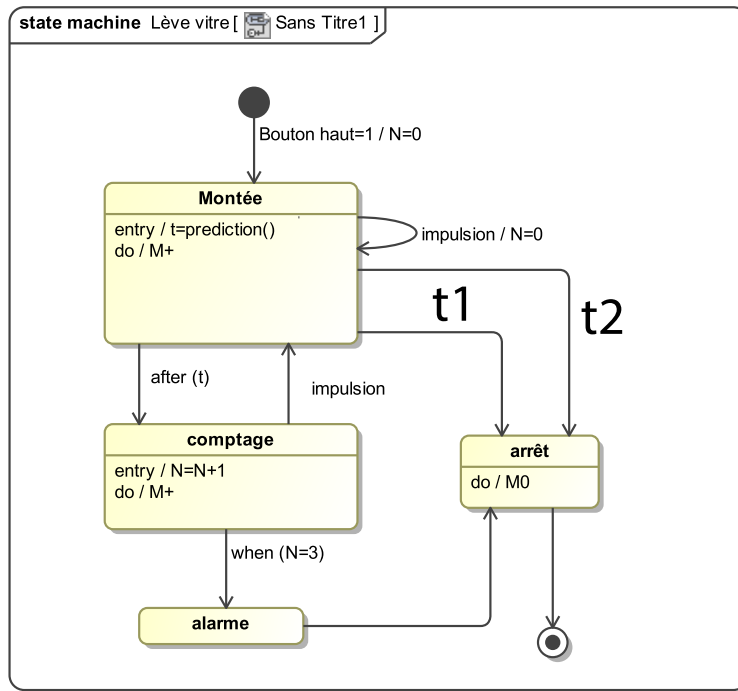


FIGURE 19 – Diagramme d'état de l'algorithme en version simplifiée

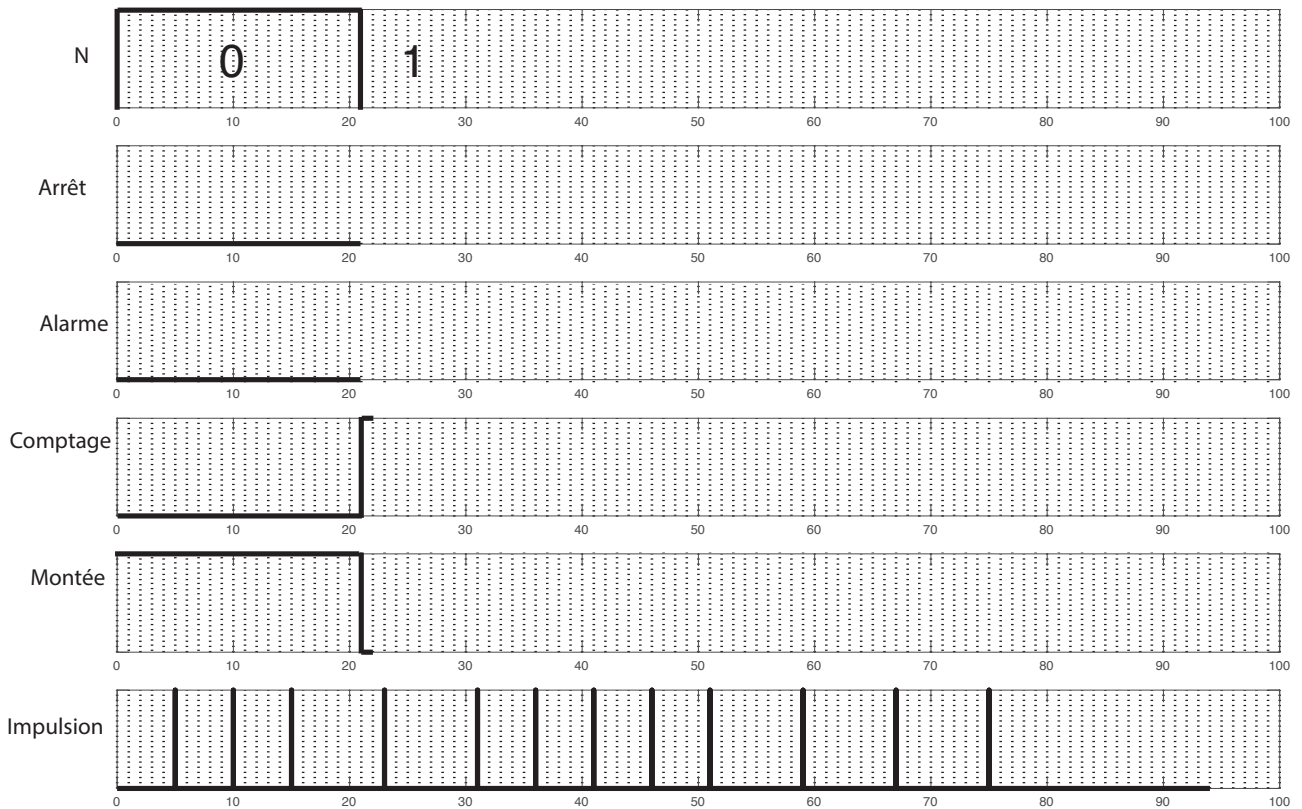


FIGURE 20 – Chronogramme

Exercice 10 : Modélisation fréquentielle d'un simulateur de conduite

Source : CCP PSI 2014

1 Étude d'un simulateur de conduite

a) Présentation du système

Le simulateur étudié dans ce sujet est un simulateur de course automobile à deux degrés de liberté utilisé par des particuliers dans le domaine du loisir (figure 21).

Le simulateur de conduite est un dispositif dont la fonction principale est de reproduire le plus fidèlement possible le comportement d'un système de référence (réel). Par rapport à la conduite sur route, les simulateurs de conduite offrent trois avantages majeurs :

- ils présentent un environnement sans danger pour le conducteur (par exemple pour tester des accidents virtuels) ;
- une même expérience peut être répétée aussi souvent que nécessaire dans des conditions identiques ;
- ils permettent une économie considérable.



FIGURE 21 – Simulateur de course utilisé dans des salles de jeux vidéo

L'exigence principale du système peut se décliner en plusieurs exigences techniques décrites par le diagramme des exigences partiel de la figure 22. Les deux premières exigences sont gérées lors de la conception du jeu vidéo.

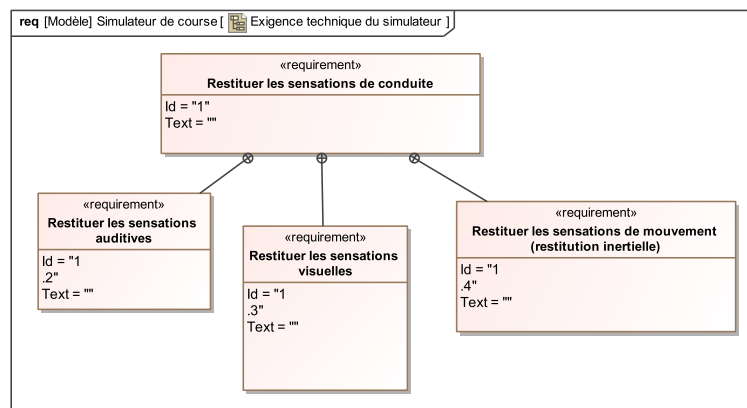


FIGURE 22 – Diagramme des exigences techniques partiel du système

Objectif 5 :

Dans ce sujet, seule l'exigence technique 1.4 "restituer les sensations de mouvement" sera étudiée pour montrer comment recréer le plus fidèlement possible les accélérations. L'objectif de l'étude proposée est de justifier que l'architecture retenue pour le simulateur permet de répondre au besoin. Cette analyse nécessite : la mise en place d'un modèle pour chaque constituant de la chaîne d'information (stratégie de commande étudiée en partie b)) et de la chaîne d'énergie.

b) Stratégie de commande

La structure articulée possède deux degrés de liberté (roulis et tangage) comme indiqué sur la figure 23. Pour garantir une simulation qui soit la plus reproductible possible il est indispensable de mettre au point une stratégie de commande des degrés de liberté qui permette de recréer les accélérations subies par le pilote pour respecter un encombrement réduit.

La stratégie de commande classique est basée sur une séparation fréquentielle des accélérations extraites du jeu vidéo en deux parties. Le schéma-bloc de la figure 24, montre le principe de la commande sur l'angle de tangage α .

Dans tout le sujet, seules les accélérations longitudinales (commande de l'angle de tangage) seront considérées. Une stratégie similaire est adoptée pour l'angle de roulis.

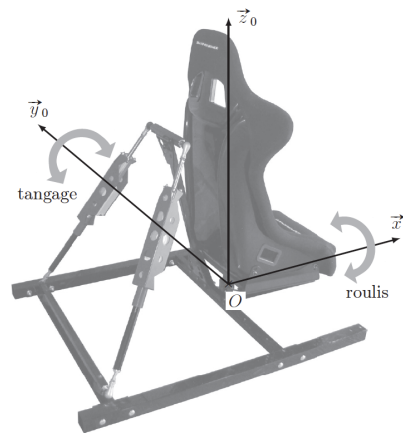


FIGURE 23 – Mouvements de tangage et roulis permettant de générer des accélérations longitudinale et transversale

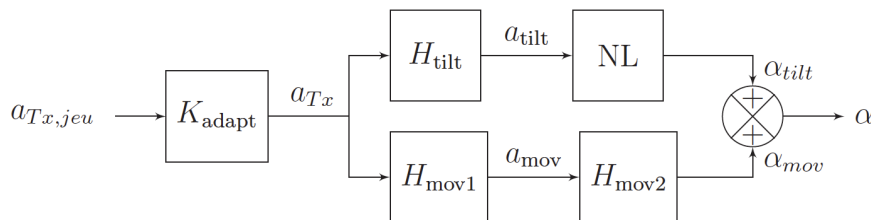


FIGURE 24 – Stratégie de commande pour un mouvement de tangage

On note :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère associé au sol (0), supposé galiléen.
- L'ensemble {conducteur + siège} est noté (1) et est en rotation par rapport au sol (0) autour d'un axe (O, \vec{y}_0) .
- On associe le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ à l'ensemble (1) et on note $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle de tangage de (1) par rapport à (0).

Le siège est piloté de telle manière que l'accélération donnée par le jeu vidéo soit équivalente à l'accélération ressentie par le pilote sur le siège. En notant \vec{a}_T l'accélération du véhicule, on obtient la définition suivante :

$$\vec{a}_T = a_{Tx} \cdot \vec{x}_1 + a_{Tz} \vec{z}_1 = \vec{a}(A, 1/0) - \vec{g}.$$

Avec :

$$\begin{cases} a_{Tx} = h\ddot{\alpha} - g \cdot \sin(\alpha(t)) \\ a_{Tz} = -h\dot{\alpha}^2 + g \cdot \cos(\alpha(t)). \end{cases}$$

Dans la stratégie adoptée, l'accélération ressentie a_{Tx} est décomposée en deux parties $a_{Tx} = a_{mov} + a_{tilt}$. La composante a_{tilt} correspond à la partie de l'accélération maintenue tandis que la composante a_{mov} caractérise les variations rapides d'accélération.

Obtention de l'accélération a_{tilt} La partie a_{tilt} est extraite de a_{Tx} en utilisant un filtre $H_{tilt}(p)$ caractérisé par les diagrammes de Bode sur le document réponse figure 47. Elle représente les mouvements maintenus dans le temps.

Q 1 : Proposer une forme de fonction de transfert pour la fonction $H_{tilt}(p)$ en fonction de ces diagrammes de Bode et identifier ses paramètres caractéristiques. Pour cela, on fera apparaître sur le diagramme de Bode du document réponse (figure 47) le tracé du diagramme asymptotique

c) Détermination de l'accélération a_{mov}

Le filtre utilisé pour accéder à la partie a_{mov} a pour fonction de transfert (schéma bloc, figure 24)

$$H_{mov1}(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$$

On choisit une valeur de $\tau = 0,1s$.

Q 2 : Tracer sur le document réponse (figure 48) les diagrammes de Bode asymptotiques et l'allure des diagrammes réels de ce filtre. Préciser le nom de ce filtre et son intérêt vis-à-vis de la composante à extraire.

- On pourra décomposer en un dérivateur pur et un premier ordre.
- On pourra chercher à trouver pour quelle valeur de ω , le dérivateur pur τp coupe l'axe des abscisses.

Une fois l'accélération filtrée, on obtient la relation $a_{mov}(t) = h \cdot \ddot{\alpha}_{mov}(t)$.

Q 3 : Par identification à l'aide du schéma bloc 24 et après avoir passé dans le domaine de Laplace l'expression précédente, en déduire la fonction de transfert $H_{mov2}(p)$

En imposant une consigne $a_{Tx} = a_0 \cdot u(t)$ où a_0 est une constante et $u(t)$ la fonction échelon unitaire, on obtient la courbe $\alpha_{mov}(t)$ définies sur la figure 25.

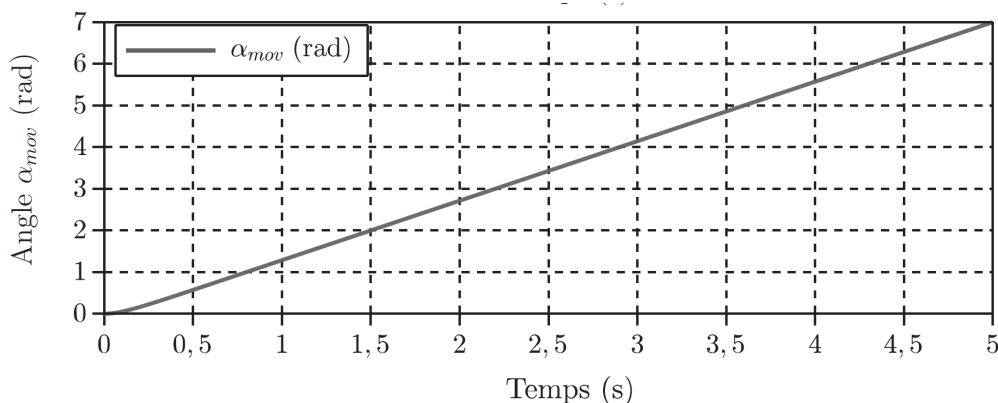


FIGURE 25 – Angle $\alpha_{mov}(t)$ en fonction du temps (en s) pour une consigne d'accélération en échelon.

Q 4 : A partir de la fonction de transfert $H_{mov2}(p)$ et de la consigne en échelon imposée, justifier l'allure de courbe obtenue par simulation en régime établi et conclure sur la nécessité de choisir un filtre plus élaboré.

- On pourra calculer dans le domaine de Laplace $\alpha_{mov}(p)$.
- On pourra utiliser les théorèmes aux limites pour étudier le comportement asymptotique de $\alpha_{mov}(t)$ en $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$.
- On pourra utiliser les théorèmes aux limites pour étudier le comportement asymptotique de $\frac{d\alpha_{mov}(t)}{dt}$ en $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$.

On modifie donc la fonction $H_{mov2}(p)$ en la multipliant par un filtre particulier appelé filtre Washout ayant pour but de ramener à zéro la position linéaire obtenue pour une accélération a_{Tx} constante. En choisissant un filtre adapté, on retient la fonction globale suivante :

$$H_{mov1}(p) \times H_{mov2}(p) = \frac{K \cdot p}{(1 + \tau \cdot p)^3}$$

Q 5 : Montrer alors qu'en régime permanent, l'angle $\alpha_{mov}(t)$ obtenu pour une accélération a_{Tx} de type échelon (de valeur a_0) est nul.

Q 6 : Représenter dans le domaine fréquentiel (document réponse figure 49) la fonction de transfert filtrée : $H_{mov1}(p) \times H_{mov2}(p) = \frac{K \cdot p}{(1+\tau \cdot p)^3}$ avec $K = 0,1$ et $\tau = 0,1$ s en traçant le diagramme de Bode asymptotique.

d) Étude de l'asservissement du système

On se propose ici d'étudier dans le domaine fréquentiel la FTBO du système donnée par :

$$FTBO(p) = \frac{1}{1,4 \times 10^{-5} p^2 + 10^{-3} p + 3,5 \cdot 10^{-4}}$$

Q 7 : Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et identifier les coefficients associés.

Q 8 : Sur le diagramme de Bode de la figure 50, représenter le diagramme asymptotique décrivant les lieux de transfert de la FTBO.

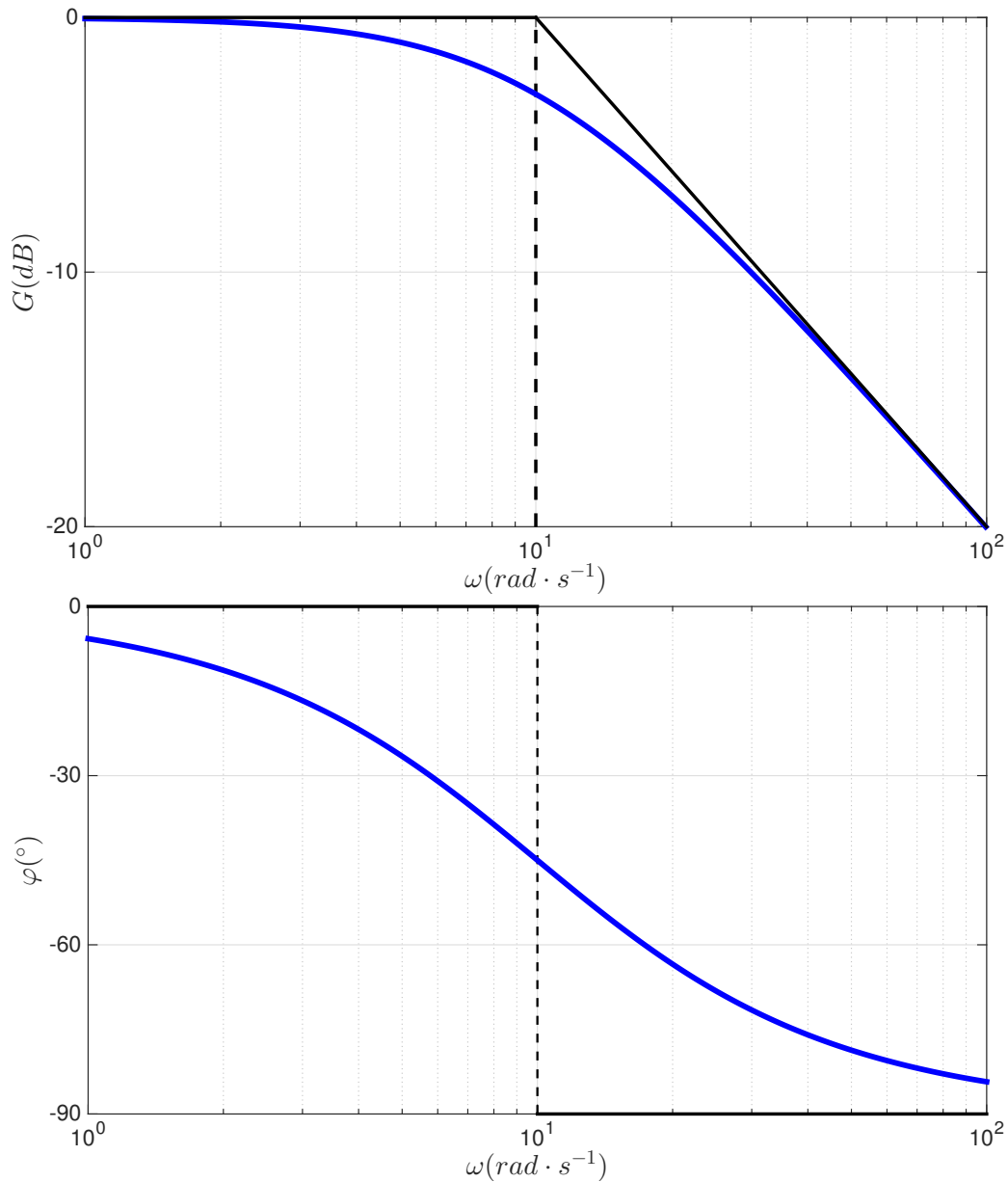


FIGURE 26

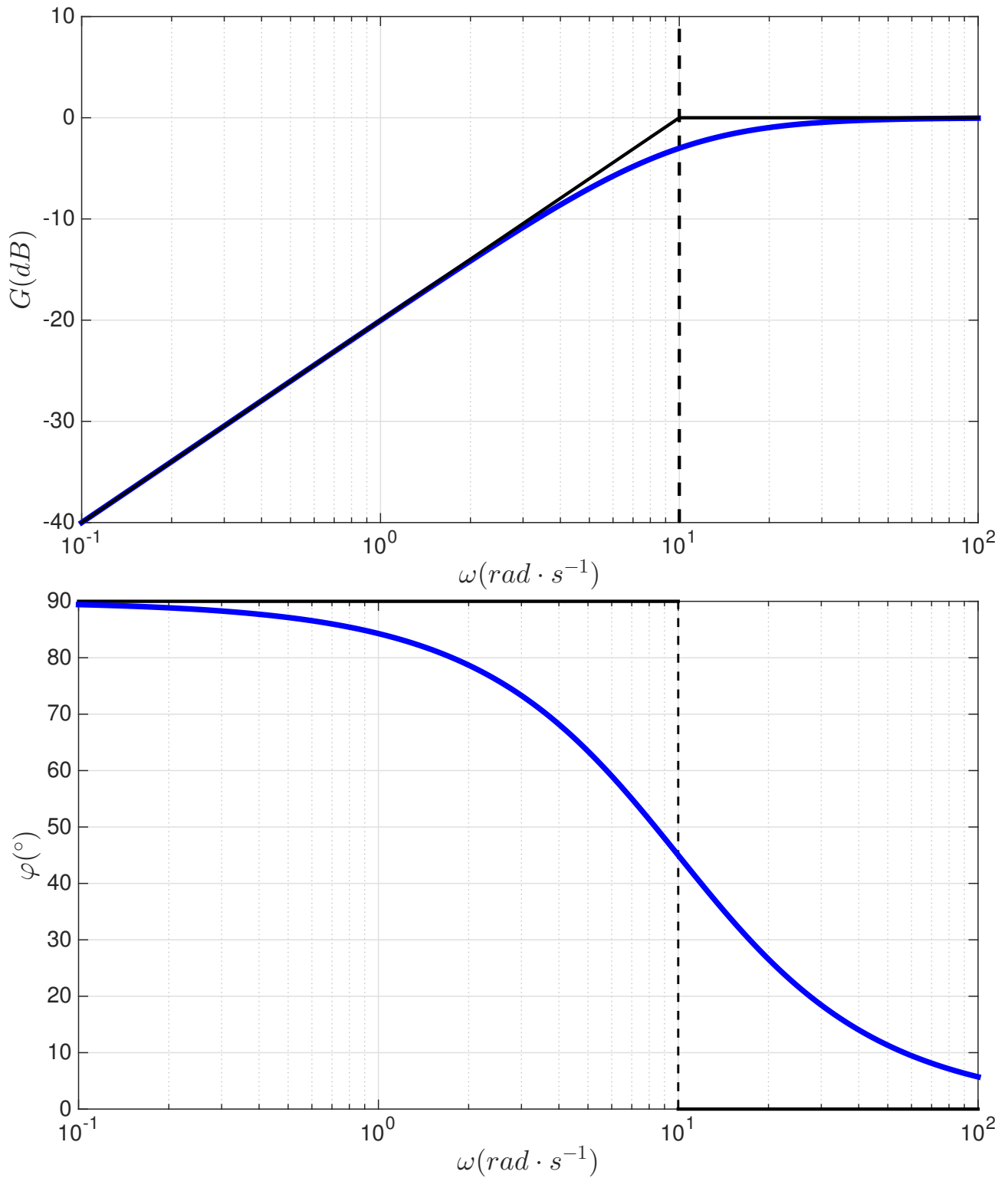


FIGURE 27

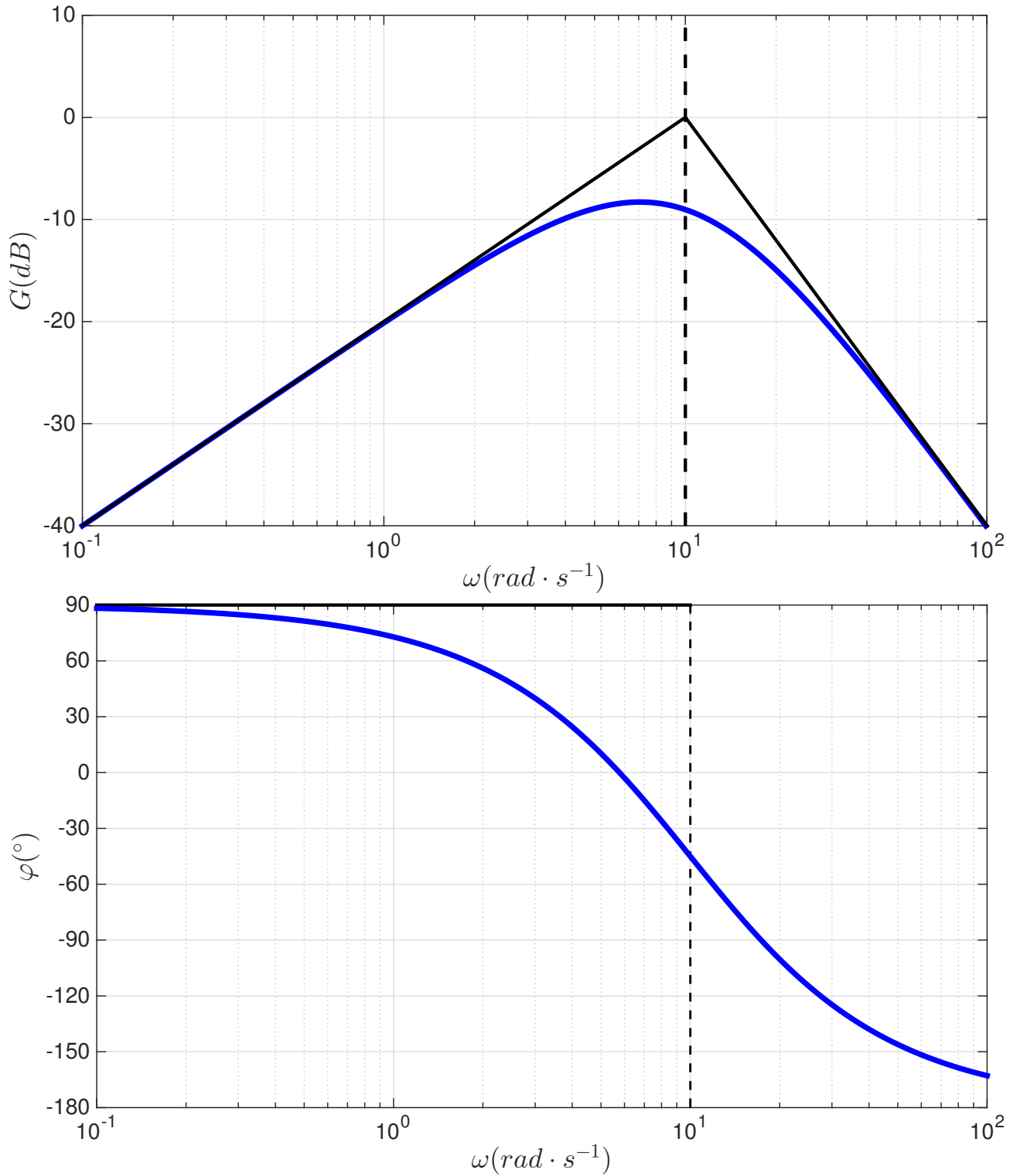


FIGURE 28

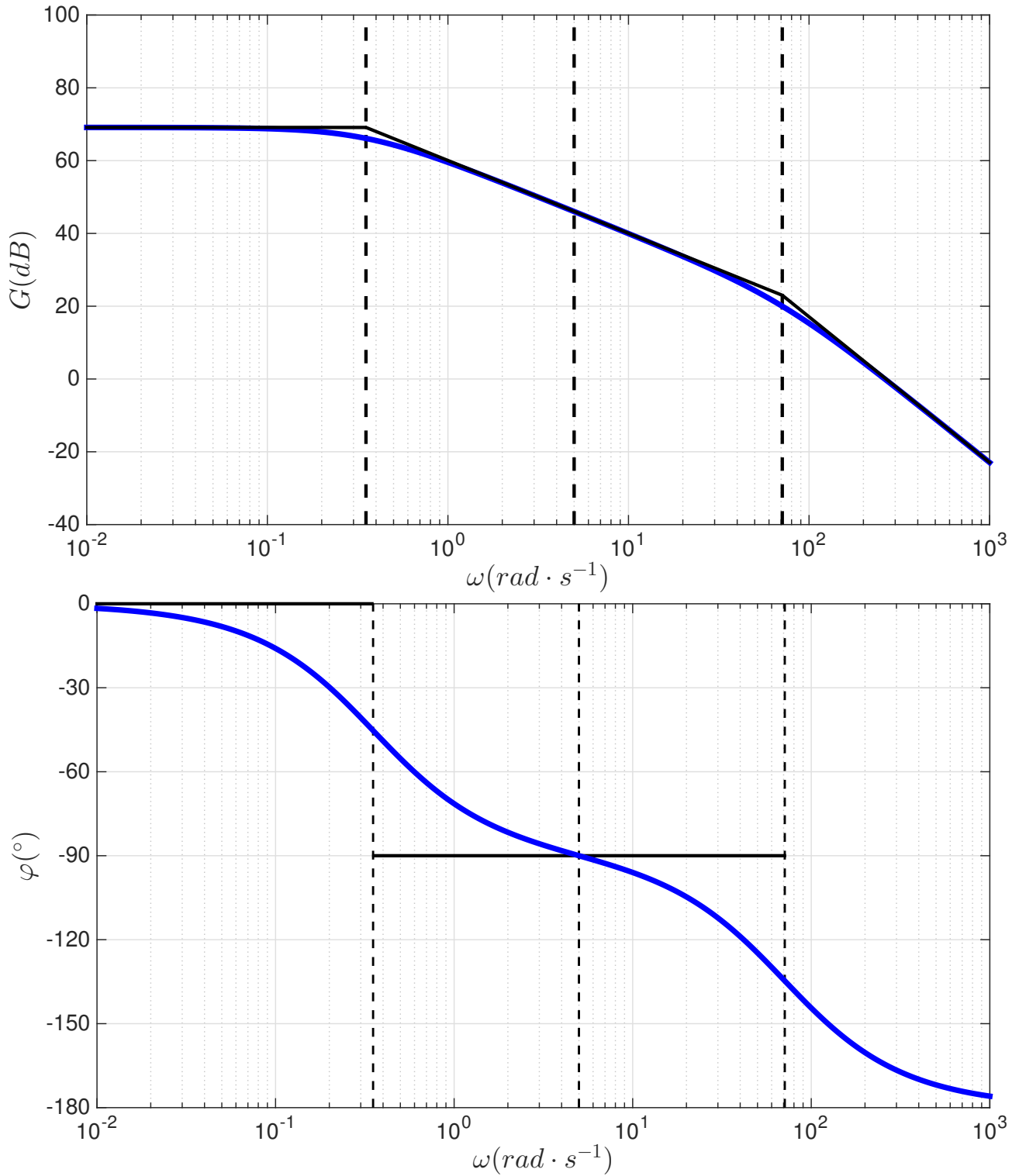
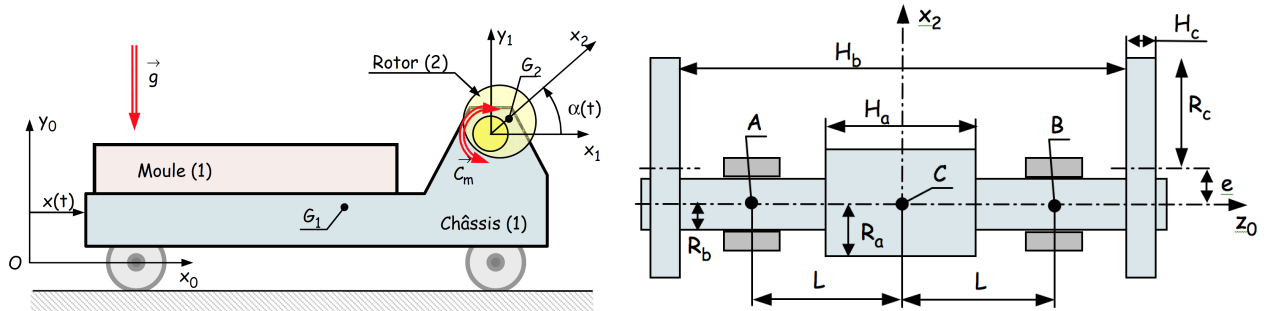


FIGURE 29

Exercice 11 :

1 Vibreur de béton

La figure ci-contre représente schématiquement une machine à vibrer des éléments préfabriqués en béton.



- **Châssis (1)** : L'ensemble (1) mobile en translation rectiligne comprend le châssis, le moule, le béton et le stator du moteur électrique. Il possède une masse M_1 et un centre d'inertie G_1 . Sa position par rapport au repère (R_0) , galiléen, lié au sol, est définie par $x(t)$. Les roues, en liaison pivot sans frottement avec (1), sont supposées de masse et inertie négligeables.
- **Rotor (2)** : L'ensemble (2), tournant par rapport à (1), comporte le rotor moteur (a), l'arbre (b), et deux disques excentrés (c). On note M_2 sa masse et G_2 son centre d'inertie, repéré par $\vec{CG}_2 = a_2 \cdot \vec{x}_2$. La position angulaire du rotor (2) par rapport au châssis (1) est définie par $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \alpha(t)$.
- La matrice d'inertie de l'ensemble (2) est notée :

$$\bar{\bar{I}}_C(2) = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

- Le moteur exerce sur le rotor et sur le châssis un couple noté $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$.

a) Questions

Q 9 : $(C, \vec{x}_2, \vec{z}_0)$ et $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ sont plans de symétrie pour le rotor. Préciser quelle(s) simplification(s) cela confère à la matrice d'inertie $\bar{\bar{I}}_C(2)$.

Q 10 : Déterminer, en fonction de la masse volumique ρ du matériau, supposée uniforme, et des dimensions du rotor :

- la masse M_2 ;
- la position a_2 du centre d'inertie G_2 ;
- les coefficients A_2, B_2 et C_2 de la matrice d'inertie.

Q 11 : Procéder à l'étude dynamique du système. En déduire les équations du mouvement de (1) et de (2).

Q 12 : On suppose que le rotor (2) tourne à vitesse constante $\overline{\Omega(2/1)} = \omega \cdot \vec{z}_0$ par rapport à (1). Intégrer dans cette hypothèse les équations du mouvement. En déduire en particulier :

- l'expression de $x(t)$ si les conditions initiales sont les suivantes : $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \alpha(0) = 0$ et $\omega(0) = \omega = cte$.
- l'expression du couple moteur C_m permettant de générer le mouvement uniforme du rotor.

Exercice 12 : Echelle pivotante automatique

Source : CCP PSI 2007

1 Échelle Pivotante Automatique

On donne ci-dessous ma modélisation d'un système d'échelle pivotante automatique de pompier.

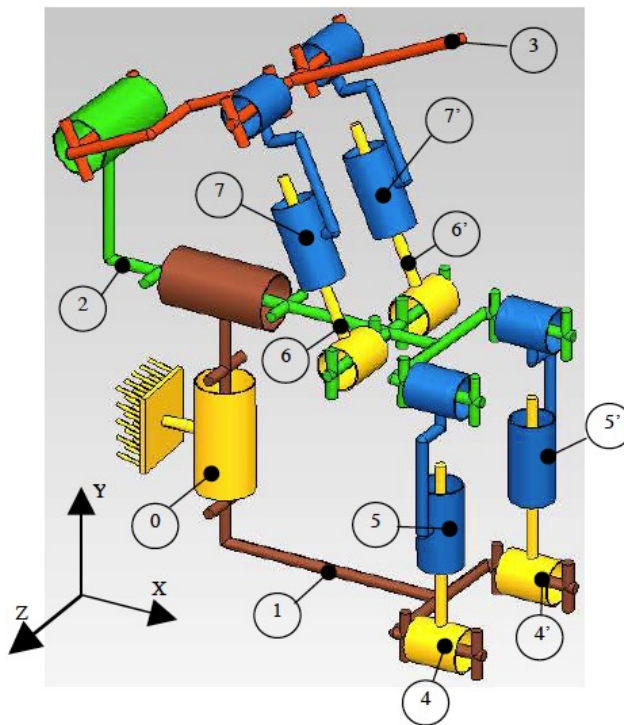


FIGURE 30 – Échelle Pivotante Automatique

Q 13 : Tracer le graphe des liaisons.

Q 14 : Déterminer le degré d'hyperstaticité du mécanisme.

Q 15 : Proposez des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.

Exercice 13 : ROBOVOLC

Source : XENS 2017

1 présentation

Le projet ROBOVOLC est de concevoir un robot mobile pour l'exploration volcanique. Ce robot doit être capable de :

- s'approcher d'un cratère actif;
- collecter des échantillons rocheux issus de rejets éruptifs;
- collecter des échantillons gazeux;
- collecter d'autres données physiques et chimiques.

La mobilité sur terrain accidenté est obtenue, en plus de par la motorisation indépendante des roues, par l'utilisation d'un châssis articulé. Celui-ci a une structure tubulaire avec des articulations passives (non actionnées) permettant à ROBOVOLC de s'adapter à toute surface non plane. Une illustration des cinq mouvements indépendants permis par les articulations est donnée sur la Figure 42.

Le terrain volcanique est en pratique très accidenté, avec la présence d'obstacles (roches) et de fortes pentes (Figure 1). Par conséquent, le système de locomotion de ROBOVOLC doit être adapté à ce type de terrain.

L'objectif de cette partie est de valider les performances d'agilité et de franchissement d'obstacle du système sur des terrains non structurés avec difficultés topologiques (pentes, obstacles). On souhaite vérifier les critères suivants du cahier des charges :

| Critère | Valeur |
|--|--------|
| Masse maximale des composants modulaires | 200kg |
| Pente maximale du sol | 40° |
| Hauteur maximale d'un obstacle | 400mm |



FIGURE 31 – ROBOVOLC

| | | |
|---|---|---|
| <p>châssis au repos</p> | <p>mouvement 1 : rotation de l'essieu avant au- tour de l'axe longitudinal</p> | <p>mouvement 2 : rotation de l'essieu central autour de l'axe longitudinal</p> |
| <p>mouvement 3 : rotation de l'essieu arrière autour de l'axe longitudinal</p> | <p>mouvement 4 : rotation de l'arbre avant au- tour de l'axe transversal</p> | <p>mouvement 5 : rotation de l'arbre arrière autour de l'axe transversal</p> |

TABLE 1 – Illustration des mouvements de déformation du châssis

2 Modélisation

Le châssis est composé de cinq parties orientables les unes par rapport aux autres (Figure 32) :

- l'essieu avant, noté EAV, reliant les roues avant 1 et 2;
- l'essieu central, noté EC, reliant les roues centrales 3 et 4;
- l'essieu arrière, noté EAR, reliant les roues arrière 5 et 6;
- l'arbre avant, noté AAV, connectant les essieux EAV et EC;
- l'arbre arrière, noté AAR, connectant les essieux EC et EAR.

L'empattement entre deux essieux successifs est noté a , et la distance entre deux roues d'un même essieu est notée $2e$.

Les différentes parties sont reliées entre elles par des articulations possédant une raideur en rotation imposée. Par la suite, on supposera cette raideur négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu. Un schéma cinématique de la plateforme (châssis+roues) est présenté sur la Figure 3.

Les deux articulations EC-AAV et EC-AAR, situées à une distance longitudinale $\pm b$ de l'essieu EC, autorisent une rotation selon les directions \vec{x} et \vec{y} ; elles sont modélisées par des liaisons rotule à doigt de centres respectifs B et C.

Les deux articulations EAV-AAV et EAR-AAR autorisent une rotation selon la direction \vec{x} seulement; elles sont modélisées par des liaisons pivot d'axe (O, \vec{x}) .

D'autre part, les six liaisons essieu-roue sont modélisées par des liaisons pivot d'axe (A, \vec{y}) (roues avant), (O, \vec{y}) (roues centrales) ou (D, \vec{y}) (roues arrière).

De plus, le contact de chaque roue i avec le sol est modélisé en première approche par une liaison ponctuelle de normale (P_i, \vec{z}) .

On considère que les liaisons sont parfaites sans frottements.

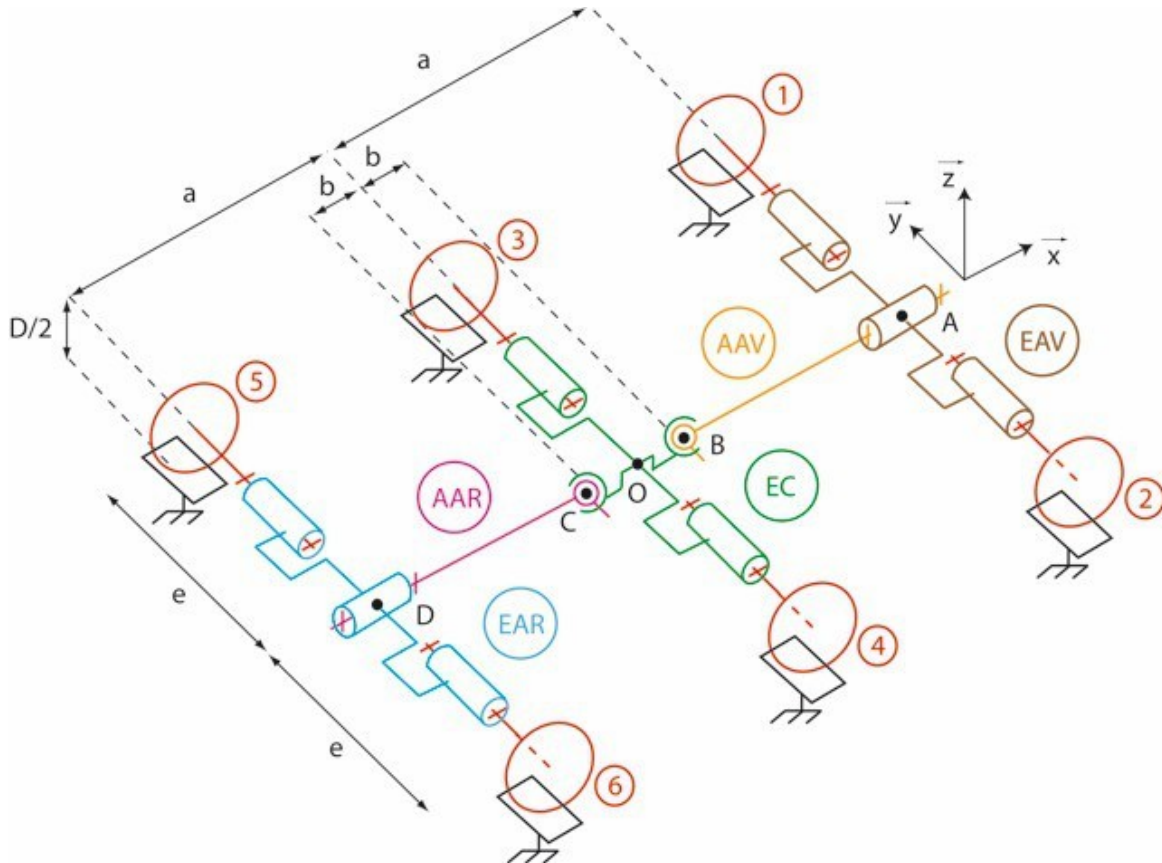


FIGURE 32 – Schéma cinématique

On considère dans cette première partie que le sol est horizontal (comme sur la figure 32).

Q 16 : Tracer le graphe de structure du système.

Q 17 : Déterminer le nombre d'inconnues cinématiques, le nombre cyclomatique, puis le nombre d'équations à écrire. Conclure

Q 18 : Déterminer le nombre d'inconnues de liaison, Préciser le nombre d'équations d'équilibre que l'on peut écrire.

On isole la roue R_i . On note C_i le centre de la liaison pivot et I_i le point de contact avec le sol (avec $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

On note :

- $\vec{P}_{AV} = -P_{AV} \cdot \vec{z}$ le poids de la partie avant que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre AAV.
- $\vec{P}_{AR} = -P_{AR} \cdot \vec{z}$ le poids de la partie arrière que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre AAR.
- $\vec{P}_C = -P_C \cdot \vec{z}$ le poids de la partie centrale que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre EC en O.

Les couples moteurs sont nuls.

Q 19 : Écrire le système d'équation relatif à l'équilibre de la roue R_i . Conclure On isole maintenant l'essieu avant (respectivement l'essieu arrière)

Q 20 : Écrire les équations de l'équilibre.

On isole maintenant l'arbre avant AAV (respectivement l'arbre arrière AAR).

Q 21 : Écrire les équations de l'équilibre.

Q 22 : Terminons, en écrivant le dernier équilibre sur EC et conclure sur l'hyperstaticité et les mobilité.

Exercice 14 :

1 Exercice : modélisation dynamique et énergétique d'un cycliste

a) Présentation

La vitesse d'un cycliste dépend de la puissance fournie par celui-ci, mais aussi du vent et de la pente de la route qui s'opposent ou contribuent à faire avancer le cycliste, ainsi que de la résistance au roulement des pneumatiques. La puissance d'un cycliste moyen est de 250W. L'objectif de ce problème est d'exprimer cette vitesse en fonction des paramètres cités : pour cela nous allons modéliser l'ensemble {vélo + cycliste + sol}, écrire les équations de comportement et les résoudre.

b) Modélisation du {vélo + cycliste + sol}

Le modèle cinématique est constitué de :

- Le sol auquel est associé un repère Galiléen 0.
- Le {cadre + cycliste} 1 de masse M et de centre d'inertie G.
La cadre est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport à 0 de direction \vec{x}_0 .
- La roue avant 2 de rayon R, de centre d'inertie O_2 , de masse m, et de moment d'inertie par rapport à l'axe (O_2, \vec{z}_0) égal à I.
 - Cet ensemble est en liaison pivot **parfaite** d'axe (O_2, \vec{z}_0) par rapport à 1.
 - Il est aussi en liaison roulement sans glissement en A_2 avec 0. Liaison non parfaite car présentant une résistance au roulement.
- La roue arrière 3 de rayon R, de centre d'inertie O_3 , de masse m, et de moment d'inertie par rapport à l'axe (O_3, \vec{z}_0) égal à I.
 - Elle est en liaison pivot parfait d'axe (O_3, \vec{z}_0) par rapport à 1.
 - Il est aussi en liaison roulement sans glissement en A_3 avec 0. Liaison non parfaite car présentant une résistance au roulement.
 - les deux roues sont donc supposées de masses et moments d'inerties identiques.

Actions mécaniques

- Le {cadre + cycliste} et les roues subissent l'action de la pesanteur : $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_g$.
- Le {cadre + cycliste} subit un effort de traînée aérodynamique (lié au vent) modélisé par un glisseur en G et fonction de la vitesse relative du cycliste / air :

$$\{\mathcal{T}_{(air \rightarrow 1)}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \rho S C_x (v(t) - v_{vent})^2 \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}.$$

Avec

- ρ : masse volumique de l'air,
 - S : surface maître couple,
 - C_x : coefficient de traînée du profil,
 - v_{vent} : vitesse du vent (positive si opposée au cycliste).
 - Le cycliste développe une puissance notée $P_{cyc}(t) = \mathcal{P}(1 \leftrightarrow 4)$.
 - Les actions mécaniques du sol sur les roues sont modélisées :
 - pour la résultante selon le modèle de Coulomb,
 - pour le couple, en intégrant une de résistance au roulement proportionnel à la résultante.
- On a donc avec $i = \{2, 3\}$:

$$\{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow i)}\}_{A_i} = \left\{ \begin{array}{c} T_i \vec{x}_0 + N_i \vec{y}_0 \\ N_i r \vec{z}_0 \end{array} \right\}.$$

Avec

- T_i lié à N_i par le modèle de Coulombs (configuration d'adhérence),
- r : facteur de résistance au roulement.
- Les autres actions mécaniques dans les liaisons sont celles de liaisons parfaites.

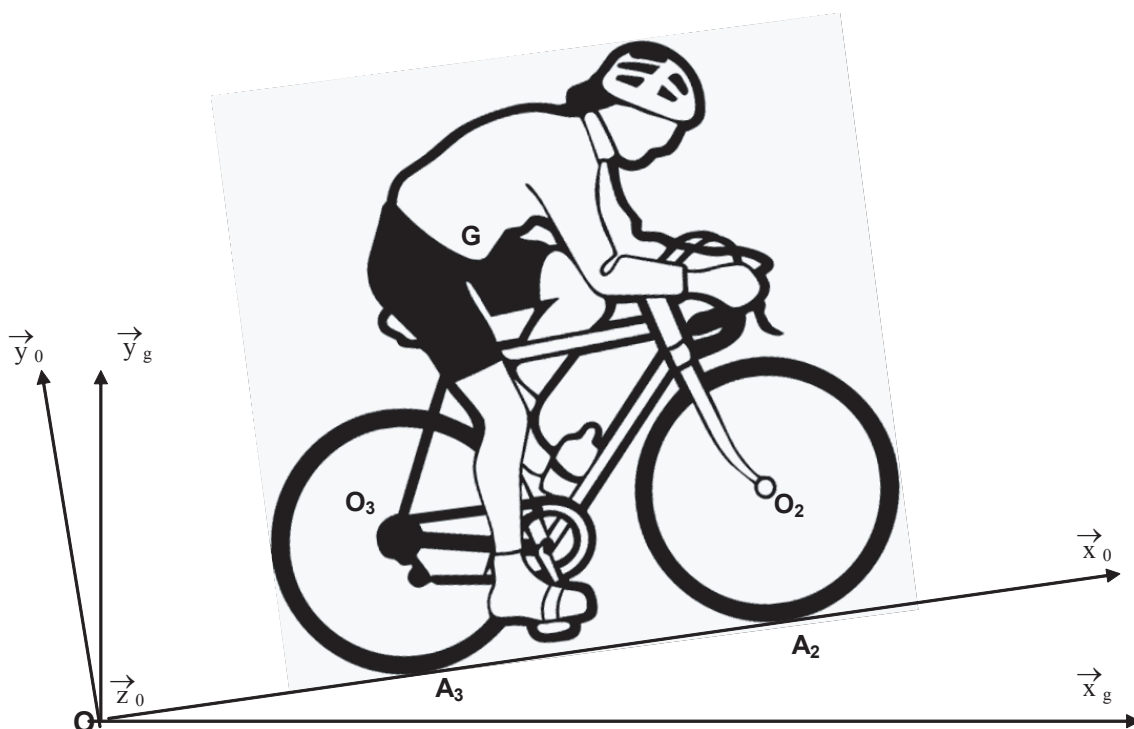


FIGURE 33

c) Paramétrage

- L'angle α est l'angle de la pente tel que $\alpha = (\vec{x}_g, \vec{x}_0) = (\vec{y}_g, \vec{y}_0)$,
- $\vec{OG} = x(t) \vec{x}_0 + h \vec{y}_0$ et on note $v(t) = \dot{x}(t)$,
- Comme les roues ont même diamètre, et que **le roulement se fait sans glissement**, il n'est pas nécessaire de démontrer que les roues tournent à la même vitesse :

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{3/1} = -\omega(t) \vec{z}_0.$$

d) Questions

Q 23 : Par une relation de fermeture cinématique passant par la boucle (2, 1, 0) déterminer $v(t)$ en fonction de $\omega(t)$ et de R .

On isole $\Sigma = \{1, 2, 3\}$.

Q 24 : Écrire l'équation scalaire (simple) du PFD qui donne $(N_2 + N_3)$ en fonction des masses et de la pente.

Q 25 : Exprimer $E_c(\Sigma/R_0)$ en fonction de $v(t)$. On peut ainsi faire apparaître la masse équivalente M_{eq} du système.

Q 26 : Exprimer l'énergie potentielle de la pesanteur sur Σ par rapport au Galiléen.

Q 27 : Déterminer les puissances suivantes :

1. Puissance de la pesanteur sur Σ par rapport au Galiléen, Puissance dissipée dans la résistance au roulement de la roue 2, Puissance dissipée dans la résistance au roulement de la roue 3, Puissance de traînée aérodynamique.

Q 28 : Conclure en précisant la puissance des actions mécanique extérieures à Σ en fonction de $v(t)$ ainsi que les puissances intérieures. Justifier.

Q 29 : Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ afin de déterminer $P_{cyc}(t)$ en fonction de $v(t)$ et des

paramètres constants, g , M , m , I , R , r , S , C_x , v_{vent} , ρ et α .

Exercice 15 :

1 Étude du déploiement d'une échelle de pompier

a) Présentation de l'EPAS

L'EPAS est une "Échelle Pivotante Automatique à Commande Séquentielle". Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate-forme, pouvant recevoir deux personnes et un brancard, le plus rapidement possible et en toute sécurité.

On suppose que le système de commande du déploiement permet d'obtenir une vitesse de la plate-forme trapézoïdale :

- Une première phase de mouvement uniformément accéléré, d'accélération Γ_0 .
- Une deuxième phase de mouvement uniforme, de vitesse V_0 .
- Une dernière phase de mouvement uniformément décéléré, d'accélération $-\Gamma_0$.

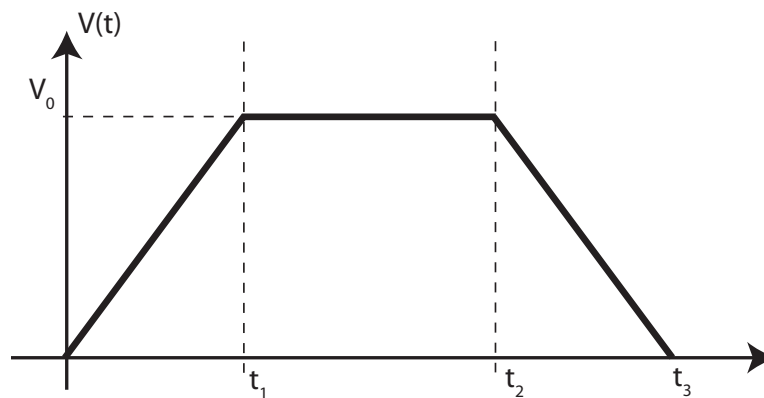


FIGURE 34 – Profil de vitesse

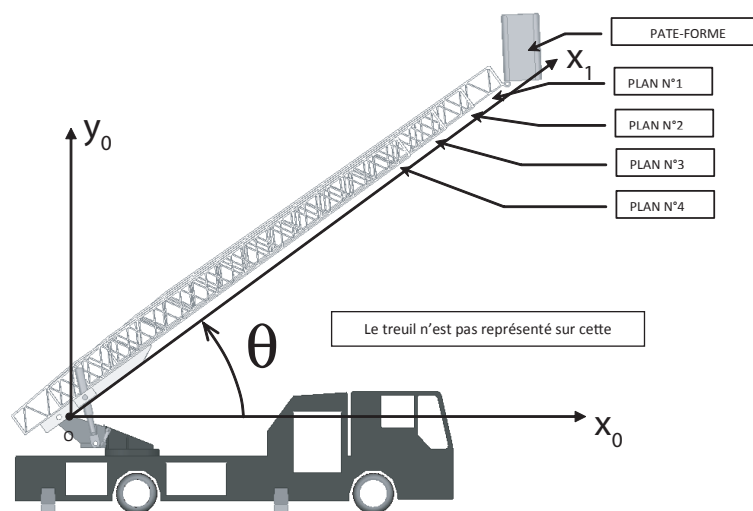


FIGURE 35 – Système de déploiement d'une échelle de pompier

b) Paramétrage

- Chassis (0) : on lui associe le repère $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ supposé galiléen.
- Parc échelle (PE) : on lui associe le repère $R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ tel que $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta$ angle constant et connu ; chaque plan P_i est de masse $m = 270\text{kg}$ et de centre de gravité G_i . Chaque plan du parc échelle se translate par rapport au châssis, suivant \vec{x}_1 à une vitesse deux fois plus grande que le plan suivant :

$$\vec{V}(P, P_i / R_0) = 2 \vec{V}(P, P_{i+1} / R_0).$$

Le guidage des plans les uns par rapport aux autres engendre des efforts s'opposant aux mouvements que l'on modélisera par un glisseur dont le module de la résultante sera noté F constant.

- Plate-forme (PF) liée au plan P_1 : en translation rectiligne par rapport au châssis suivant la direction \vec{x}_1 à la vitesse $V(t)$. On note sa masse $M = 270\text{kg}$ et son centre de gravité G_P .
- Un treuil de rayon R , tournant à une vitesse de rotation notée ω , entraîne le câble principal dont les extrémités sont fixées au plan n°3. Le moment d'inertie du treuil par rapport à son axe de rotation, sera noté I . Le moment du couple moteur exercé par l'ensemble moto réducteur hydraulique sera noté C .

c) Questions

Q 30 : Déterminez l'énergie cinétique galiléenne de la plate-forme et des quatre plans du parc échelle en fonction de $V(t)$ et des différentes masses.

Q 31 : Déterminez l'énergie cinétique galiléenne du treuil en fonction de $V(t)$.

Q 32 : Déterminez la puissance des actions extérieures à l'ensemble $\Sigma = \{\text{treuil} + \text{parc échelle} + \text{plate-forme}\}$ en fonction de $V(t)$.

Q 33 : Déterminez la puissance des actions intérieures de ce même ensemble en fonction de $V(t)$.

Q 34 : En déduire le moment du couple moteur nécessaire pendant la première phase de mouvement.

Exercice 16 :

1 Étude d'une quille pendulaire

a) Introduction

L'étude proposée s'intéresse à quelques aspects de la conception d'une quille pendulaire équipant un monocoque 60' IMOCA.

Le comportement dynamique d'un voilier est conditionné par ses interactions avec les deux fluides avec lesquels il entre en contact : l'air et l'eau. Il reçoit de l'énergie sous la forme des actions aérodynamiques dues au mouvement relatif air/voiles. Ces actions mécaniques le font avancer et provoquent son inclinaison autour de son axe longitudinal (axe de direction \vec{z}_N sur la figure 36). C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids. Cette quille est généralement constituée d'un voile immergé dans l'eau à l'extrémité duquel se trouve un lest profilé. L'efficacité de la quille dépend de la masse du lest et de la longueur du voile. Ces deux paramètres présentent des limitations : le lest ne peut être trop important sous peine de solliciter dangereusement le voile de quille et la longueur de quille est limitée par le tirant d'eau maximal admissible (il faut permettre l'entrée dans les ports sans toucher le fond!).

b) Paramétrage

Le système de quille pendulaire est composée :

- Du berceau N encastré sur la coque du navire et dont le repère associé est $R_N (O, \vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$.
- de la quille 1 constituée du voile et du lest d'extrémité et dont le repère associé est $R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)$.
- Du vérin 2-4 constitué du piston 2 et du cylindre 4 et dont les repères associés sont respectivement $R_2 (A_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $R_4 (C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (la rotation relative 2-4 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de R_2 et R_4 seront confondues).
- Du vérin 3-5 constitué du piston 3 et du cylindre 5 et dont les repères associés sont respectivement $R_3 (A_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et $R_5 (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ (la rotation relative 3-5 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de R_3 et R_5 seront confondues).

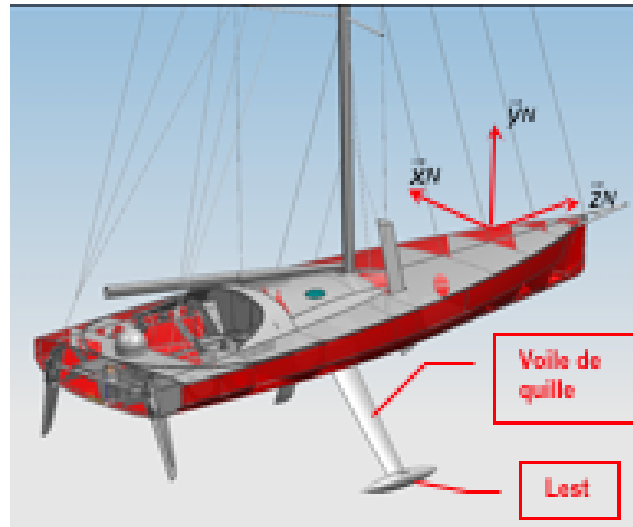


FIGURE 36 – Voilier 60' IMOCA - Image Cabinet Finot-Conq

- Le paramétrage complet et la définition des liaisons entre ces solides est donné sur les figure 38 et 37.

c) Modèle 3D

- $\vec{OA} = R \cdot \vec{y}_1$; $\vec{AA}_2 = -d \cdot \vec{z}_N$; $\vec{AA}_3 = d \cdot \vec{z}_N$;
- $\vec{OC} = -a \cdot \vec{x}_N + b \cdot \vec{y}_N - d \cdot \vec{z}_N$;
- $\vec{OB} = a \cdot \vec{x}_N + b \cdot \vec{y}_N + d \cdot \vec{z}_N$;
- $\vec{DO} = L_{t1} \cdot \vec{y}_1$; $\vec{OG}_1 = -L_1 \cdot \vec{y}_1$;
- $\vec{A_2G_2} = -L_2 \cdot \vec{x}_2$; $\vec{A_3G_3} = -L_2 \cdot \vec{x}_3$
- avec $R > 0$; $a > 0$; $d > 0$; $b > 0$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, $L_3 > 0$ et $L_{t1} > 0$;
- $\vec{CA_2} = x_{24} \cdot \vec{x}_2$ et $\vec{A_3B} = x_{35} \cdot \vec{x}_3$

| Liaison | Type | Caractéristique géométrique | Paramètres |
|---------|-------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|
| N/1 | Pivot | Axe (O, \vec{z}_N) | $\theta_1 = (\vec{x}_N, \vec{x}_1)$ |
| N/4 | Pivot (sphérique en 3D) | Axe (C, \vec{z}_N) | $\theta_2 = (\vec{x}_N, \vec{x}_2)$ |
| N/5 | Pivot (sphérique en 3D) | Axe (B, \vec{z}_N) | $\theta_3 = (\vec{x}_N, \vec{x}_3)$ |
| 2/4 | Pivot glissant | Axe (A_2, \vec{x}_2) | $\vec{CA_2} = x_{24} \cdot \vec{x}_2$ |
| 5/3 | Pivot glissant | Axe (A_3, \vec{x}_3) | $\vec{A_3B} = x_{35} \cdot \vec{x}_3$ |
| 2/1 | Pivot (sphérique en 3D) | Axe (A_2, \vec{z}_N) | |
| 3/1 | Pivot (sphérique en 3D) | Axe (A_3, \vec{z}_N) | |

TABLE 2 – Paramétrage des liaisons

Remarque 1 : Modélisation plane

Pour la modélisation plane le plan d'étude est $(A, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$. Dans ce modèle, les points A_2 et A_3 sont confondus avec le point A ($d = 0$) et les points C et B sont projetés dans le plan $(A, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$.

On rappelle qu'une partie cinématique a permis la détermination d'un certain nombre de vitesses :

- Vitesse $\vec{V}(G_1 \in 1/N)$:

$$\vec{V}(G_1/N) = L_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1$$

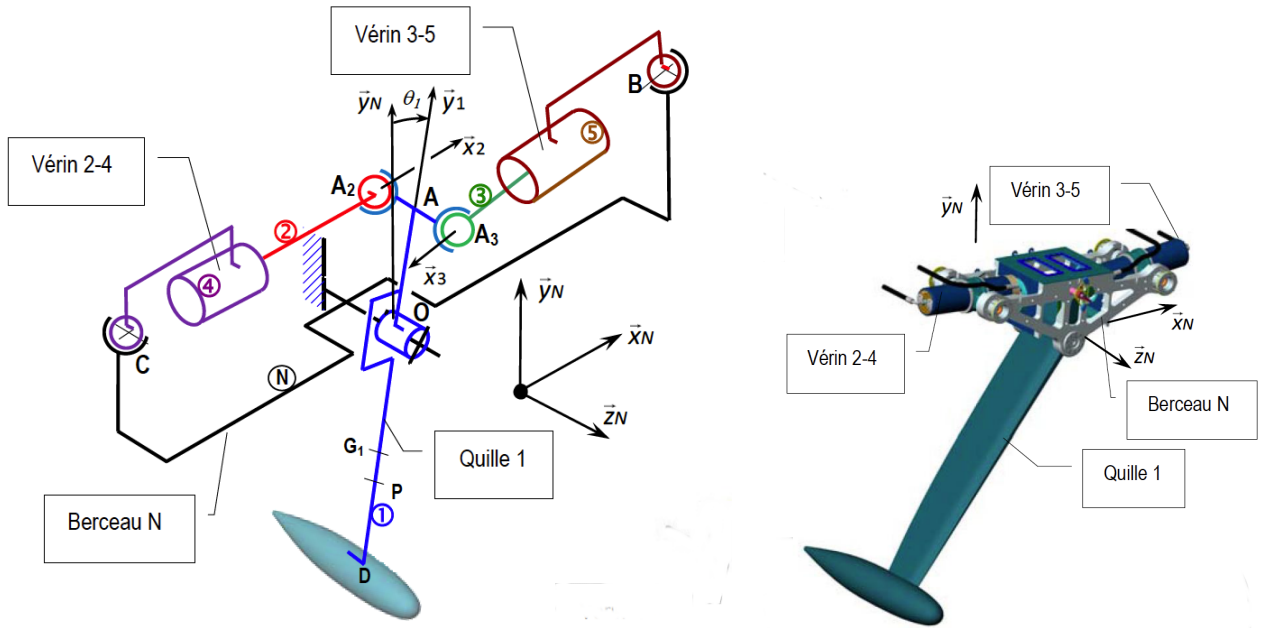


FIGURE 37 – Modèle à trois dimensions de l'ensemble

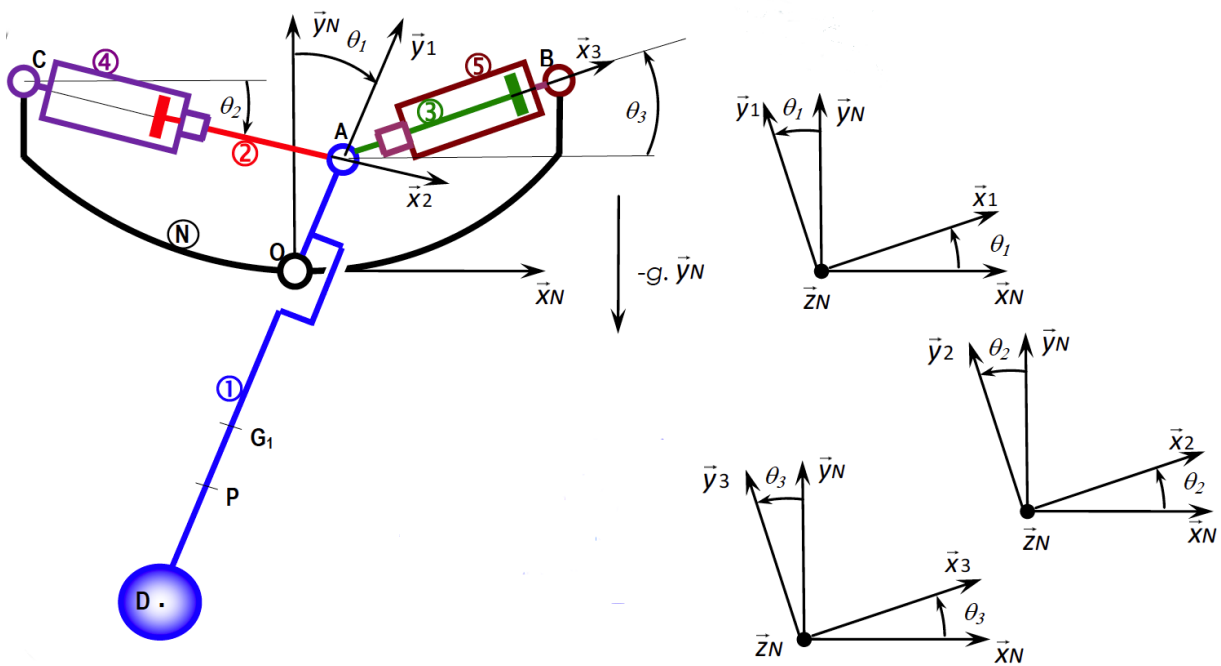


FIGURE 38 – Modèle plan (2D) de l'ensemble

- Vitesse $\vec{V}(G_2 \in 2/N)$:

$$\vec{V}(G_2 \in 2/N) = \dot{x}_{24} \cdot \vec{x}_2 + (x_{24} - L_2)\dot{\theta}_2 \cdot \vec{y}_2$$

- Vitesse $\vec{V}(G_3 \in 3/N)$:

$$\vec{V}(G_3 \in 3/N) = -\dot{x}_{35} \cdot \vec{x}_3 + (-x_{35} + L_2)\dot{\theta}_3 \cdot \vec{y}_3$$

- Vitesse $\vec{V}(A_2 \in 2/4)$:

$$\vec{V}(A_2 \in 2/4) = -\dot{x}_{24} \cdot \vec{x}_2$$

Les données massiques et inertielles sont précisées ci-dessous :

| Solide | Masse | Centre d'inertie | Matrice d'inertie |
|--------|-------------|--|--|
| 1 | M_1 | $G_1 : \vec{OG}_1 = -L_1 \cdot \vec{y}_1$ avec $L_1 > 0$ | $\bar{\bar{I}}_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)}$ |
| 2 | M_2 | $G_2 : \vec{AG}_2 = -L_2 \cdot \vec{x}_2$ avec $L_2 > 0$ | $\bar{\bar{I}}_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}$ |
| 3 | $M_3 = M_2$ | $G_3 : \vec{AG}_3 = L_2 \cdot \vec{x}_3$ avec $L_2 > 0$ | $\bar{\bar{I}}_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}$ |
| 4 | M_4 | $G_4 : C$ | $\bar{\bar{I}}_C(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}$ |
| 5 | $M_5 = M_4$ | $G_5 : B$ | $\bar{\bar{I}}_B(5) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}$ |

TABLE 3 – données massiques et inertielles

| Actions | | Origines | Torseur représentatif |
|---------|-----|--------------------------------|---|
| de | sur | | |
| Huile | 2 | Pression hydraulique vérin 2-4 | $\{\mathcal{T}_{(ph \rightarrow 2)}\} = \begin{Bmatrix} F_{h2} \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$ |
| Huile | 3 | Pression hydraulique vérin 3-5 | $\{\mathcal{T}_{(ph \rightarrow 3)}\} = \begin{Bmatrix} -F_{h3} \cdot \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$ |
| Huile | 2 | Frottement visqueux vérin 2-4 | $\{\mathcal{T}_{(phf \rightarrow 2)}\} = \begin{Bmatrix} -k \cdot \frac{dx_{24}}{dt} \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ |
| Huile | 3 | Frottement visqueux vérin 3-5 | $\{\mathcal{T}_{(phf \rightarrow 3)}\} = \begin{Bmatrix} -k \cdot \frac{dx_{35}}{dt} \cdot \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ |
| Eau | 1 | Actions hydrodynamiques | $\{\mathcal{T}_{(eau \rightarrow 1)}\} = \begin{Bmatrix} F_p \cdot \vec{z}_1 + F_t \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P$ avec $\vec{OP} = -h \cdot \vec{y}_1$ |

Hypothèses complémentaires

- **Liaisons parfaites** : toutes les liaisons sont parfaites.
- **Frottement visqueux** : la circulation de l'huile dans les canalisations de l'installation crée un phénomène de frottement visqueux modélisé par les torseurs $\{\mathcal{T}_{(phf \rightarrow 3)}\}$ et $\{\mathcal{T}_{(phf \rightarrow 2)}\}$ (voir tableau ci-dessus pour la modélisation de ces actions).
- **Action hydrodynamique** : l'action mécanique de l'eau sur le voile de quille, lors du basculement de cette dernière, est modélisée par le torseur glisseur où F_p est une composante de « portance » et F_t une composante de « trainée » hydrodynamique.
- **Pesanteur** : l'accélération de pesanteur est définie par : $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_N$.

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

Q 35 : Parmi celles développées par les solides de E, exprimer uniquement les suivantes :

1. Énergie cinétique galiléenne du solide 1 dans son mouvement par rapport à N, en fonction de $\dot{\theta}_1$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
2. Énergie cinétique galiléenne du solide 2 dans son mouvement par rapport à N, en fonction de $\dot{\theta}_2$, \dot{X}_{24} , x_{24} et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
3. Énergie cinétique galiléenne du solide 4 dans son mouvement par rapport à N, en fonction de $\dot{\theta}_2$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

Q 36 : Recenser (notation $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$), puis exprimer les puissances non nulles développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Q 37 : Recenser (notation $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$), puis exprimer les puissances galiléennes non nulles développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné. Les notations utilisées sont celles des tableaux ci-dessus.

Q 38 : Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste.

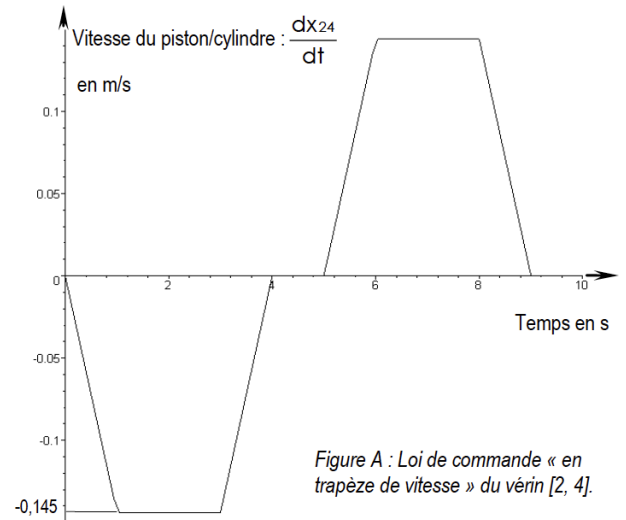
Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure 39.

Q 39 : Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure 39 sur la figure 40, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0\text{ s}$, $t = 1\text{ s}$, $t = 3\text{ s}$ et $t = 4\text{ s}$.

Q 40 : Sur cet intervalle $[0, 4\text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW.

Q 41 : Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.



Évolution temporelle des puissances mises en jeu

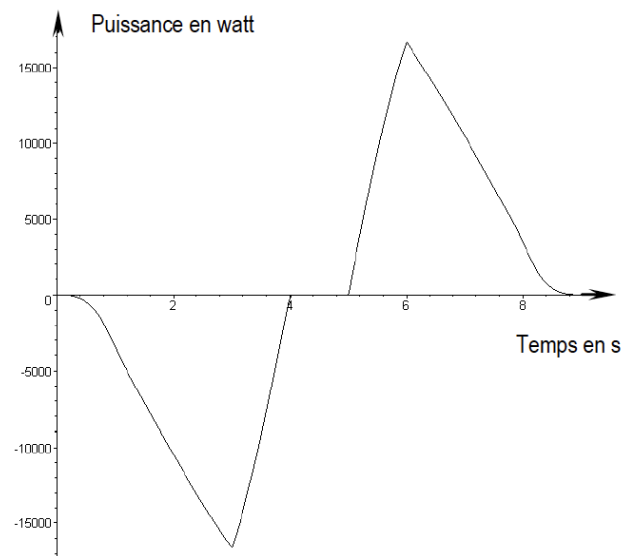
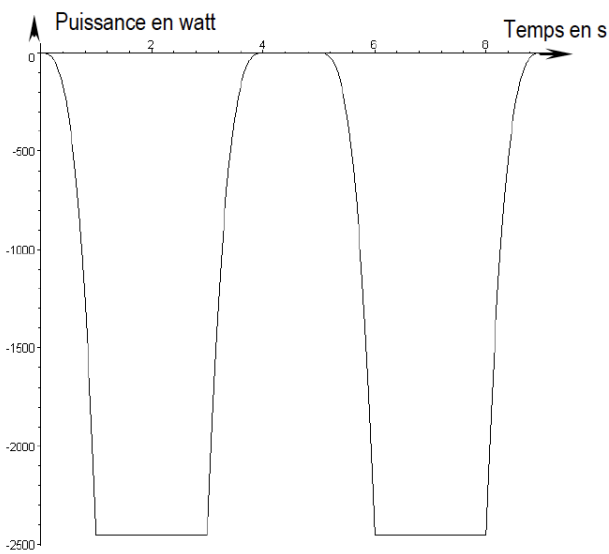
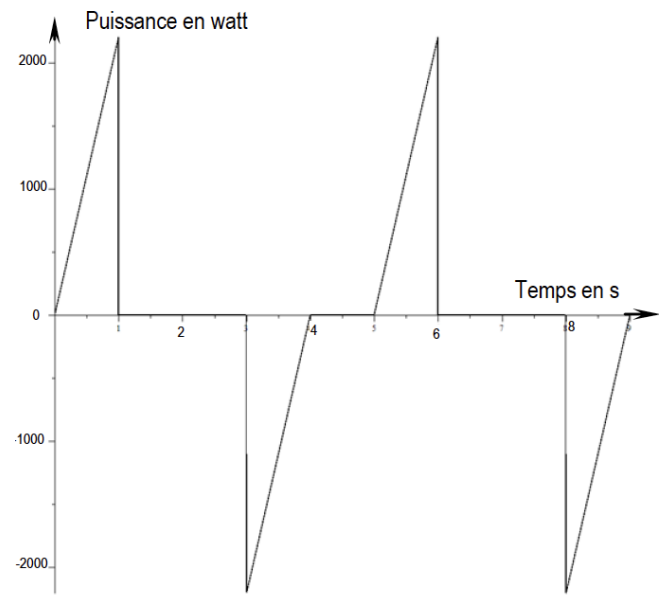
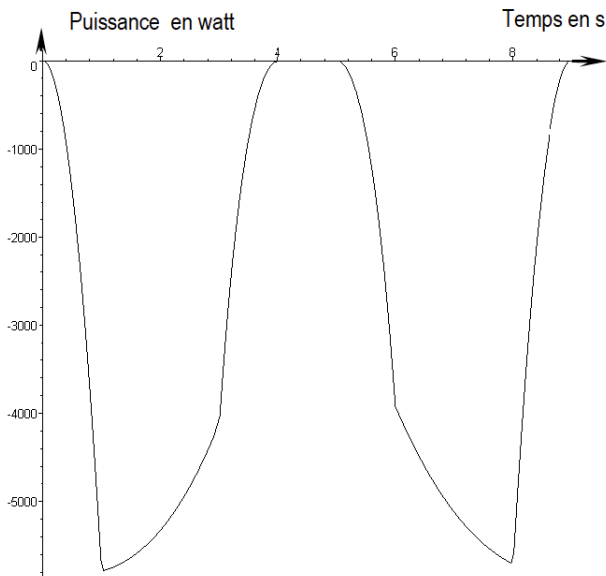


FIGURE 39 – Evolution temporelle des puissances

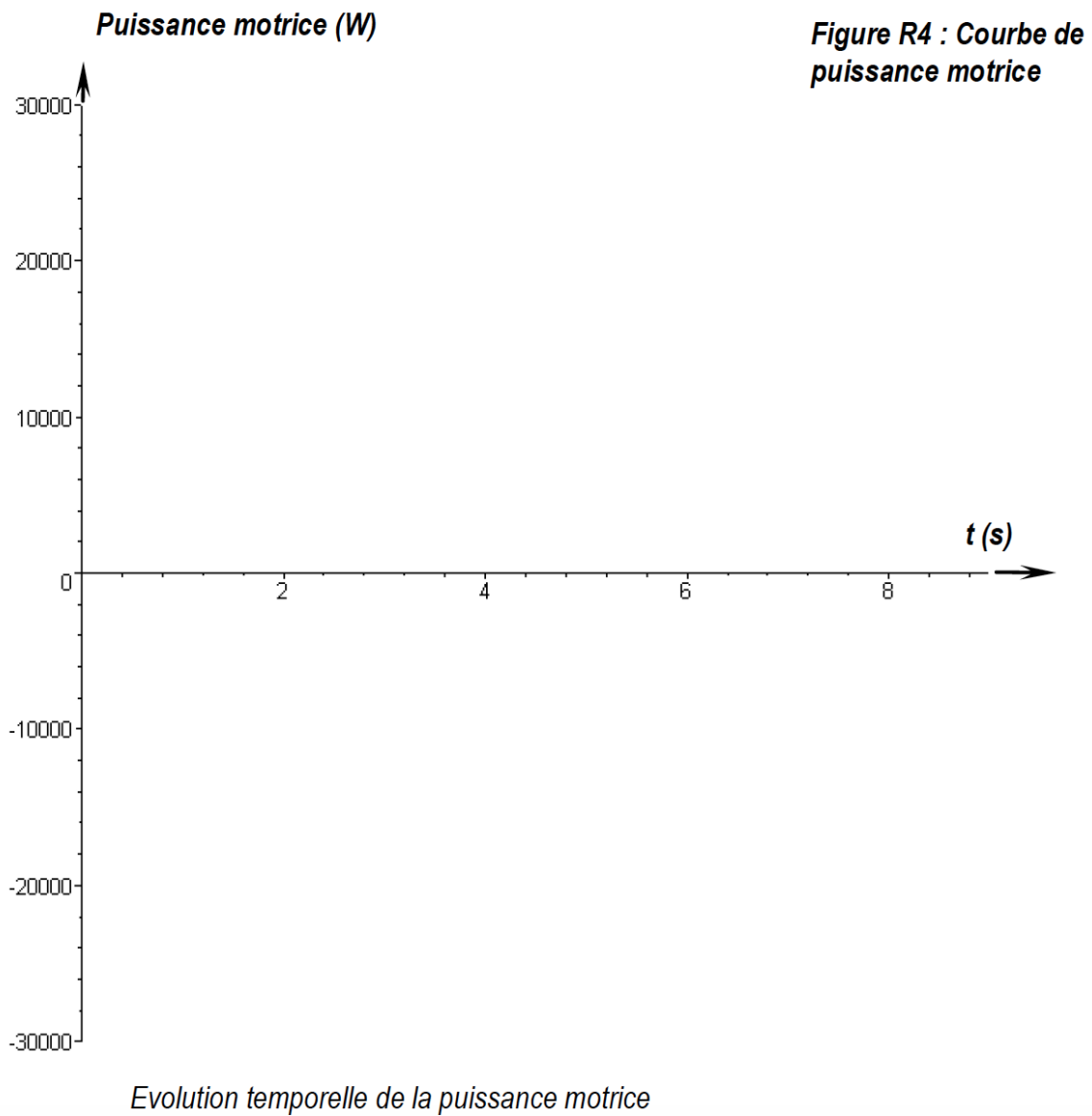


FIGURE 40

Exercice 17 :

1 Tête de découpe de tissu

a) Présentation

Le système étudié dans ce sujet est une tête de coupe de tissus conçue et réalisée par la société française Lectra, leader mondial dans la découpe automatisée des tissus. Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure 41) :

- d'une table de découpe sur laquelle le tissu à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration;
- d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction \vec{y}_0 par rapport à la table;
- d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction \vec{x}_0 par rapport au bras transversal;
- d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

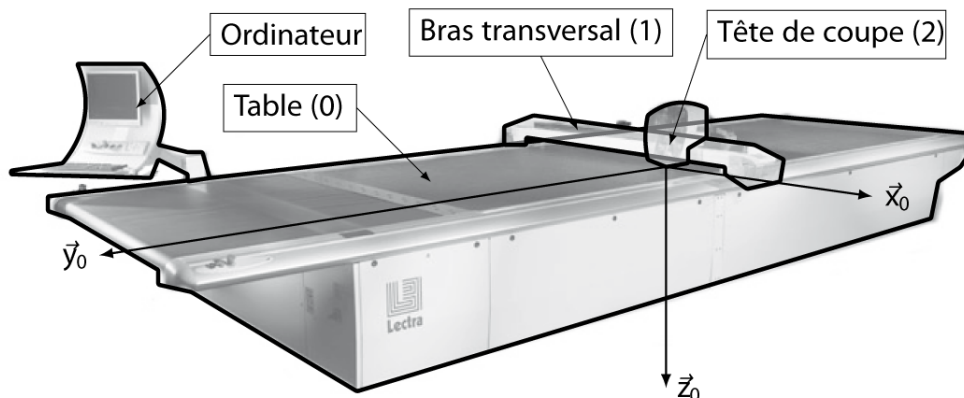
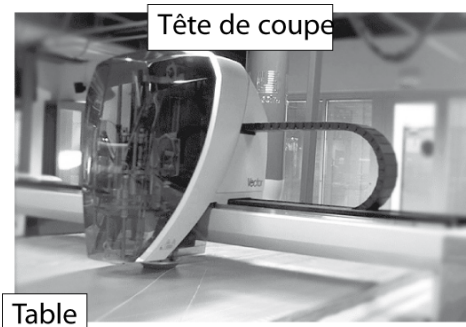


FIGURE 41 – Structure d'une table de découpe de tissus

Dans ce sujet, nous nous intéresserons plus particulièrement à la tête de coupe proposée par Lectra dans deux versions (initiale et améliorée) dont le diagramme partiel des exigences pour la solution de découpe (logiciel/machine) est présenté dans la figure 42.

b) Modélisation du comportement mécanique de la tête de coupe



Objectif 6 :

Modéliser le comportement dynamique de la tête de coupe afin d'identifier un phénomène de vibration néfaste au regard de l'exigence 1.2.2.

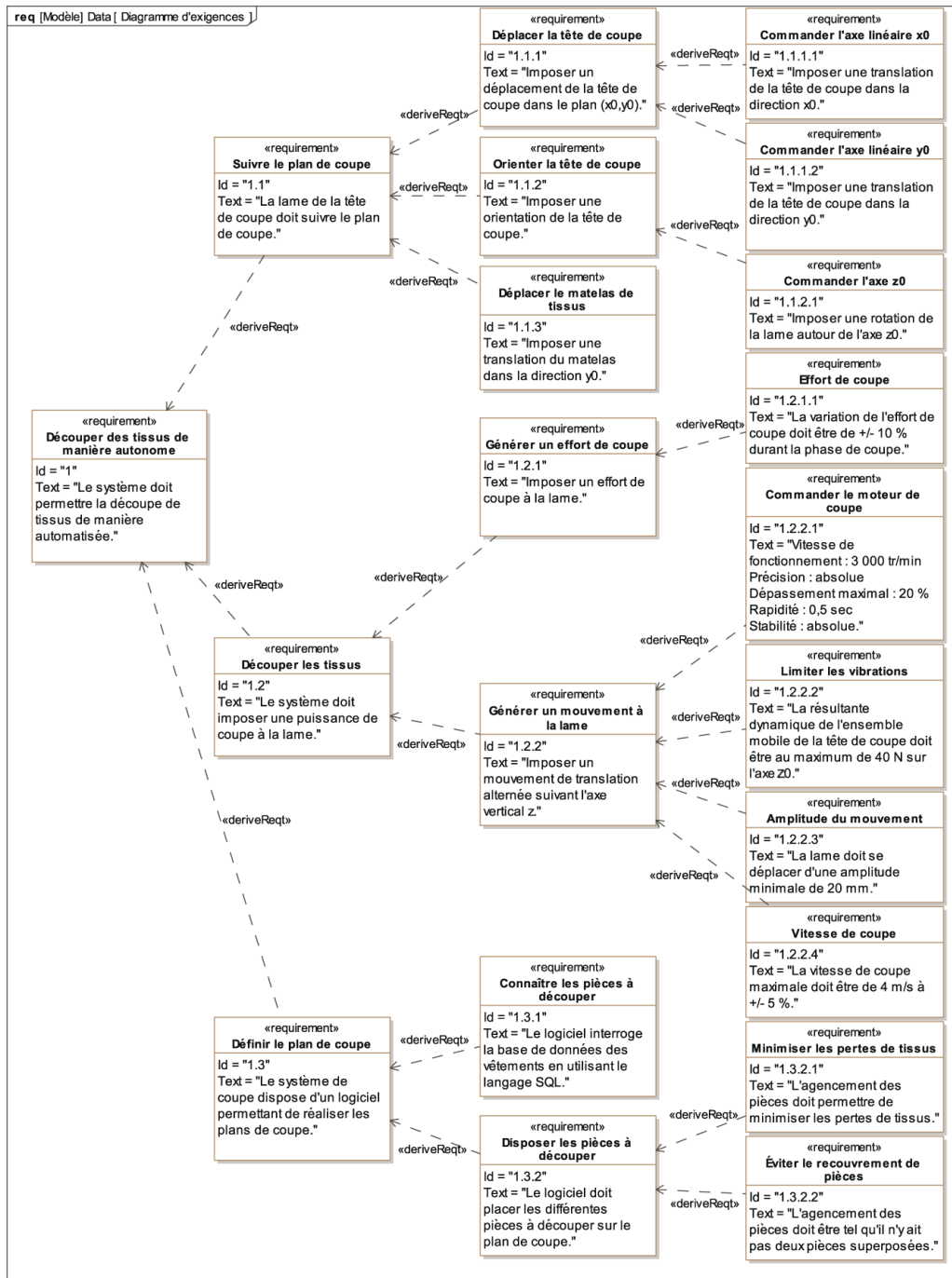


FIGURE 42 – Diagramme des exigences

c) Modélisation du comportement cinématique de la tête de coupe

La découpe du tissu est réalisée par un mouvement de translation alternative d'une lame par rapport au matelas de tissus. Ce mouvement est obtenu par un système bielle-manivelle dont le schéma cinématique est donné par la figure 43. Les mouvements de translation de la tête de coupe par rapport à la table impliquent que les bases $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, liées respectivement à la tête de coupe et à la table, sont identiques (figure 1).

Modélisation des liaisons et paramétrage du système

- On associe le repère $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ à la tête 2, le repère $\mathcal{R}_3 = (A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ à la manivelle 3, le repère $\mathcal{R}_4 = (B, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ à la bielle 4 et le repère $\mathcal{R}_5 = (C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ à la lame 5.
- La manivelle 3 est en liaison pivot avec la tête 2, d'axe (A, \vec{y}_2) et d'angle $\theta_{32}(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$.
- La manivelle 3 est en liaison pivot avec la bielle 4, d'axe (B, \vec{y}_2) et d'angle $\theta_{43}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$.

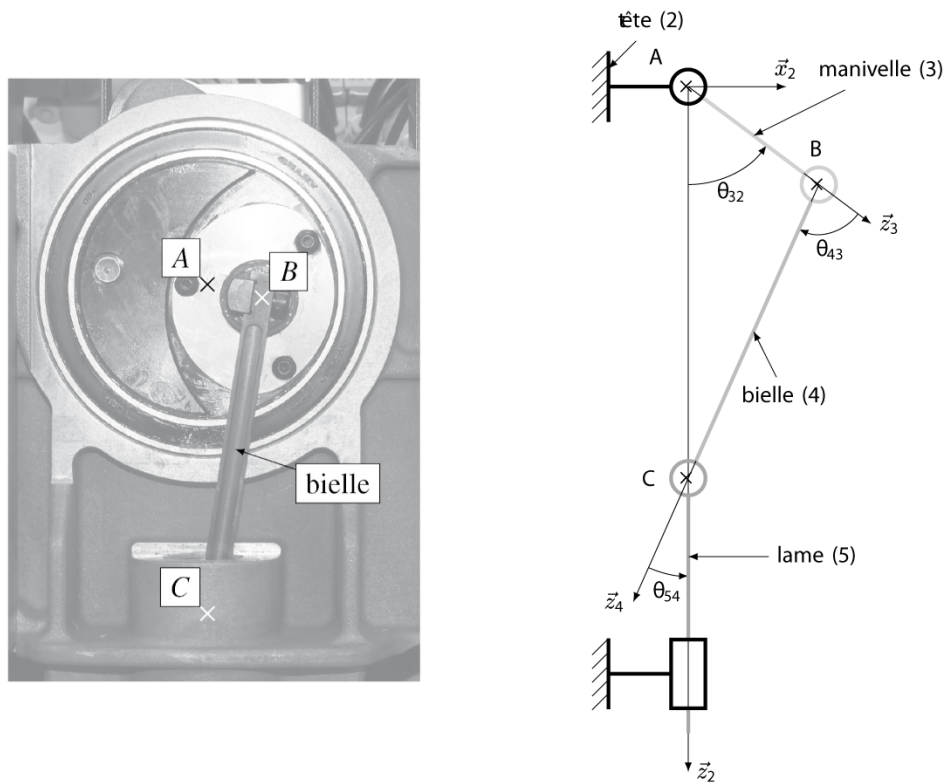


FIGURE 43 – Système d'entraînement de la lame de coupe et schéma cinématique associé

- La bielle 4 est en liaison pivot avec la lame 5, d'axe (C, \vec{y}_0) et d'angle $\theta_{54}(t) = (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = (\vec{z}_4, \vec{z}_2)$.
 - La lame 5 est en liaison glissière avec la tête 2, de direction \vec{z}_2 et de paramètre linéaire $\lambda(t)$.
 - On pose $\omega_{ij}(t) = \frac{d\theta_{ij}(t)}{dt} = \dot{\theta}_{ij}(t)$, $\vec{AB} = L_3 \vec{z}_3$ avec $L_3 = 12,5 \text{ mm}$, $\vec{BC} = L_4 \vec{z}_4$ avec $L_4 = 80 \text{ mm}$ et $\vec{AC} = \lambda(t) \vec{z}_2$.
- On peut montrer en résolvant le problème cinématique et sous certaines hypothèses :
- **Loi d'entrée sortie géométrique :**
 $\lambda(t) = L_3 \cos \theta_{32}(t) + L_4$
 - **Loi d'entrée-sortie cinématique :**
 $\dot{\lambda}(t) = -\dot{\theta}_{32} L_3 \sin \theta_{32} = -\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32}$
 - **Simplification de loi géométrique :** en exploitant les résultats de l'étude géométrique précédente, on peut montrer que :

$$\frac{\sin \theta_{43}}{\cos \theta_{54}} \approx \sin \theta_{32}.$$

d) Modélisation du comportement dynamique de la tête de coupe



Objectif 7 :

Identifier la cause des vibrations à partir de la modélisation dynamique du comportement de la tête de coupe.

Hypothèses de modélisation et notations

- le référentiel lié à la tête de découpe (2) est supposé galiléen ;
- les liaisons sont supposées parfaites ;
- l'action mécanique du moteur sur la manivelle 3 est modélisée par un couple $\vec{C}_m = C_m(t) \vec{y}_2$;
- lors de la coupe, le matelas de tissus exerce une action mécanique sur la lame (5)

$$\vec{F}_{matelas \rightarrow 5} = F_c \cdot \vec{z}_0$$

avec F_c l'effort de coupe;

- La vitesse de coupe ($\vec{V}(G_5/R_2) = V_c \cdot \vec{z}_2 = \dot{\lambda}(t) \cdot \vec{z}_2$) telle que $\dot{\lambda}(t) = -L_3 \omega_{32} \sin \theta_{32}(t)$;
- l'effet de la pesanteur est négligeable devant les autres actions mécaniques;
- le moment d'inertie suivant l'axe (A, \vec{y}_2) de la manivelle (3), de masse $M_3 = 0,350 \text{ kg}$, ramenée à l'arbre moteur est $I_{(A, \vec{y}_2)}(3) = J_3 = 1,2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
- la masse et l'inertie de la bielle (4) sont négligées ce qui revient à considérer que **son équilibre dynamique équivaut à un équilibre statique**;
- la masse de l'ensemble mobile lié à la lame (5) est $M_5 = 0,1 \text{ kg}$.

Q 42 : Dessiner le graphe de structure complet décrivant le mécanisme et le problème dynamique associé.

Q 43 : Proposer une méthode permettant d'obtenir une équation de mouvement.

Q 44 : Déterminer l'équation de mouvement en régime permanent ($\dot{\theta}_{32} = cte$) reliant $C_m, F_c, M_5, \theta_{32}, \dot{\theta}_{32}$

Q 45 : Pourquoi le couple moteur n'est-il pas constant en régime permanent ? Quelle en est la conséquence sur le comportement du système ?

Corrigé

Exercice 1 : Barrage sur la Thames

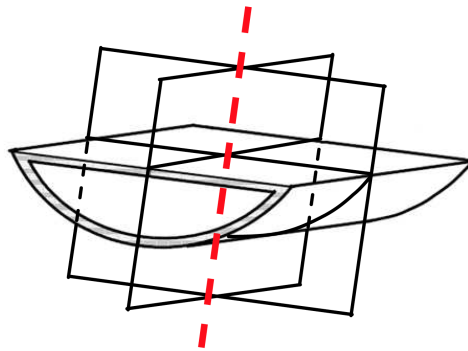
1 Corrigé : Barrage de la Tamise

Q 1 : Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la porte.

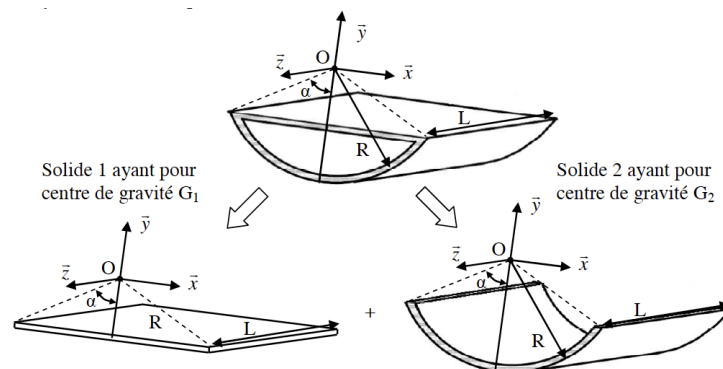
On recherche les coordonnées du centre de gravité G du solide S sous la forme :

$$\vec{OG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}.$$

Le système possède deux plans de symétrie perpendiculaires, le centre de gravité est sur la droite intersection des 2 plans de symétrie. D'où $z_G = -\frac{L}{2}$ et $x_G = 0$



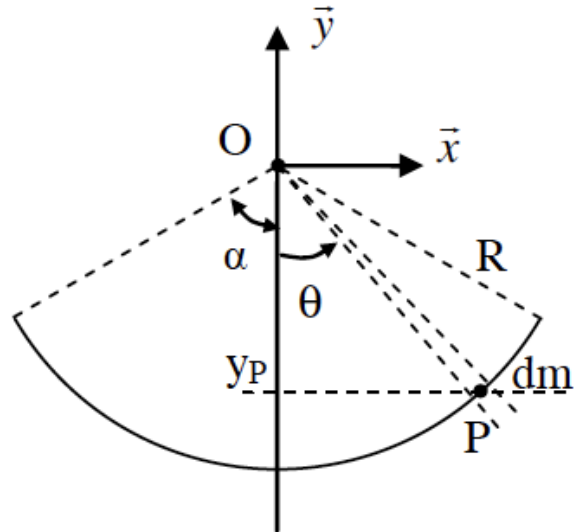
On décompose le système en solides élémentaires (les solides élémentaires possèdent les mêmes plans de symétrie identifiés précédemment).



- Solide 1** : Il y a un plan de symétrie supplémentaire. Il y a donc 3 plans de symétrie perpendiculaires donc le centre de gravité de S_1 est à $y_G = -R \cos \alpha$ (si e est négligeable).
- Solide 2** : Il n'y a pas de plan de symétrie supplémentaire. On utilise alors la définition :

$$m_2 \vec{OG}_1 = \int_{S_2} \vec{OP} dm.$$

que l'on projette sur l'axe \vec{y} .



$$m_2 \cdot y_{G_2} = \int_{S_2} y_P \, dm$$

Avec $m_2 = \rho e L (2 R \alpha)$ et $dm = \rho e L R \, d\theta$.

$$2 R \alpha y_{G_2} = \int_{-\alpha}^{\alpha} -R \cos \theta R \, d\theta$$

$$2 R \alpha y_{G_2} = -2 R^2 \sin \alpha.$$

On obtient finalement,

$$y_{G_2} = -R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

3. Pour les deux solides combinés :

$$(m_1 + m_2) y_G = m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}$$

Avec

$$m_1 = \rho e L (2 R \sin \alpha)$$

et

$$m_2 = \rho e L (2 R \alpha).$$

On trouve alors :

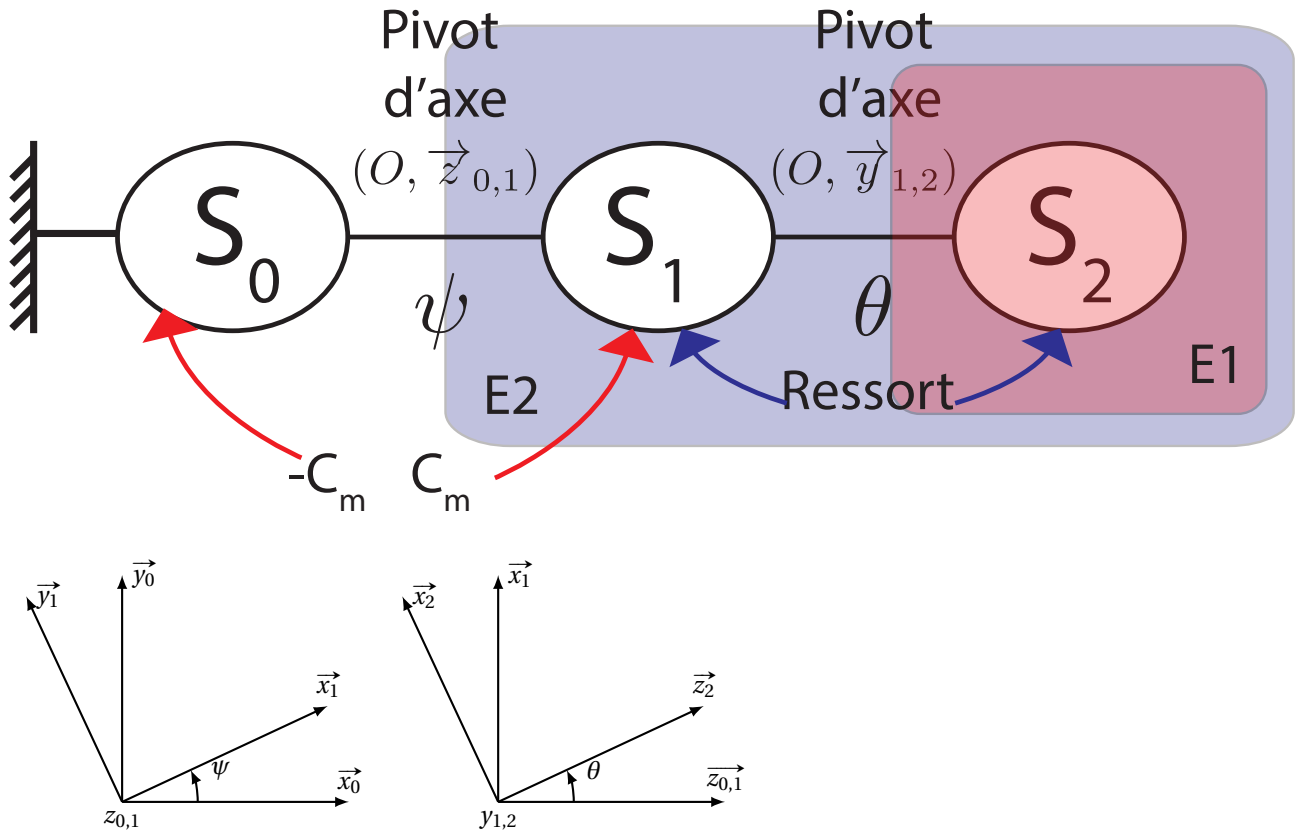
$$y_G = \frac{-R \sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\alpha + \sin \alpha}$$

En faisant l'application numérique, on obtient :

$$y_G = -8,42 \, m.$$

Exercice 2 :

Q 2 : Construire le graph des structure et les figures de projections



Q 3 : Identifier les isolements et les théorèmes généraux à effectuer pour obtenir les équations de mouvement.

1. On isole $E1 = \{S_2\}$ et on applique un TMD selon $(O, \vec{y}_{1,2})$;
2. On isole $E2 = \{S_1 + S_2\}$ et on applique un TMD selon $(O, \vec{z}_{0,1})$;

Q 4 : Effectuer les isolements, faire les bilans des actions mécaniques appropriés et appliquer les théorèmes généraux.

1. On isole $E1 = \{S_2\}$ et on applique un TMD selon $(O, \vec{y}_{1,2})$;

- **Bilan des Actions mécaniques extérieures**
 - Poids : $\vec{M}_O(\text{poids} \rightarrow S_2) \cdot \vec{y}_{1,2} = 0$;
 - Liaison 2/1 : $\vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{y}_{1,2} = 0$;
 - Ressort : $\vec{M}_O(R \rightarrow S_2) \cdot \vec{y}_{1,2} = -k(\theta - \theta_0)$;
- **Dynamique**

$$\overrightarrow{\delta}_O(S_2/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}_O(S_2/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

et

$$\overrightarrow{\sigma}_O(S_2/R_0) = \overline{I}_O(S_2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0)$$

Car O est le centre d'inertie de S_2 . Or

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0) &= \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) + \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\theta} \vec{y}_{1,2} + \dot{\psi} \vec{z}_{0,1} \\ &= -\dot{\psi} \sin \theta \vec{x}_2 + \dot{\theta} \vec{y}_{1,2} + \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}_2 \end{aligned}$$

Soit,

$$\overrightarrow{\sigma}_O(S_2/R_0) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \dot{\theta} \\ C_2 \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{B_2}$$

De plus,

$$\overrightarrow{\delta_O(S_2/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_O(S_2/R_0)}}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \nu \text{Sigma}[O]S_2R_0$$

$$\overrightarrow{\delta_O(S_2/R_0)} = \begin{pmatrix} -A_2(\ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \\ A_2 \ddot{\theta} \\ C_2(\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{pmatrix}_{B_2} + \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{B_2} \wedge \begin{pmatrix} -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \dot{\theta} \\ C_2 \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{B_2}$$

Finalement,

$$\overrightarrow{\delta_O(S_2/R_0)} = \begin{pmatrix} -A_2 \ddot{\psi} \sin \theta + (C_2 - 2A_2) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ A_2 \ddot{\theta} + (C_2 - A_2) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ C_2(\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{pmatrix}_{B_2}$$

- Équation de mouvement :

$$A_2 \ddot{\theta} + (C_2 - A_2) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = -k(\theta - \theta_0) \quad (7)$$

2. On isole $E_2 = \{S_1 + S_2\}$ et on applique un TMD selon $(O, \vec{z}_{0,1})$;

- Bilan des actions mécaniques extérieures
 - Poids : $\overrightarrow{M_O}(\text{poids} \rightarrow E_2) \cdot \vec{z}_{0,1} = 0$;
 - Liaison 1/0 : $\overrightarrow{M_O}(S_0 \rightarrow S_1) \cdot \vec{z}_{0,1} = 0$;
 - Moteur : $\overrightarrow{M_O}(\text{moteur} \rightarrow S_1) \cdot \vec{z}_{0,1} = C_m$;
- Dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_O(E_2/R_0)} \cdot \vec{z}_{0,1} = \left(\overrightarrow{\delta_O(S_1/R_0)} + \overrightarrow{\delta_O(S_2/R_0)} \right) \cdot \vec{z}_{0,1}$$

- $\overrightarrow{\delta_O(S_1/R_0)} \cdot \vec{z}_{0,1}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_O(S_1/R_0)} \cdot \vec{z}_{0,1} &= \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_O(S_1/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} \cdot \vec{z}_{0,1} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_O(S_1/R_0)} \cdot \vec{z}_{0,1}}{dt} \right] \\ &= \left[\frac{d\overrightarrow{I_O}(S_1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{z}_{0,1}}{dt} \right] = \left[\frac{d\overrightarrow{I_O}(S_1) \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_{0,1}}{dt} \right] = I \cdot \ddot{\psi} \end{aligned}$$

- $\overrightarrow{\delta_O(S_2/R_0)} \cdot \vec{z}_{0,1}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_O(S_2/R_0)} \cdot \vec{z}_{0,1} &= \begin{pmatrix} -A_2 \ddot{\psi} \sin \theta + (C_2 - 2A_2) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ A_2 \ddot{\theta} + (C_2 - A_2) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ C_2(\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{pmatrix}_{B_2} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{B_2} \\ &= (A_2 \ddot{\psi} \sin \theta - (C_2 - 2A_2) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \sin \theta + C_2(\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta \end{aligned}$$

- Équation de mouvement

$$I \cdot \ddot{\psi} + (A_2 \ddot{\psi} \sin \theta - (C_2 - 2A_2) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \sin \theta + C_2(\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta = C_m \quad (8)$$

Q 5 : Écrire les équations de mouvement en tenant compte de l'hypothèse $\dot{\psi} = \omega = cte$.

$$\begin{cases} A_2 \ddot{\theta} + (C_2 - A_2) \omega^2 \frac{\sin 2\theta}{2} + k(\theta - \theta_0) = 0 \\ C_m = (A_2 - C_2) \omega \dot{\theta} \sin(2\theta) \end{cases}$$

Q 6 : Écrire l'équation donnant la position stationnaire ($\theta = \theta_S = Cste$) et donner le couple moteur correspondant.

En reportant cette équation dans les équations de mouvement, il vient :

$$\begin{cases} (C_2 - A_2) \omega^2 \frac{\sin 2\theta_S}{2} + k(\theta_S - \theta_0) = 0 \\ C_m = 0 \end{cases}$$

Q 7 : Résoudre cette équation en écrivant $\theta_S = \theta_0 + \overline{\theta}_S$ et en supposant $\overline{\theta}_S$ petit.

Il vient :

$$(C_2 - A_2) \omega^2 (\sin 2\overline{\theta}_S \cos 2\theta_0 + \cos 2\overline{\theta}_S \sin 2\theta_0) + 2k\overline{\theta}_S = 0$$

Avec $\overline{\theta}_S$ petit,

$$(C_2 - A_2) \omega^2 (2\overline{\theta}_S \cos 2\theta_0 + \sin 2\theta_0) + 2k\overline{\theta}_S = 0$$

Soit,

$$\overline{\theta}_S = \frac{(A_2 - C_2) \omega^2 \sin 2\theta_0}{2(k + (C_2 - A_2) \omega^2 \cos 2\theta_0)}$$

Q 8 : Préciser en quoi ce mécanisme est un tachymètre.

La position obtenue dépend directement de $\dot{\psi} = \omega$, ce mécanisme permet donc de mesurer cette vitesse, c'est bien un tachymètre.

Q 9 : Que devient θ_S si θ_0 est petit. Le mécanisme est-il toujours un tachymètre?

Le résultat obtenu ci-dessus montre que $\theta_S = 0$ si $\theta_0 = 0$, ce qui montre que la mesure de vitesse n'est possible que si $\theta_0 \neq 0$.

Q 10 : En écrivant $\theta = \theta_S + \theta^*$ (θ^* et ses dérivées petits), écrire l'équation linéarisée des petits mouvements en θ^* et donner la pulsation propre ω_0 associée.

En posant $\theta = \theta_S + \theta^*$, il vient :

$$2A_2\ddot{\theta}^* + (C_2 - A_2) \omega^2 (\sin 2\theta_S \cos 2\theta^* + \cos 2\theta_S \sin 2\theta^*) + 2k(\theta_S + \theta^* - \theta_0) = 0$$

Soit, si θ^* et ses dérivées petits :

$$2A_2\ddot{\theta}^* + (C_2 - A_2) \omega^2 (\sin 2\theta_S + \cos 2\theta_S 2\theta^*) + 2k(\theta_S + \theta^* - \theta_0) = 0$$

Soit en tenant compte de l'équation donnant l'état stationnaire :

$$A_2\ddot{\theta}^* + [(C_2 - A_2) \omega^2 \cos 2\theta_S + k] \theta^* = 0$$

Ce qui permet d'identifier la pulsation propre associée à ces petits mouvements :

$$\sqrt{\frac{(C_2 - A_2) \omega^2 \cos 2\theta_S + k}{A_2}}$$

Exercice 3 :

Q 11 : A partir des données massiques et dimensionnelles du document réponse DR1 et de l'annexe 1, justifier la position de ce centre de gravité, et donner les limites de cette simplification.

- G_1 centre de gravité de {1 + 2} :

$$\overrightarrow{OG_1} = h \cdot \vec{z}_0$$

- G_2 centre de gravité de {3 + 4} : G_2 au milieu de BC. On mesure sur le document réponse :

$$\overrightarrow{OG_2} \cdot \vec{x}_0 \approx 0m$$

- G_c centre de gravité du Contrepoids :

$$\overrightarrow{OG_c} \cdot \vec{x}_0 = x_{gc}$$

- La formule du barycentre donne :

$$x_{GE} = \overrightarrow{OG_E} \cdot \vec{x}_0 = \frac{M_1 \overrightarrow{OG_1} \cdot \vec{x}_0 + M_2 \overrightarrow{OG_2} \cdot \vec{x}_0 + M_c \overrightarrow{OG_c} \cdot \vec{x}_0}{M_1 + M_2 + M_c}$$

$$x_{GE} = \frac{M_c \overrightarrow{OG_c} \cdot \vec{x}_0}{M_1 + M_2 + M_c} \approx 0,35m$$

La position suivant l'axe \vec{x}_0 du centre de gravité de l'ensemble {1;2;3;4} n'est pas explicitée dans le sujet. En prenant l'hypothèse du centre de gravité de 3+4 aligné verticalement avec A .

$$x_{GE} = \frac{M_c \cdot x_{GC}}{M_1 + M_c + M_2} = \frac{7,2}{20,5} \approx 0,35m$$

Plus probablement, en mesurant la position de ce centre de gravité sur le document réponse, on trouve une projection du milieu du segment en 0,3m environ, ce qui donne :

$$x_{GE} = \frac{M_c \cdot x_{GC} - M_2 \cdot 0,3}{M_1 + M_c + M_2} = \frac{5,9}{20,5} \approx 0,3m$$

Ceci est valable pour la configuration du document réponse.

Q 12 : Sur le document réponse DR1, représenter la limite de la zone dans laquelle doit se situer le centre de gravité G_3 de l'ensemble {flèche, pendulaire, panier} pour éviter le basculement. La réponse sera justifiée précisément sur la feuille de copie.

- d'après la question précédente, on connaît $x_{GE} = \overrightarrow{OG_E} \cdot \vec{x}_0 \approx 0,3m$, centre de gravité de $E_1 = \{1 + 2 + 3 + 4 + \text{contrepoids}\}$
- G_3 centre de gravité de $E_2 = \{6 + 7 + 9 + 12 + 11\}$: au milieu de CE (que l'on peut mesurer sur le DR1)

$$\overrightarrow{CG_3} \cdot \vec{x}_0 = \frac{\overrightarrow{CE} \cdot \vec{x}_0}{2}$$

On mesure sur DR1 : $\overrightarrow{A_2G_3} \cdot \vec{x}_0 \approx -5,5m$

Mais ici on doit trouver la valeur limite de la position de G_3

Posons $x_{G_3} = \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{x}_0$

$$\overrightarrow{A_2G_3} \cdot \vec{x}_0 = (\overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OG_3}) \cdot \vec{x}_0 = \frac{e}{2} + x_{G_3}$$

- La basculement risque de se produire vers l'avant et peut s'interpréter par :
 - la perte de contact au niveau de la roue arrière;
 - une rotation de l'ensemble autour de la roue avant.
- On isole l'ensemble $\Sigma = \{E_1 + E_2\}$
- Bilan des Actions Mécaniques Extérieures à Σ :
 - Poids de E_1 s'appliquant en G_E ;
 - Poids de E_2 s'appliquant en G_3 ;
 - Réaction normale du sol en A_1 : $\vec{N}_1 = N_1 \vec{z}_0$;
 - Réaction normale du sol en A_2 : $\vec{N}_2 = N_2 \vec{z}_0$;
- La perte de contact sur la roue arrière s'interprète comme le fait que $\vec{N}_1 = \vec{0}$ en traduisant un équilibre en moment autour de A_2 .
- Appliquons un Théorème du Moment statique en A_2 :

$$\vec{M}_{A_2}(\text{poids} \rightarrow E_1) + \vec{M}_{A_2}(\text{poids} \rightarrow E_2) + \vec{M}_{A_2}(\text{contact en } A_1 \rightarrow \Sigma) + \vec{M}_{A_2}(\text{contact en } A_2 \rightarrow \Sigma) = \vec{0}$$

- Calculs des termes :
 - $\vec{M}_{A_2}(\text{poids} \rightarrow E_1) = \overrightarrow{A_2G_E} \wedge -(M_1 + M_2 + M_c) g \vec{z}_0$
 - $\vec{M}_{A_2}(\text{poids} \rightarrow E_2) = \overrightarrow{A_2G_3} \wedge -M_3 g \vec{z}_0$
 - $\vec{M}_{A_2}(\text{contact en } A_1 \rightarrow \Sigma) = \overrightarrow{A_2A_1} \wedge N_1 \vec{z}_0$
 - $\vec{M}_{A_2}(\text{contact en } A_2 \rightarrow \Sigma) = \vec{0}$ car contact parfait en A_2
- les résultantes des actions mécaniques dans les produits vectorielles sont toutes portées par \vec{z}_0 donc pour les vecteurs positions seules les projections selon \vec{x}_0 donneront un terme non nul.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{A_2}(\text{poids} \rightarrow E_1) &= (\overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OG_E}) \cdot \vec{x}_0 \wedge -(M_1 + M_2 + M_c) g \vec{z}_0 \\ &= \left(\frac{e}{2} + x_{GE}\right) \vec{x}_0 \wedge -(M_1 + M_2 + M_c) g \vec{z}_0 \\ &= \left(\frac{e}{2} + x_{GE}\right) \cdot (M_1 + M_2 + M_c) g \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{A_2}(\text{poids} \rightarrow E_2) &= \overrightarrow{A_2G_3} \wedge -M_3 g \vec{z}_0 = \overrightarrow{A_2G_3} \cdot \vec{x}_0 \wedge -M_3 g \vec{z}_0 \\ &= \left(\frac{e}{2} + x_{G_3}\right) \times M_3 g \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{A_2}(\text{contact en } A_1 \rightarrow \Sigma) &= \overrightarrow{A_2A_1} \wedge N_1 \vec{z}_0 \\ &= e \vec{x}_0 \wedge N_1 \vec{z}_0 = -e \cdot N_1 \vec{y}_0 \end{aligned}$$

- $\vec{M}_{A_2}(\text{contact en } A_2 \rightarrow \Sigma) = \vec{0}$ car contact parfait en A_2
- Le TMS en projection sur \vec{y}_0 donne donc :

$$\left(\frac{e}{2} + x_{GE}\right) \cdot (M_1 + M_2 + M_c) g + \left(\frac{e}{2} + x_{G_3}\right) \times M_3 g - e \cdot N_1 = 0$$

\Leftrightarrow

$$N_1 = \frac{\left(\frac{e}{2} + x_{GE}\right) \cdot (M_1 + M_2 + M_c) g + \left(\frac{e}{2} + x_{G_3}\right) \times M_3 \cdot g}{e}$$

- Il y a perte de contact si $N_1 < 0$:

$$x_{G_3} < -\frac{e}{2} - \frac{\left(\frac{e}{2} + x_{GE}\right) \cdot (M_1 + M_2 + M_c)}{M_3}$$

L'application numérique donne :

$$x_{G_3} < -16,7m$$

Q 13 : Estimer la hauteur H maximale permettant d'éviter le basculement lors du freinage. Justifiez la réponse en citant les théorèmes utilisés. Conclure.

Étapes de raisonnement :

- Isolement de Σ .
- Bilan des Actions Mécanique Extérieurs.
- Traduction physique du basculement lors de la phase de freinage ;
- Résolution par la traduction de l'équilibre.

Isolement de Σ

- Σ est composé des ensembles E_1 et E_2 qui ont pour masses respectives $(M_1 + M_2 + M_c)$ et M_3 .
- La masse totale de Σ est notée : $m_\Sigma = M_1 + M_2 + M_c + M_3$
- G_E et G_3 sont les centres de gravité et d'inertie de E_1 et E_2 .

G_Σ est le centre de gravité de Σ et donc le centre de gravité des ensembles E_1 et E_2 pondérés des masses $(M_1 + M_2 + M_c)$ et M_3 .

Bilan des Actions Mécanique Extérieurs.

- Poids de E_1 s'appliquant en G_E ;
- Poids de E_2 s'appliquant en G_3 ;
- Réaction du sol en A_1 : $\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = T_1 \vec{x}_0 + N_1 \vec{z}_0$;
- Réaction du sol en A_2 : $\vec{R}_2 = \vec{N}_2 + \vec{T}_2 = T_2 \vec{x}_0 + N_2 \vec{z}_0$;

Hypothèses supplémentaires

- Lors du freinage en supposant que le véhicule se déplace vers la droite donc dans le sens négatif selon \vec{x}_0 donc :

$$T_1 \text{ et } T_2 > 0$$

- On suppose le référentiel d'observation $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ comme étant galiléen.
- L'ensemble Σ est animé d'un mouvement de translation rectiligne selon $-\vec{x}_0$.

Traduction physique du basculement lors de la phase de freinage

- Lors du freinage en supposant que le véhicule se déplace vers la droite donc dans le sens négatif selon \vec{x}_0 .
- Tout se passe comme si le véhicule allait tourner autour de A_2 .
- Lors du basculement N_1 devient nul, donc la condition de basculement est

$$N_1 < 0$$

- Il faut donc traduire un **Théorème du Moment Dynamique** en A_2 en projection selon \vec{y}_0 .

Résolution par la traduction de l'équilibre.

- Traduction **Théorème du Moment Dynamique** en A_2 en projection selon \vec{y}_0 :

$$\left[\vec{M}_{A_2}(\text{poids} \rightarrow E_1) + \vec{M}_{A_2}(\text{poids} \rightarrow E_2) + \vec{M}_{A_2}(\text{contact en } A_1 \rightarrow \Sigma) + \vec{M}_{A_2}(\text{contact en } A_2 \rightarrow \Sigma) \right] \cdot \vec{y}_0 = \vec{\delta}_{A_2}(\Sigma/R_0) \cdot \vec{y}_0$$

• **Calculs des termes d'action mécanique :**

- $\overrightarrow{M}_{A_2}(poids \rightarrow E_1) = \overrightarrow{A_2 G_E} \wedge - (M_1 + M_2 + M_c) g \vec{z}_0$
- $\overrightarrow{M}_{A_2}(poids \rightarrow E_2) = \overrightarrow{A_2 G_3} \wedge - M_3 g \vec{z}_0$
- $\overrightarrow{M}_{A_2}(\text{contact en } A_1 \rightarrow \Sigma) = \overrightarrow{A_2 A_1} \wedge (N_1 \vec{z}_0 + T_1 \vec{x}_0)$
- $\overrightarrow{M}_{A_2}(\text{contact en } A_2 \rightarrow \Sigma) = \vec{0}$ car contact parfait en A_2

- les résultantes des actions mécaniques dans les produits vectorielles sont toutes portées par \vec{z}_0 donc pour les vecteurs positions seules les projections selon \vec{x}_0 donneront un terme non nul.

◦

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{A_2}(poids \rightarrow E_1) &= (\overrightarrow{A_2 O} + \overrightarrow{O G_E}) \vec{x}_0 \wedge - (M_1 + M_2 + M_c) g \vec{z}_0 \\ &= \left(\frac{e}{2} + x_{GE} \right) \vec{x}_0 \wedge - (M_1 + M_2 + M_c) g \vec{z}_0 \\ &= \left(\frac{e}{2} + x_{GE} \right) \cdot (M_1 + M_2 + M_c) g \vec{y}_0 \end{aligned}$$

◦

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{A_2}(poids \rightarrow E_2) &= \overrightarrow{A_2 G_3} \wedge - M_3 g \vec{z}_0 = \overrightarrow{A_2 G_3} \cdot \vec{x}_0 \wedge - M_3 g \vec{z}_0 \\ &= \left(\frac{e}{2} + x_{G3} \right) \times M_3 g \vec{y}_0 \end{aligned}$$

◦

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{A_2}(\text{contact en } A_1 \rightarrow \Sigma) &= \overrightarrow{A_2 A_1} \wedge (T_1 \vec{x}_0 N_1 \vec{z}_0) \\ &= e \vec{x}_0 \wedge (T_1 \vec{x}_0 N_1 \vec{z}_0) = -e \cdot N_1 \vec{y}_0 \end{aligned}$$

- $\overrightarrow{M}_{A_2}(\text{contact en } A_2 \rightarrow \Sigma) = \vec{0}$ car contact parfait en A_2

• **Calculs du terme dynamique :**

$$\overrightarrow{\delta}_{A_2}(\Sigma/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \overrightarrow{\delta}_{G_\Sigma}(\Sigma/R_0) \cdot \vec{y}_0 + (\overrightarrow{A_2 G_\Sigma} \wedge m_\Sigma \vec{a}(G_\Sigma/R_0)) \cdot \vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{\delta}_{G_\Sigma}(\Sigma/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \left[\frac{d \overrightarrow{\sigma}_{G_\Sigma}(\Sigma/0) \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \cdot \vec{y}_0 = 0$$

car $\vec{\Omega}(\Sigma/R_0) = \vec{0}$ du fait du mouvement de translation de Σ/R_0 .

Pour calculer le deuxième terme, il faut déterminer $\overrightarrow{A_2 G_\Sigma}$.

G_Σ est le centre de gravité de Σ et donc le centre de gravité des ensembles E_1 et E_2 pondérés des masses $(M_1 + M_2 + M_c)$ et M_3 .

Σ est animé d'un mouvement de translation rectiligne selon \vec{x}_0 donc on peut poser

$$\vec{a}(G_\Sigma/R_0) = \ddot{x} \cdot \vec{x}_0$$

De plus on sait d'après l'énoncé que $\overrightarrow{A_2 G_\Sigma} \cdot \vec{z}_0 = H$, vu que l'on va réaliser un produit vectoriel avec $\vec{a}(G_\Sigma/R_0)$ qui est uniquement porté par \vec{x}_0 nous n'avons besoin que de cette composante.

$$(\overrightarrow{A_2 G_\Sigma} \wedge m_\Sigma \vec{a}(G_\Sigma/R_0)) \cdot \vec{y}_0 = H \vec{z}_0 \wedge m_\Sigma \ddot{x} \vec{x}_0 = m_\Sigma \cdot H \cdot \ddot{x} \vec{y}_0$$

- On obtient donc en projection sur \vec{y}_0 :

$$m_\Sigma \cdot H \cdot \ddot{x}(t) = \left(\frac{e}{2} + x_{GE} \right) \cdot (M_1 + M_2 + M_c) g + \left(\frac{e}{2} + x_{G3} \right) \times M_3 g - e \cdot N_1$$

- On peut donc exprimer N_1 :

$$N_1 = \frac{-m_\Sigma \cdot H \cdot \ddot{x} + g \cdot \left[\left(\frac{e}{2} + x_{GE} \right) \cdot (M_1 + M_2 + M_c) + \left(\frac{e}{2} + x_{G3} \right) \times M_3 \right]}{e}$$

Résolution

Le basculement se traduit par la condition $N_1 < 0$:

En terme de hauteur maximum, il faut déjà déterminer la décélération exigée .

On suppose que le véhicule se déplace vers la droite. La vitesse est négative et en phase de freinage, l'accélération sera positive selon $+\vec{x}_0$ (correspondant ici à une décélération), on la notera \ddot{x}_f .

Ainsi,

$$V_{max} = -1,4m \cdot s^{-1} < 0$$

$$\ddot{x}_f > 0$$

$$\ddot{x}_f = -\frac{V_{max}}{t_f}$$

avec t_f , la durée de freinage. La vitesse au cours du temps vérifie bien qu'au bout de t_f , $V(t) = 0$

$$V(t) = \ddot{x}_f \times t + V_{max} = -\frac{V_{max}}{t_f} \times t + V_{max}$$

On peut déterminer t_f avec **la distance de freinage** $d_f = -0,25m$ puisqu'on se déplace dans le sens $-\vec{x}_0$.

$$d_f = x(t_f) = -\frac{V_{max}}{t_f} \times \frac{t_f^2}{2} + V_{max} \times t_f = t_f \frac{V_{max}}{2}$$

$$t_f = \frac{2 \cdot d_f}{V_{max}}$$

On obtient alors :

$$\ddot{x}_f = -\frac{V_{max}^2}{2 \cdot d_f}$$

L'application numérique donne :

$$\ddot{x}_f = 3,92m \cdot s^{-2}$$

On trouve alors :

$$N_1 < 0 \Leftrightarrow H > g \frac{\left(\frac{e}{2} + x_{GE}\right) \cdot (M_1 + M_2 + M_c) + \left(\frac{e}{2} + x_{G3}\right) \times M_3}{m_{\Sigma} \cdot \ddot{x}_f}$$

Ainsi $H > 1,7m$ provoque le basculement dans ces conditions de décélération.

Exercice 4 :**2 Corrigé : Étude dynamique du basculement de roulis d'un drone quadricoptère**

Q 14 : Indiquer quelle est la particularité géométrique qui permet de dire que $I_{xy} = 0$ et $I_{yz} = 0$.

Le plan $(G_2, \vec{x}_2, \vec{x}_2)$

Q 15 : démontrer que $I_{xz} = 0$ et que $I_{xx} = I_{yy}$ (on pourra considérer les pales comme des tiges rectilignes de directions respectives : (C_2, \vec{x}_2) , (C_2, \vec{x}_3) , (C_2, \vec{x}_4) , et raisonner séparément sur le rotor cylindrique et l'hélice).

La matrice d'inertie de l'hélice est la somme de la matrice d'inertie du rotor et de celle des pales ; démontrons donc la propriété sur le rotor, puis sur les pales.

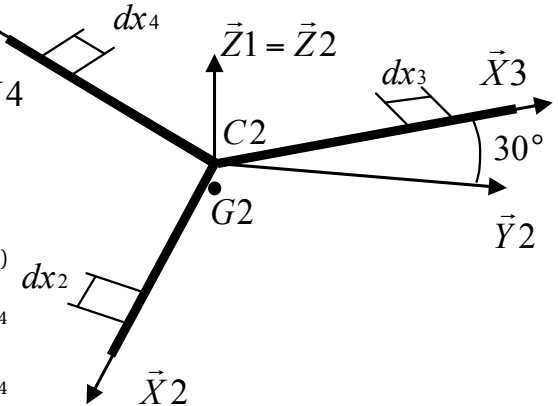
- **Cas du rotor :**

Le rotor est un solide de révolution, pour lequel :

- l'axe z est axe principal d'inertie, et donc $I_{xz} = 0$
- les axes x et y sont interchangeables sans modification de la disposition de la matière, donc $I_{xx} = I_{yy}$.

- **Cas des pales :**

- montrons que $I_{xz} = 0$; pour cela plaçons nous au point C_2 :
Les plans $(C_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ et $(C_2, \vec{x}_2, \vec{z}_2)$ sont plans de symétrie, donc la matrice en C_2 est diagonale et $I_{xz}(C_2, pales) = 0$;
en appliquant le théorème de Huygens (matriciel) on a : $I_{xz}(G_2, pales) = I_{xz}(C_2, pales) + m_h \cdot x_{G_2 C_2} \cdot z_{G_2 C_2}$;
or $x_{G_2 C_2} = 0$ donc $I_{xz}(G_2, pales) = I_{xz}(C_2, pales) = 0$
- montrons que $I_{xx} = I_{yy}$; pour cela plaçons nous au point C_2 :
Considérons des éléments différentiels de longueur dx_2 , dx_3 et dx_4 respectivement sur chacune des pales (C_2, \vec{x}_2) , (C_2, \vec{x}_3) et (C_2, \vec{x}_4) .

$$\begin{aligned}
 I_{xx}(C_2, pales) &= I_{xx}(C_2, pale_2) + I_{xx}(C_2, pale_3) + I_{xx}(C_2, pale_4) \\
 &= \int_{p_2} (y_2^2 + z_2^2) \mu_h \cdot dx_2 + \int_{p_3} (y_2^2 + z_2^2) \mu_h \cdot dx_3 + \int_{p_4} (y_2^2 + z_2^2) \mu_h \cdot dx_4 \\
 &= 0 + \int_{p_3} (x_3 \cdot \cos 30^\circ)^2 \mu_h \cdot dx_3 + \int_{p_4} (-x_4 \cdot \cos 30^\circ)^2 \mu_h \cdot dx_4 \\
 I_{yy}(C_2, pales) &= I_y(C_2, pale_2) + I_y(C_2, pale_3) + I_y(C_2, pale_4) \\
 &= \int_{p_2} (x_2^2 + z_2^2) \mu_h \cdot dx_2 + \int_{p_3} (x_2^2 + z_2^2) \mu_h \cdot dx_3 + \int_{p_4} (x_2^2 + z_2^2) \mu_h \cdot dx_4 \\
 &= \int_{p_2} x_2^2 \cdot \mu_h \cdot dx_2 + \int_{p_3} (-x_3 \cdot \sin 30^\circ)^2 \mu_h \cdot dx_3 + \int_{p_4} (-x_4 \cdot \sin 30^\circ)^2 \mu_h \cdot dx_4
 \end{aligned}$$


En effectuant un changement de variable : $x_2 = x$; $x_3 = x$; $x_4 = x$ avec x variant de 0 à l , on obtient :

$$I_{xx}(C_2, pales) = \int_{x=0}^l 2(x \cdot \cos 30^\circ)^2 \mu_h \cdot dx = \frac{1}{2} \mu_h \cdot l^3$$

$$I_{yy}(C_2, pales) = \int_{x=0}^l [x^2 + 2(x \cdot \sin 30^\circ)^2] \mu_h \cdot dx = \frac{1}{2} \mu_h \cdot l^3$$

Ce qui montre que $I_{xx}(C_2, pales) = I_{yy}(C_2, pales)$;

En utilisant le théorème de Huygens pour exprimer ces moments d'inertie au point G_2 , on ajoute une quantité identique pour les deux termes et on obtient : $I_{xx}(G_2, pales) = I_{yy}(G_2, pales)$.

Q 16 : Donner l'expression analytique au point O, du moment cinétique $\vec{\sigma}_O(E_2/R_0)$.

$$\vec{\sigma}_O(E_2/R_0) = \vec{\sigma}_{G_2}(E_2/R_0) + \vec{OG}_2 \wedge \vec{V}(G_2 \in E_2/R_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}_{B_1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix}_{B_1} - d \cdot \vec{y}_1 \wedge m(-d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) \\
 &= (I_{xx} + m \cdot d^2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + I_{zz} \cdot \dot{\beta}_2 \cdot \vec{z}_1
 \end{aligned}$$

Q 17 : Donner l'expression analytique au point O, du moment dynamique de $\{E_2\}$ dans son mouvement par rapport à R_0 : $\vec{\delta}_O(E_2/R_0)$

O est un point fixe :

$$\begin{aligned}
 \vec{\delta}_O(E_2/R_0) &= \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(E_2/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = (I_{xx} + m \cdot d^2) \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + I_{zz} \cdot \ddot{\beta}_2 \cdot \vec{z}_1 + I_{zz} \cdot \dot{\beta}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{R_0} \\
 &= (I_{xx} + m \cdot d^2) \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + I_{zz} \cdot \ddot{\beta}_2 \cdot \vec{z}_1 - I_{zz} \cdot \dot{\beta}_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1
 \end{aligned}$$

Q 18 : Identifier dans l'expression du moment dynamique, chacun des termes associés aux dénominations suivantes :

- R** = « moment des effets dynamiques selon l'axe de Roulis »;
- L** = « moment des effets dynamiques selon l'axe de Lacet »;
- C** = « moment des effets dynamiques de Coriolis » ou « couple gyroscopique ».

- R est la projection sur l'axe \vec{x}_1 de roulis : $R = (I_{xx} + m \cdot d^2) \cdot \ddot{\alpha}$
- L est la projection sur l'axe \vec{z}_1 de lacet : $L = I_{zz} \cdot \ddot{\beta}_2$
- C est la projection sur l'axe \vec{y}_1 : $C = -I_{zz} \cdot \dot{\beta}_2 \cdot \dot{\alpha}$

Q 19 : Donner l'expression analytique du moment dynamique $\overrightarrow{\delta_O(S_1/R_0)}$.

O est un point fixe :

$$\overrightarrow{\delta_O(S_1/R_0)} = \left[\frac{d\sigma_O(S_1/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

Or $\overrightarrow{\sigma_O(S_1/R_0)} = \overrightarrow{I_O(S_1)} \cdot \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0)$,

$$\overrightarrow{\sigma_O(S_1/R_0)} = \dot{\alpha} \left[I_{xx}^1 \cdot \vec{x}_1 + I_{xy}^1 \cdot \vec{y}_1 + I_{xz}^1 \cdot \vec{z}_1 \right]$$

Donc,

$$\overrightarrow{\delta_O(S_1/R_0)} = (\ddot{\alpha} \cdot I_{xx}^1) \cdot \vec{x}_1 + (\ddot{\alpha} \cdot I_{xy}^1 - \dot{\alpha}^2 \cdot I_{xz}^1) \cdot \vec{y}_1 + (\ddot{\alpha} \cdot I_{xz}^1 + \dot{\alpha}^2 \cdot I_{xy}^1) \cdot \vec{z}_1$$

Q 20 : A partir des résultats obtenus précédemment, donner l'expression analytique au point O, du moment dynamique $\overrightarrow{\delta_O(E_4/R_0)}$ de {E4} en fonction (entre autre) de l'angle β_4 et de ses dérivées.

La seule modification à effectuer pour ce calcul est de remplacer l'expression de $\overrightarrow{OG_2} = -d \cdot \vec{y}_1$ par $\overrightarrow{OG_4} = +d \cdot \vec{y}_1$ et β_2 par β_4 ; alors :

$$\overrightarrow{\delta_O(E_4/R_0)} = \left[\frac{d\sigma_O(E_2/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = (I_{xx} + m \cdot d^2) \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + I_{zz} \cdot \ddot{\beta}_4 \cdot \vec{z}_1 - I_{zz} \cdot \dot{\beta}_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$

Q 21 : En déduire l'expression analytique $\overrightarrow{\delta_O(B/R_0)}$ du moment dynamique de l'ensemble balançoire : {B}={E2}+{E4}+{S1} dans son mouvement par rapport à {S0} et exprimer le terme CB = « moment des effets dynamiques de Coriolis » ou « couple gyroscopique » qui s'exerce sur l'ensemble {B}.

$$\overrightarrow{\delta_O(B/R_0)} = [\ddot{\alpha} \cdot (I_{xx}^1 + 2 \cdot (I_{xx} + m \cdot d^2))] \cdot \vec{x}_1 + [\ddot{\alpha} \cdot I_{xy}^1 - \dot{\alpha}^2 \cdot I_{xz}^1 - I_{zz} \cdot (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_4) \cdot \dot{\alpha}] \cdot \vec{y}_1 + [\ddot{\alpha} \cdot I_{xz}^1 + \dot{\alpha}^2 \cdot I_{xy}^1 + I_{zz} \cdot (\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_4)] \cdot \vec{z}_1$$

$$CB = \overrightarrow{\delta_O(B/R_0)} \cdot \vec{y}_1 = \ddot{\alpha} \cdot I_{xy}^1 - \dot{\alpha}^2 \cdot I_{xz}^1 - I_{zz} \cdot (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_4) \cdot \dot{\alpha}$$

Exercice 5 : Modélisation dynamique d'un ascenseur

1. On a immédiatement, avec les données du texte

$$\omega_p = \frac{2 \cdot V}{dp} \quad (9)$$

La définition du rapport de réduction impose : $\omega_p = \lambda \omega_m$, donc :

$$\omega_m = \frac{2 \cdot V}{\lambda \cdot dp} \quad (10)$$

2. • On isole la cabine en mouvement de montée : {cabine}.
- Bilan des Actions Mécaniques Extérieures appliquées à la {cabine} (figure 44).
 - Action du câble sur la cabine :

$$\{\mathcal{T}_{(cable \rightarrow cabine)}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(cable \rightarrow cabine) = F(cable \rightarrow cabine) \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- o Action de la pesanteur sur la cabine :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(pesanteur \rightarrow cabine)} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = -m_c g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- o Action du système de guidage sur la cabine (liaison glissière avec frottement) :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(0 \rightarrow cabine)} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} X_0 \vec{x}_0 - F \vec{y}_0 + Z_0 \vec{z}_0 \\ L_0 \vec{x}_0 + M_0 \vec{y}_0 + N_0 \vec{z}_0 \end{array} \right\}.$$

Avec \vec{F} la composante de la résultante suivant \vec{y}_0 .

- On applique le théorème de la résultante dynamique à la cabine par rapport au repère R_0 galiléen en projection sur la direction \vec{y}_0 , ce qui donne l'équation

$$\vec{R}_d(cabine/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \vec{R}(\overline{cabine} \rightarrow cabine) \cdot \vec{y}_0.$$

Or,

$$\vec{R}_d(cabine/R_0) \cdot \vec{y}_0 = m_c \vec{\Gamma}(G/R_0) \cdot \vec{y}_0 = m_c \Gamma.$$

Avec Γ l'accélération de la cabine dans son mouvement de translation.

De plus :

$$\vec{R}(\overline{cabine} \rightarrow cabine) \cdot \vec{y}_0 = F(cable \rightarrow cabine) - m_c g - F.$$

- On obtient alors,

$$m_c \cdot \Gamma = -m_c \cdot g - F + F_{cable \rightarrow cabine},$$

D'où

$$\boxed{F_{cable \rightarrow cabine} = m_c (\Gamma + g) + F.} \quad (11)$$

- On isole le contrepoids en mouvement de descente $\{contrepoids\}$
- Bilan des Actions Mécaniques extérieures appliquées au $\{contrepoids\}$ (figure 44).
 - o Action du câble sur le contrepoids :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(cable \rightarrow contrepoids)} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(cable \rightarrow contrepoids) = F(cable \rightarrow contrepoids) \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- o Action de la pesanteur sur le contrepoids :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(pesanteur \rightarrow cabine)} \right\}_{G_{cp}} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{cp} = -m_p g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- On applique le théorème de la résultante dynamique au contrepoids par rapport au repère R_0 galiléen en projection sur la direction \vec{y}_0 , ce qui donne l'équation :

$$\vec{R}_d(contrepoids/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \vec{R}(\overline{contrepoids} \rightarrow contrepoids) \cdot \vec{y}_0.$$

Or,

$$\vec{R}_d(contrepoids/R_0) \cdot \vec{y}_0 = m_p \vec{\Gamma}(G_{cp}/R_0) \cdot \vec{y}_0 = m_p \Gamma_{cp} = -m_p \Gamma.$$

Avec Γ_{cp} l'accélération du contrepoids dans son mouvement de translation qui est donc égale à l'opposée de l'accélération de la cabine.

De plus :

$$\vec{R}(\overline{contrepoids} \rightarrow contrepoids) \cdot \vec{y}_0 = F(cable \rightarrow contrepoids) - m_p g.$$

- Ce qui donne l'équation :

$$m_p \cdot (-\Gamma) = -m_p \cdot g + F_{cable \rightarrow contrepoids},$$

d'où

$$\boxed{F_{cable \rightarrow contrepoids} = m_p \cdot (-\Gamma + g).} \quad (12)$$

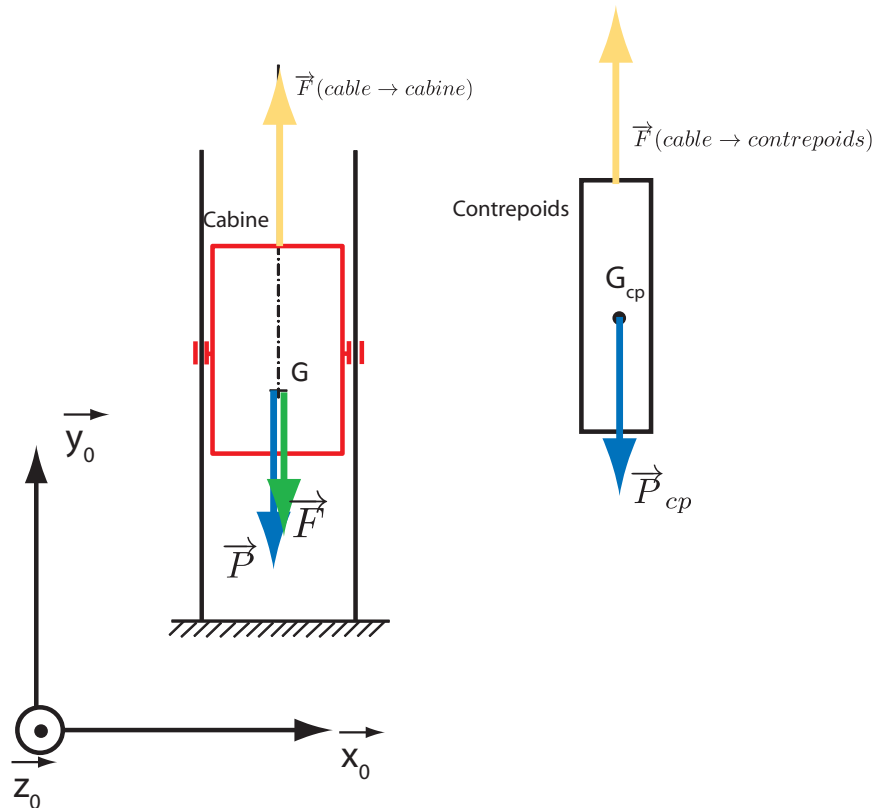


FIGURE 44 – Bilan des actions mécaniques sur la cabine et le contrepoids

4. • On isole l'ensemble en rotation $\{E_2\} = \{\text{Poulie+roue du réducteur+axe+câbles}\}$
 • Bilan des Actions Mécaniques Extérieures à l'ensemble en rotation $\{E_2\}$ (figure 45).
 ◦ Action du bâti sur l'ensemble rotation (liaison pivot) :

$$\{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow E_2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(0 \rightarrow E_2) \\ \vec{M}_O(0 \rightarrow E_2) \end{Bmatrix}_O$$

Avec $\vec{M}_O(0 \rightarrow E_2) \cdot \vec{z}_0 = 0$ car la liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) est parfaite.

- Action de la pesanteur sur l'ensemble en supposant que le centre de gravité de l'ensemble se situe sur l'axe de rotation (O, \vec{z}_0) :

$$\{\mathcal{T}_{(pesanteur \rightarrow E_2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{P}_{E_2} = -m_{E_2} g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

- On écrit l'action de la cabine sur le câble et donc E_2 :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{(cabine \rightarrow E_2)}\} &= \begin{Bmatrix} \vec{F}(cabine \rightarrow cable) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \\ &= \begin{Bmatrix} -F(cabine \rightarrow cable) \vec{y}_0 \\ \vec{OA} \wedge (-F(cabine \rightarrow cable) \vec{y}_0) = \frac{d_p}{2} F(cabine \rightarrow cable) \vec{z}_0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- On écrit l'action du contrepoids sur le câble :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{(contrepoids \rightarrow E_2)}\} &= \begin{Bmatrix} \vec{F}(contrepoids \rightarrow cable) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \\ &= \begin{Bmatrix} -F(contrepoids \rightarrow cable) \vec{y}_0 \\ \vec{OB} \wedge (-F(contrepoids \rightarrow cable) \vec{y}_0) = -\frac{d_p}{2} F(contrepoids \rightarrow cable) \vec{z}_0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- Action de la vis sur la roue du réducteur :

$$\{\mathcal{F}_{(vis \rightarrow E_2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}_0(vis \rightarrow E_2) = C_1 \vec{z}_0 - C_2 \vec{x}_0 \end{array} \right\}.$$

- On écrit le théorème du moment dynamique appliqué à $\{E_2\}$ dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 selon l'axe de rotation (O, \vec{z}_0) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O(\overline{E_2 \rightarrow E_2})} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{\delta}_O(E_2/R_0) \cdot \vec{z}_0.$$

Or l'ensemble E_2 est en rotation autour de l'axe fixe par rapport à R_0 (O, \vec{z}_0) :

$$\overrightarrow{\delta}_O(E_2/R_0) \cdot \vec{z}_0 = I_{pr} \frac{d\omega_p}{dt}.$$

- On obtient alors l'équation :

$$I_{pr} \cdot \frac{d\omega_p}{dt} = \frac{dp}{2} \cdot [F_{cabine \rightarrow cable} - F_{contrepooids \rightarrow cable}] + C_1$$

Or,

$$I_{pr} \cdot \frac{d\omega_p}{dt} = I_{pr} \cdot \frac{2}{dp} \cdot \Gamma.$$

, d'où

$$C_1 = I_{pr} \cdot \frac{2}{dp} \cdot \Gamma - \frac{dp}{2} \cdot [F_{cabine \rightarrow cable} - F_{contrepooids \rightarrow cable}]. \quad (13)$$

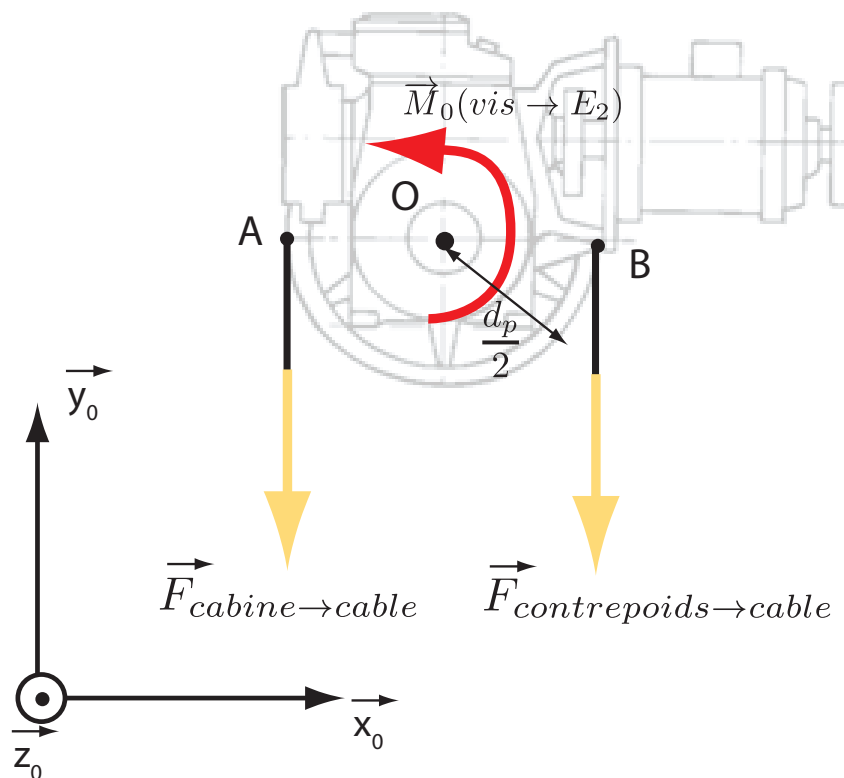


FIGURE 45 – Bilan des actions mécaniques extérieures sur l'ensemble en rotation $\{E_2\}$

- On isole l'ensemble en rotation $\{E_3\} = \{\text{Rotor+vis du réducteur+tambour du frein(volant d'inertie)}\}$
- Bilan des Actions Mécaniques Extérieures à l'ensemble en rotation $\{E_3\}$ (figure 45).

- Action du bâti sur l'ensemble rotation (liaison pivot) :

$$\{\mathcal{F}_{(0 \rightarrow E_3)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(0 \rightarrow E_3) \\ \vec{M}_O(0 \rightarrow \Sigma_1) \end{Bmatrix}$$

Avec $\vec{M}_O(0 \rightarrow E_3) \cdot \vec{x}_0 = 0$ car la liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) est parfaite.

- Action de la pesanteur sur l'ensemble en supposant que le centre de gravité de l'ensemble se situe sur l'axe de rotation (O, \vec{x}_0) :

$$\{\mathcal{F}_{(pesanteur \rightarrow E_3)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{P}_{E_3} = -m_{E_3} g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

- Action de la roue sur la vis :

$$\{\mathcal{F}_{(roue \rightarrow E_3)}\} = -\{\mathcal{F}_{(vis \rightarrow E_2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_0(roue \rightarrow E_3) = -C_1 \vec{z}_0 + C_2 \vec{x}_0 \end{Bmatrix}.$$

- Action du moteur sur la vis :

$$\{\mathcal{F}_{(moteur \rightarrow E_3)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_0(moteur \rightarrow E_3) = C_m \vec{x}_0 \end{Bmatrix}.$$

- On écrit le théorème du moment dynamique appliqué à $\{E_3\}$ dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 selon l'axe de rotation (O, \vec{x}_0) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O(\vec{E}_3 \rightarrow E_3)} \cdot \vec{x}_0 = \overrightarrow{\delta}_O(E_3/R_0) \cdot \vec{x}_0.$$

Or l'ensemble E_3 est en rotation autour de l'axe fixe par rapport à R_0 (O, \vec{x}_0) :

$$\overrightarrow{\delta}_O(E_3/R_0) \cdot \vec{x}_0 = (I_m + I_v) \frac{d\omega_m}{dt}.$$

On obtient alors,

$$(I_m + I_v) \cdot \frac{d\omega_m}{dt} = C_m + C_2$$

, d'où

$$C_2 = (I_m + I_v) \cdot \frac{2}{\lambda \cdot dp} \cdot \Gamma - C_m. \quad (14)$$

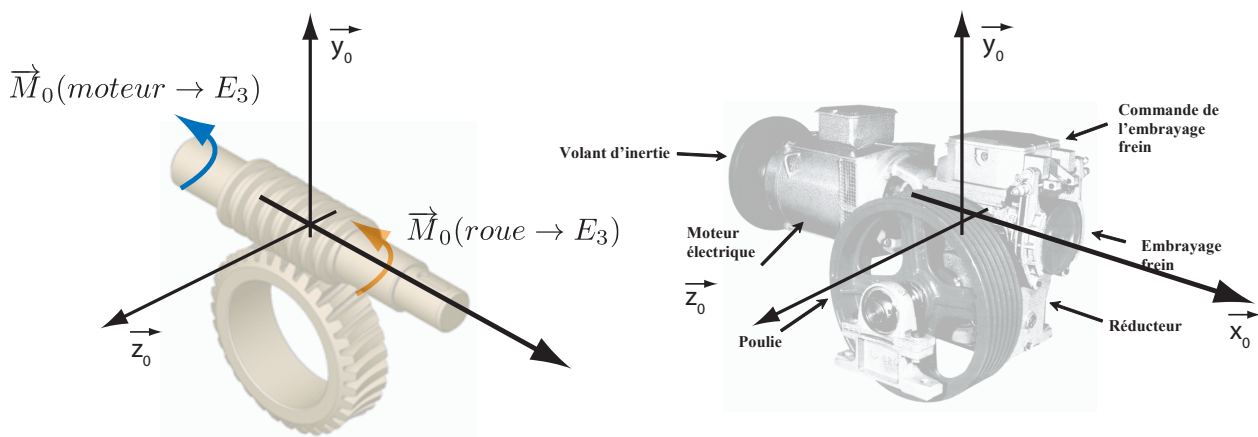


FIGURE 46 – Bilan des actions mécaniques extérieures sur l'ensemble en rotation $\{E_3\}$

6. Le rendement en régime permanent se définit à partir de l'expression des puissances (Cf question 11). Ici il y avait une petite erreur dans l'énoncé. Le rendement η s'exprime :

$$\eta = \frac{C_m \omega_m + C_1 \omega_p + C_2 \omega_m}{C_m \omega_m} = \frac{C_m \omega_m + C_1 \lambda \omega_m + C_2 \omega_m}{C_m \omega_m}.$$

En simplifiant par ω_m , on obtient alors une expression donnant C_2 en fonction de C_1 :

$$C_2 = (\eta - 1) C_m - C_1 \lambda.$$

En injectant cette expression dans l'équation 14, on obtient,

$$(\eta - 1) C_m - C_1 \lambda = (I_m + I_v) \cdot \frac{2}{\lambda \cdot d_p} \cdot \Gamma - C_m.$$

En utilisant la relation 13, on obtient :

$$(\eta - 1) C_m - \left(I_{pr} \cdot \frac{2}{d_p} \cdot \Gamma - \frac{d_p}{2} \cdot [F_{cabine \rightarrow cable} - F_{contrepois \rightarrow cable}] \right) \lambda = (I_m + I_v) \cdot \frac{2}{\lambda \cdot d_p} \cdot \Gamma - C_m.$$

En utilisant les réponses aux questions 2 et 3 (équations 11 et 12) et le fait que

$$F_{cabine \rightarrow cable} = -F_{cable \rightarrow cabine} = -m_c \cdot (\Gamma + g) - F,$$

$$F_{contrepois \rightarrow cable} = -F_{cable \rightarrow contrepois} = -m_p \cdot (-\Gamma + g).$$

$$(\eta - 1) C_m - \left(I_{pr} \cdot \frac{2}{d_p} \cdot \Gamma + \frac{d_p}{2} \cdot [m_c (\Gamma + g) + F - m_p \cdot (-\Gamma + g)] \right) \lambda = (I_m + I_v) \cdot \frac{2}{\lambda \cdot d_p} \cdot \Gamma - C_m.$$

$$\eta C_m + \Gamma \left[-\frac{d_p}{2} (m_c + m_p) - I_{pr} \cdot \frac{2}{d_p} - (I_m + I_v) \cdot \frac{2}{\lambda^2 \cdot d_p} \right] \lambda + \frac{d_p}{2} [(m_p - m_c) g - F] \lambda = 0.$$

On obtient alors l'expression de l'accélération Γ qui doit rester inférieure à Γ_{max} :

$$\Gamma = \frac{\eta C_m + \frac{d_p}{2} [(m_p - m_c) g - F] \lambda}{\left[\frac{d_p}{2} (m_c + m_p) + I_{pr} \cdot \frac{2}{d_p} + (I_m + I_v) \cdot \frac{2}{\lambda^2 \cdot d_p} \right] \lambda} \leq \Gamma_{max}.$$

d'où,

$$\left[\eta C_m + \frac{d_p}{2} [(m_p - m_c) g - F] \lambda \right] \leq \left[\frac{d_p}{2} (m_c + m_p) + I_{pr} \cdot \frac{2}{d_p} + (I_m + I_v) \cdot \frac{2}{\lambda^2 \cdot d_p} \right] \lambda \Gamma_{max}.$$

$$(I_m + I_v) \cdot \frac{2}{\lambda^2 \cdot d_p} \geq \frac{\eta}{\lambda \Gamma_{max}} C_m + \frac{d_p}{2 \Gamma_{max}} [(m_p - m_c) g - F] - \frac{d_p}{2} (m_c + m_p) - I_{pr} \cdot \frac{2}{d_p}.$$

Donc

$$I_v \geq \frac{\lambda^2 d_p^2}{4 \Gamma_{max}} \left[\eta C_m \frac{2}{\lambda d_p} + g (m_p - m_c) - F - (m_c + m_p) \Gamma_{max} - I_{pr} \frac{4 \Gamma_{max}}{d_p^2} \right] - I_m. \quad (15)$$

7. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_{c1} de l'ensemble E_1 .

L'ensemble E_1 est en mouvement de translation à la vitesse V , donc,

$$E_{c1} = \frac{1}{2} (m_c + m_p) V^2. \quad (16)$$

8. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_{c2} de l'ensemble E_2 .
L'ensemble E_2 est rotation autour de l'axe fixe (O, \vec{z}_0) , donc,

$$E_{c2} = \frac{1}{2} I_{pr} \omega_p^2.$$

avec $\omega_p = \frac{2V}{d_p}$,

$$E_{c2} = \frac{2 I_{pr}}{d_p^2} V^2. \quad (17)$$

9. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_{c3} de l'ensemble E_3 .
L'ensemble E_3 est rotation autour de l'axe fixe (O, \vec{x}_0) , donc,

$$E_{c3} = \frac{1}{2} (I_v + I_m) \omega_m^2.$$

avec $\omega_m = \frac{\omega_p}{\lambda}$,

$$E_{c3} = \frac{2 (I_v + I_m)}{\lambda^2 d_p^2} V^2. \quad (18)$$

10. Donner l'expression littérale de la puissance des actions extérieures à l'ensemble E .

- la pesanteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p(\text{pesanteur} \rightarrow E/R_0) &= \left\{ \mathcal{T}_{(\text{pes} \rightarrow \text{cabine})} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(\text{cabine}/R_0)} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{(\text{pes} \rightarrow \text{contrepois})} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(\text{contrepois}/R_0)} \right\} \\ &= g (m_p - m_c) V \end{aligned}$$

Avec V la vitesse de translation ascendante de la cabine donc $-V$ la vitesse de translation descendante du contrepois.

- le couple C_m des actions magnétiques du stator sur le rotor sur l'arbre moteur (couple moteur ou de freinage) : $\mathcal{P}_m = C_m \omega_m = C_m \frac{2V}{\lambda d_p}$,
- l'action du guidage : $\mathcal{P}_F = \left\{ \mathcal{T}_{(0 \rightarrow \text{cabine})} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(\text{cabine}/R_0)} \right\} = -F V$.

Ainsi,

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0) = g (m_p - m_c) V + C_m \frac{2V}{\lambda d_p} - F V. \quad (19)$$

11. Donner l'expression littérale de la puissance des actions intérieures.

On peut noter la puissance des inter-effort comme :

$$\mathcal{P}_m(\text{int} \rightarrow E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j/R)$$

Lorsque les liaisons sont parfaites ce terme est nul.

$$\mathcal{P}(\text{int} \rightarrow E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j/R) = 0.$$

Lorsque les liaisons sont non parfaites, il y a de la dissipation énergétique. Ainsi on appelle ce terme **puissance dissipée** et il est négatif :

$$\mathcal{P}_m(\text{int} \rightarrow E) = \mathcal{P}_d < 0.$$

Ici les liaisons non parfaites sont uniquement dues en contact **vis/roue**, donc :

$$\mathcal{P}_m(\text{int} \rightarrow E) = \mathcal{P}(E_2 \leftrightarrow E_3) = \left\{ \mathcal{T}_{(E_3 \rightarrow E_2)} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(E_2/E_3)} \right\}.$$

L'action de E_3 sur E_2 est un torseur couple donné par :

$$\{\mathcal{T}_{(E_3 \rightarrow E_2)}\} = \{\mathcal{T}_{(vis \rightarrow E_2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}_0(vis \rightarrow E_2) = C_1 \vec{z}_0 - C_2 \vec{x}_0 \end{array} \right\}.$$

Ainsi pour calculer le comoment $\{\mathcal{T}_{(E_3 \rightarrow E_2)}\} \otimes \{\mathcal{V}_{(E_2/E_3)}\}$ on a besoin uniquement de connaître $\overrightarrow{\Omega(E_2/E_3)}$:

$$\overrightarrow{\Omega(E_2/E_3)} = \overrightarrow{\Omega(E_2/0)} - \overrightarrow{\Omega(E_3/0)} = \omega_p \vec{z}_0 - \omega_m \vec{x}_0.$$

Ainsi la puissance intérieure qui est égale à la puissance dissipée au sein du système \mathcal{P}_d est donné par :

$$\mathcal{P}_m(int \rightarrow E) = \mathcal{P}(E_2 \leftrightarrow E_3) = C_1 \omega_p + C_2 \omega_m = \mathcal{P}_d.$$

On introduit alors un rendement de l'ensemble réducteur η que l'on peut définir en régime permanent comme le ratio entre la puissance utile au système (\mathcal{P}_u) et la puissance d'entrée du système (\mathcal{P}_e) :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_e} = \frac{\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_d}{\mathcal{P}_m} = \frac{C_m \omega_m + C_1 \omega_p + C_2 \omega_m}{C_m \omega_m}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_m (\eta - 1) = C_m \frac{2V(\eta - 1)}{\lambda d_p}. \quad (20)$$

12. En déduire l'expression littérale de I_v pour que Γ_{max} ne soit jamais dépassée.

$$\frac{dE_c(E/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(ext \rightarrow E/R_g) + \mathcal{P}(int \rightarrow E).$$

Or,

$$\frac{dE_c(E/R_g)}{dt} = \Gamma \left[(m_c + m_p) V + I_{pr} \frac{4V}{d_p^2} + (I_v + I_m) \frac{4V}{\lambda^2 d_p^2} \right]$$

d'où,

$$\Gamma \left[(m_c + m_p) V + I_{pr} \frac{4V}{d_p^2} + (I_v + I_m) \frac{4V}{\lambda^2 d_p^2} \right] = g (m_p - m_c) V + C_m \frac{2V}{\lambda d_p} - FV + C_m \frac{2V(\eta - 1)}{\lambda d_p}$$

donc,

$$\Gamma = \frac{g(m_p - m_c) - F + C_m \frac{2\eta}{\lambda d_p}}{(m_c + m_p) + I_{pr} \frac{4}{d_p^2} + (I_v + I_m) \frac{4}{\lambda^2 d_p^2}} \leq \Gamma_{max}.$$

Donc,

$$I_v \geq \frac{\lambda^2 d_p^2}{4\Gamma_{max}} \left[\eta C_m \frac{2}{\lambda d_p} + g(m_p - m_c) - F - (m_c + m_p) \Gamma_{max} - I_{pr} \frac{4\Gamma_{max}}{d_p^2} \right] - I_m. \quad (21)$$

Exercice 6 : Misson insight

Q 22 : Donner l'expression littérale de $M(p)$ et K_{adap} , pour garantir un bon asservissement.

D'après le schéma bloc $M(p)$ permet d'obtenir un déplacement en mètre à partir d'une vitesse en m/s. $M(p)$ est

donc un bloc intégrateur. $M(p) = \frac{1}{p}$

Pour avoir un bon asservissement on doit avoir $\varepsilon(p) = 0$ si $D(p) = D_c(p)$.

On en déduit que $K_{adap} = K_{capt}$

Q 23 : Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(p)$ et mettre celle-ci sous forme canonique. Évaluer la classe de cette fonction de transfert.

Directement à partir du schéma bloc : $G_{BO}(p) = C_0(p) \cdot K_H \cdot \frac{F_0}{1+T_0 p} \cdot K_{red} \cdot \frac{1}{p} \cdot K_{cap}$ $G_{BO}(p) = \frac{K_H F_0 K_{red} K_{cap}}{p(1+T_0 p)}$ ($C_0(p)=1$)

On obtient une fonction de transfert d'ordre 2 et de classe 1.

Q 24 : Calculer $\varepsilon(p)$ en fonction de $D_c(p)$ et des constantes du problème. En déduire l'erreur statique et de trainage. Conclure sur la précision du système.

$$\varepsilon(p) = K_{capt} (D_c(p) - D(p)) = K_{capt} \left(D_c(p) - C_0(p) \cdot K_H \cdot \frac{F_0}{1+T_0 \cdot p} \cdot K_{red} \cdot \frac{1}{p} \cdot \varepsilon(p) \right)$$

↔

$$\varepsilon(p) = \frac{K_{capt} \cdot D_c(p)}{1 + \frac{K_{capt} \cdot K_H \cdot F_0 \cdot K_{red}}{p(1+T_0 \cdot p)}}$$

On obtient une fonction de transfert d'ordre 2 et de classe 1.

- **Erreur statique :** $D_c(p) = \frac{D_0}{p}$

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_{capt} \cdot D_0}{1 + \frac{K_{capt} \cdot K_H \cdot F_0 \cdot K_{red}}{p(1+T_0 \cdot p)}} = 0$$

- **Erreur de trainage :** $D_c(p) = \frac{D_0}{p^2}$

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_{capt} \cdot D_0}{p + \frac{K_{capt} \cdot K_H \cdot F_0 \cdot K_{red}}{(1+T_0 \cdot p)}} = \frac{D_0}{K_H \cdot F_0 \cdot K_{red}}$$

Le système sera précis dans le cas d'une entrée échelon (on considérant la perturbation nulle)

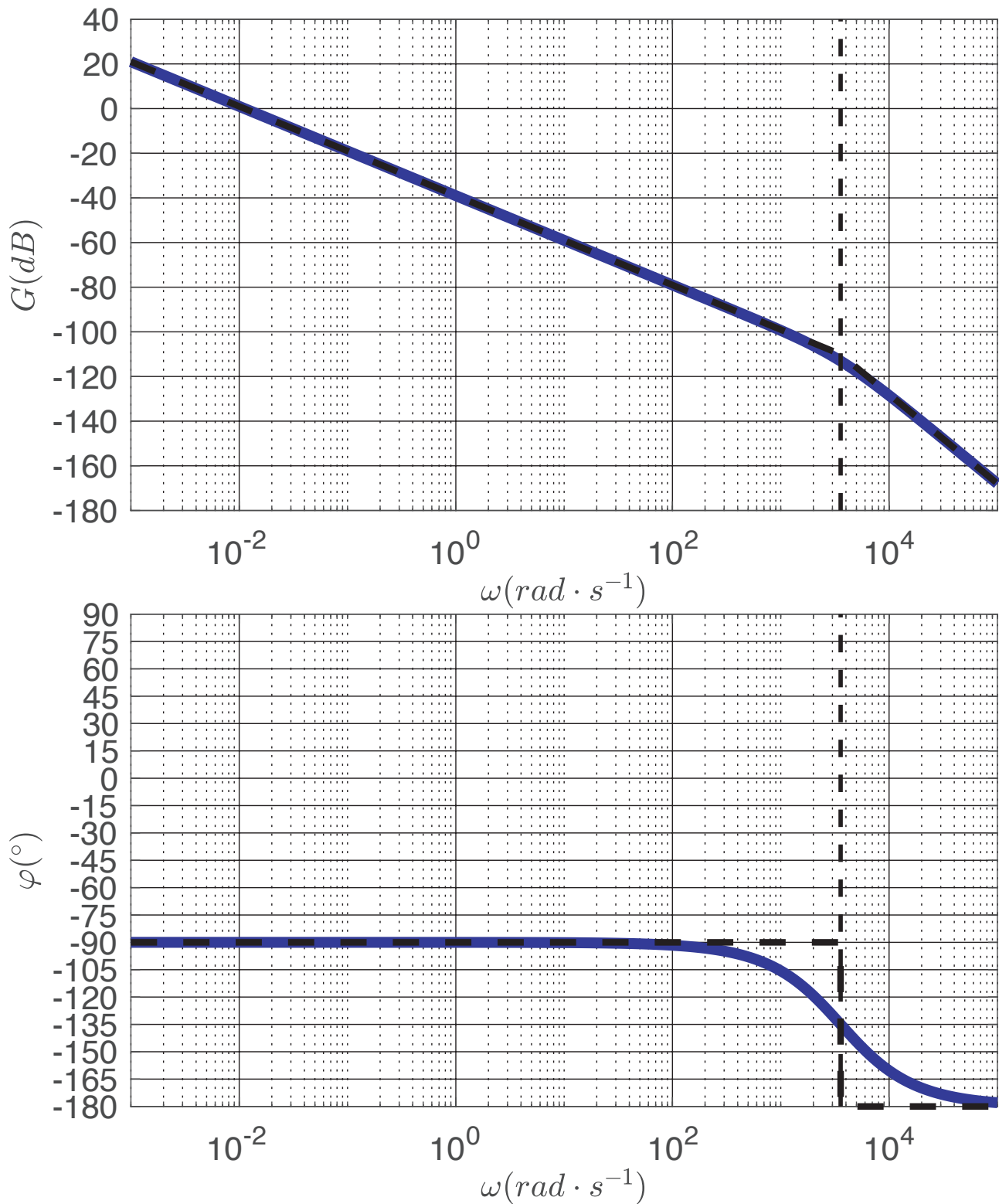
Q 25 : Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels de la fonction de transfert $G_{BO}(p)$ sur le document réponse. En déduire la marge de phase de l'asservissement en effectuant toutes les constructions graphiques nécessaires. Conclure sur le respect de l'exigence 006 « Stabilité ».

On a deux pulsation caractéristiques :

- $\omega_1 = 0,0112 rad/s$;
- $\omega_2 = \frac{1}{2,8 \cdot 10^{-4}} \approx 3571 rad/s$

| ω | $0 \rightarrow \omega_1$ | | ω_1 | $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ | | ω_2 | $\omega_2 \rightarrow \infty$ | |
|---|--------------------------|---------------------|------------|---------------------------------|---------------------|------------|-------------------------------|---------------------|
| Tracé asymptotique | Gain (dB/dec) | $\varphi(^{\circ})$ | Gain (dB) | Gain (dB/dec) | $\varphi(^{\circ})$ | Gain (dB) | Gain (dB/dec) | $\varphi(^{\circ})$ |
| $\frac{0,0112}{p}$ | -20 | -90 | 0 | -20 | -90 | - | -20 | -90 |
| $\frac{1}{1+2,8 \cdot 10^{-4} \cdot p}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 00 | 0 | -20 | -90 |
| $G_{BO}(p)$ | -20 | -90 | 0 | -20 | -90 | - | -40 | -180 |

On obtient graphiquement une marge de phase de $90^{\circ} > 70^{\circ}$ l'exigence 006 est donc respectée



Q 26 : Déterminer et calculer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert en boucle fermée $G_{BF}(p) = \frac{D(p)}{D_c(p)}$. En déduire le temps de réponse de l'asservissement en vitesse. Conclure sur le respect de l'exigence 004 « Rapidité ».

A partir du schéma bloc, on peut écrire :

$$G_{BF}(p) = \frac{D(p)}{D_c(p)} = \frac{K_{\text{adap}} \frac{G_{BO}(p)}{K_{\text{capt}}}}{1 + G_{BO}(p)} = \frac{G_{BO}(p)}{1 + G_{BO}(p)} \quad (\text{rappel } K_{\text{adap}} = K_{\text{capt}})$$

$$G_{BF}(p) = \frac{\frac{0,0112}{p \cdot (0,00028p+1)}}{1 + \frac{0,0112}{p \cdot (0,00028p+1)}} = \frac{0,0112}{p \cdot (0,00028p+1) + 0,0112} = \frac{1}{1 + \frac{1}{0,0112}p + \frac{0,00028}{0,0112}p^2}$$

$$G_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{0,0112}p + \frac{0,00028}{0,0112}p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

On obtient une fonction de transfert d'ordre 2 de gain statique 1 (sans unité). Par identification, on peut écrire :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{0,00028}{0,0112} \quad \omega_0 = 6,3 \text{ rad/s}$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{1}{0,0112} \quad \zeta = 280 > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'après l'énoncé on a donc $t_{r5\%} = \frac{6\zeta}{\omega_0}$.

Application numérique : $t_{r5\%} = \frac{6 \cdot 280}{6,3} = 266 \text{ s} > 5 \text{ s}$. *L'exigence 004 n'est pas respectée*

Q 27 : À partir de constructions graphiques sur le diagramme de Bode du document réponse, donner la valeur du gain du correcteur K_{D1} , permettant de garantir une marge de phase supérieure à 70° . La valeur de K_{D1} vous paraît-elle pertinente et réaliste ?

On a une phase de 110° pour ω qui vaut environ 1200 rad/s . Pour cette valeur de ω le gain vaut -100 dB . Pour avoir une marge de phase de 70° , il faut relever la courbe de gain de 100 dB .

On doit donc avoir $20 \log K_{D1} = 100$ $K_{D1} = 10^5$

Pour avoir une marge de phase d'au moins 70° , on doit donc avoir $K_{D1} < 10^5$

Cette valeur de K_{D1} n'est pas pertinente. Un gain aussi important va conduire à des tensions d'alimentation du moteur beaucoup trop importantes.

Q 28 : À partir des équations 1 de la figure 15 liant le temps de réponse, le facteur d'amortissement et la pulsation propre ainsi que de l'expression numérique de $G_{BF}(p)$, donner une expression liant $t_{r5\%}$ et K_{D2} . En déduire la valeur de K_{D2} permettant de respecter la contrainte imposée en termes de rapidité.

Avec un facteur d'amortissement supérieur à 1 (donc supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$) on a d'après l'énoncé :

$$t_{r5\%} = \frac{6\zeta}{\omega_0}$$

D'après l'expression de $G_{BF}(p)$, on a $\frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{89}{K_D}$ d'où $t_{r5\%} = 3 \cdot \frac{89}{K_D}$

Pour avoir un temps de réponse à 5% de 5s, il faut donc : $5 = 3 \cdot \frac{89}{K_D}$ $K_D = \frac{3 \cdot 89}{5} = 53,4$

Q 29 : Commenter les courbes (respect des exigences) et choisir le correcteur qui vous paraît le plus pertinent.

| | $K_{D1} = 220000$ | $K_{D2} = 53$ |
|--------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| Id004 ($t_{r5\%} < 5\text{s}$) | (proche de 0.0015s) Respectée | (très proche de 5s) Respectée |
| Id005 (erreur statique nulle) | Respectée | Respectée |
| Id006 (pas de dépassement) | Non respectée | Respectée |
| Id006 (marge de phase $> 70^\circ$) | ($K_{D1} > 10^5$) Non respectée | ($K_{D2} < 10^5$) Respectée |

Le correcteur le plus pertinent est donc $K_{D2} = 53$

Exercice 7 : Modélisation du robot d'exploration martienne Spirit

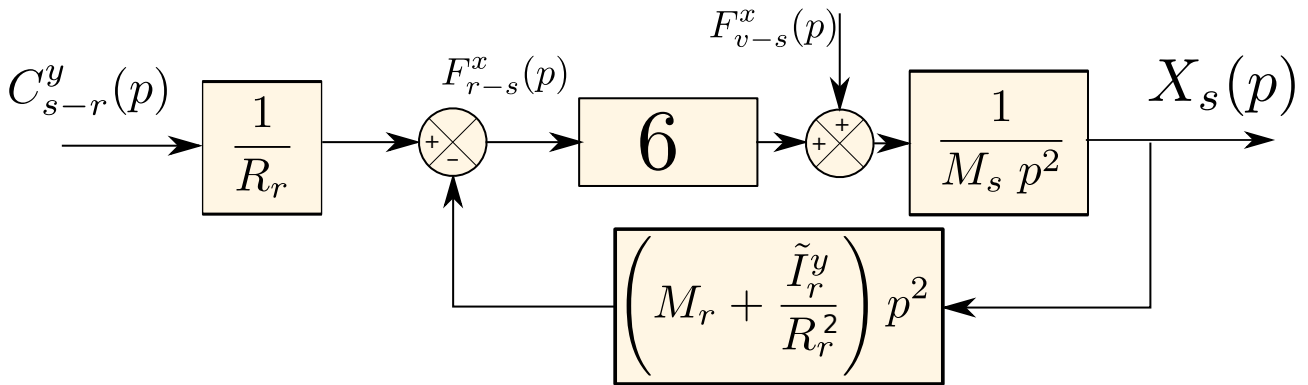
3 Corrigé : étude du robot d'exploration martienne

Q 30 : Écrire la transformée de Laplace des équations de la Dynamique, notées 2 et 3 en considérant que les conditions initiales sont nulles.

$$M_s p^2 X_s(p) = 6 F_{r-s}^x(p) + F_{v-s}^x(p)$$

$$\left(M_r + \frac{\tilde{I}_r^y}{R_r^2}\right) p^2 X_s(p) = -F_{r-s}^x(p) + \frac{C_{s-r}^y(p)}{R_r}$$

Q 31 : A partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, remplir le schéma blocs du document réponse.



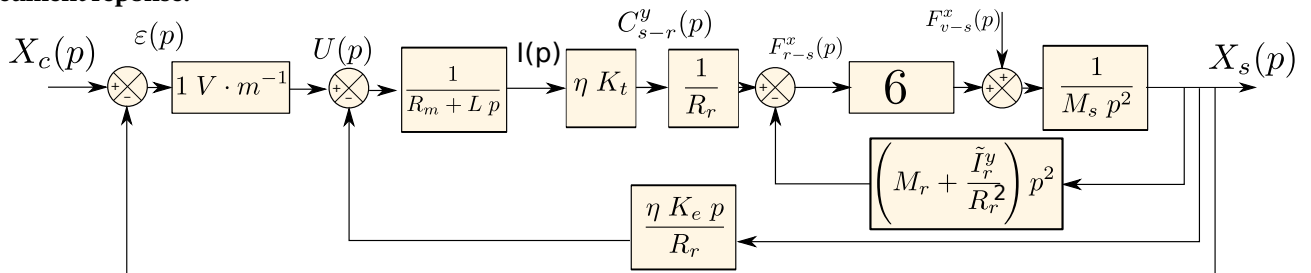
Q 32 : Écrire la transformée de Laplace des équations régissant le Moteur à Courant Continu, notées 4, 5 et 6 en considérant que les conditions initiales sont nulles.

$$U(p) = E(p) + R_m I(p) + L p I(p),$$

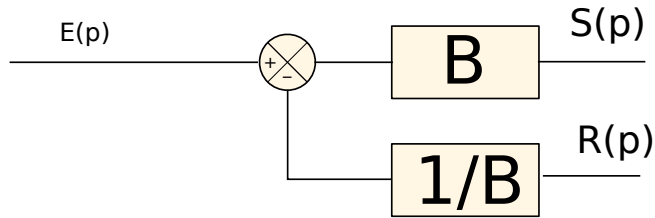
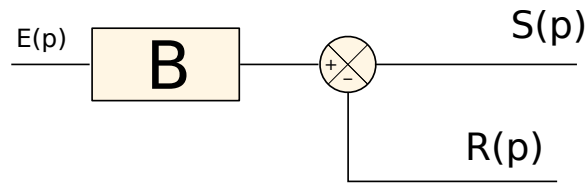
$$\frac{C_{s-r}^y(p)}{\eta} = K_t \cdot I(p),$$

$$E(p) = K_e \frac{\eta}{R_r} p X_s(p).$$

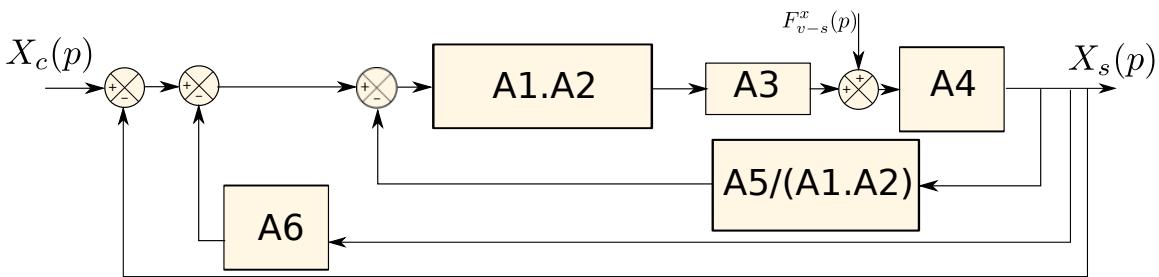
Q 33 : A partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, remplir le schéma bloc de la figure du document réponse.



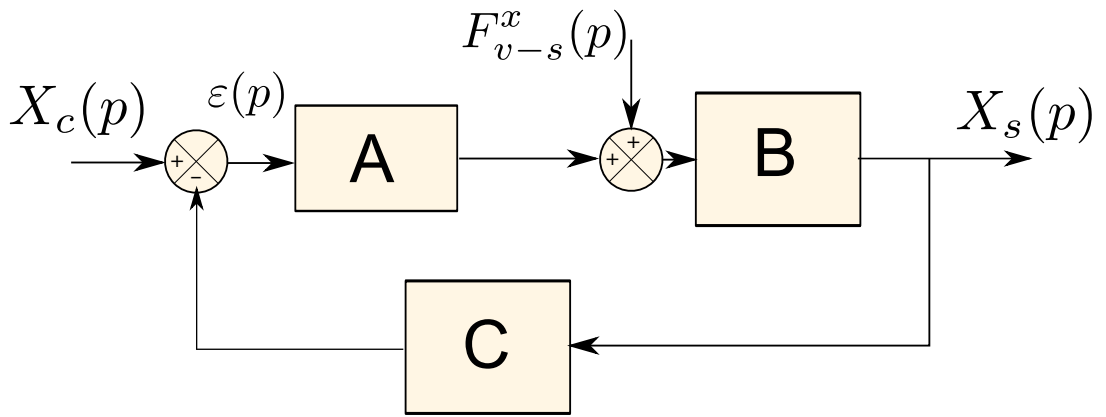
Q 34 : Pour réduire ce schéma bloc nous allons le manipuler en passant des blocs de l'amont vers l'aval des points de prélèvement. On raisonne donc déjà dans le cas général grâce à la figure ci-dessous. Donner une relation l'expression du bloc manquant en fonction de B



Q 35 : Montrer alors que l'on peut mettre le schéma bloc sous la forme suivante avec 3 retours en parallèle. On pourra alors exprimer les fonctions de transfert manquantes à partie des fonctions A_i .



Q 36 : Ce schéma bloc peut se réduire à un schéma de bloc de la forme de celui proposé ci dessous (On pourra regrouper les trois boucles retours parallèles en une seule). Exprimer alors A, B et C en fonctions des A_i



$$B = A_4$$

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

$$C = 1 + A_6 + \frac{A_5}{A_1 \cdot A_2}$$

Q 37 : A partir des résultats de l'étude préliminaire et de la partie précédente, donner l'expression des blocs A, B et C.

$$A = \frac{6 \cdot \eta K_t}{(L p + R_m) R_r}$$

$$B = \frac{1}{M_s p^2}$$

$$C = \frac{L p + R_m}{\eta K_t} \left[M_r R_r + \frac{I_r^y}{R_r} \right] p^2 + \frac{\eta K_e p}{R_r} + 1.$$

Q 38 : Sous couvert de cette hypothèse d'inductance nulle, montrer que les fonctions de transfert A, B et C s'expriment :

$$A = \frac{6 \cdot \eta K_t}{R_m R_r}, B = \frac{1}{M_s p^2}$$

et

$$C = \frac{(\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t}{\eta R_r K_t}$$

Q 39 : A partir de la méthode de votre choix, exprimer $G_1(p)$ et $G_2(p)$ en fonction de A, B et C.

En utilisant la méthode de superposition, on obtient :

- $G_1(p)$ en prenant $F_{v-p}^x(p) = 0$ et en appliquant la formule de Black :

$$G_1(p) = \frac{A A' B}{1 + A A' B C}$$

- $G_2(p)$ en prenant $X_c(p) = 0$ et en appliquant la formule de Black :

$$G_2(p) = \frac{B}{1 + A A' B C}$$

Q 40 : En remplaçant A, B et C par leur valeur (cf ci dessus), montrer que l'on peut écrire sous forme canonique :

$$G_1(p) = \frac{\tilde{K}_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

et

$$G_2(p) = \frac{\tilde{K}_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

En remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned}
 G_1(p) &= \frac{A A' B}{1 + A A' B C} = \frac{\frac{6 \eta K_t}{R_m R_r M_s p^2}}{1 + \frac{6 \eta K_t}{R_m R_r M_s p^2 \eta R_r K_t} [(\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t]} \\
 &= \frac{6 \eta K_t R_r}{R_m R_r^2 M_s p^2 + 6 [(\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t]} \\
 &= \frac{6 \eta K_t R_r}{6 \eta R_r K_t + 6 \eta^2 K_t K_e p + R_m [6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2] p^2} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{\eta K_e p}{R_r} + \frac{R_m [6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2] p^2}{6 \eta R_r K_t}}
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 G_2(p) &= \frac{B}{1 + A A' B C} = \frac{\frac{1}{M_s p^2}}{1 + \frac{6 \eta K_t}{R_m R_r M_s p^2 \eta R_r K_t} [(\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t]} \\
 &= \frac{R_m R_r^2}{R_m R_r^2 M_s p^2 + 6 [(\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t]} \\
 &= \frac{R_m R_r^2}{6 \eta R_r K_t + 6 \eta^2 K_t K_e p + R_m [6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2] p^2} \\
 &= \frac{\frac{R_m R_r}{6 \eta K_t}}{1 + \frac{\eta K_e p}{R_r} + \frac{R_m [6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2] p^2}{6 \eta R_r K_t}}
 \end{aligned}$$

On reconnaît donc bien deux fonction transfert du second ordre.

Q 41 : Donner l'expression des constantes caractéristiques : \tilde{K}_1 , \tilde{K}_2 , ξ et ω_0

Par identification, on obtient :

$$\tilde{K}_1 = 1;$$

$$\tilde{K}_2 = \frac{R_m R_r}{6 \eta K_t};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6 \eta R_r K_t}{R_m [6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2]}};$$

et

$$\xi = \frac{\omega_0 \eta K_e}{2 R_r} = \frac{\eta K_e}{2 R_r} \sqrt{\frac{6 \eta R_r K_t}{R_m [6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2]}}.$$

Q 42 : Définir l'expression de $X_c(p)$

$$X_c(p) = \frac{X_{c0}}{p}$$

Q 43 : Définir l'erreur statique absolue, notée ε_{Sa} , de ce système. En précisant le théorème utilisé, calculer cette erreur statique absolue. Le système est il précis vis à vis de sa consigne d'entrée ?

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{Sa} = \varepsilon_0 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p (E(p) - S(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p (E(p) - FTBF(p) E(p)) \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(1 - \frac{\tilde{K}_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \right) \frac{X_{c0}}{p} = 0
 \end{aligned}$$

Q 44 : Montrer que la fonction de transfert précédente peut être mise sous la forme :

$$G_1(p) = \frac{1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

$\xi > 1$ donc le polynôme du numérateur admet deux racines réelles :

$$p_1 = \frac{-27,7 + \sqrt{27,7^2 - 4 \cdot 0,36}}{2 \cdot 0,36}$$

$$p_2 = \frac{-27,7 - \sqrt{27,7^2 - 4 \cdot 0,36}}{2 \cdot 0,36}$$

Q 45 : Donner la valeur numérique des deux constantes : τ_1, τ_2 . Montrer que l'une est négligeable devant l'autre.

On obtient :

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} = \frac{-2 \cdot 0,36}{-27,7 + \sqrt{27,7^2 - 4 \cdot 0,36}} = 27,69 \text{ s}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{p_2} = \frac{-2 \cdot 0,36}{-27,7 - \sqrt{27,7^2 - 4 \cdot 0,36}} = 1,3 \times 10^{-2} \text{ s}$$

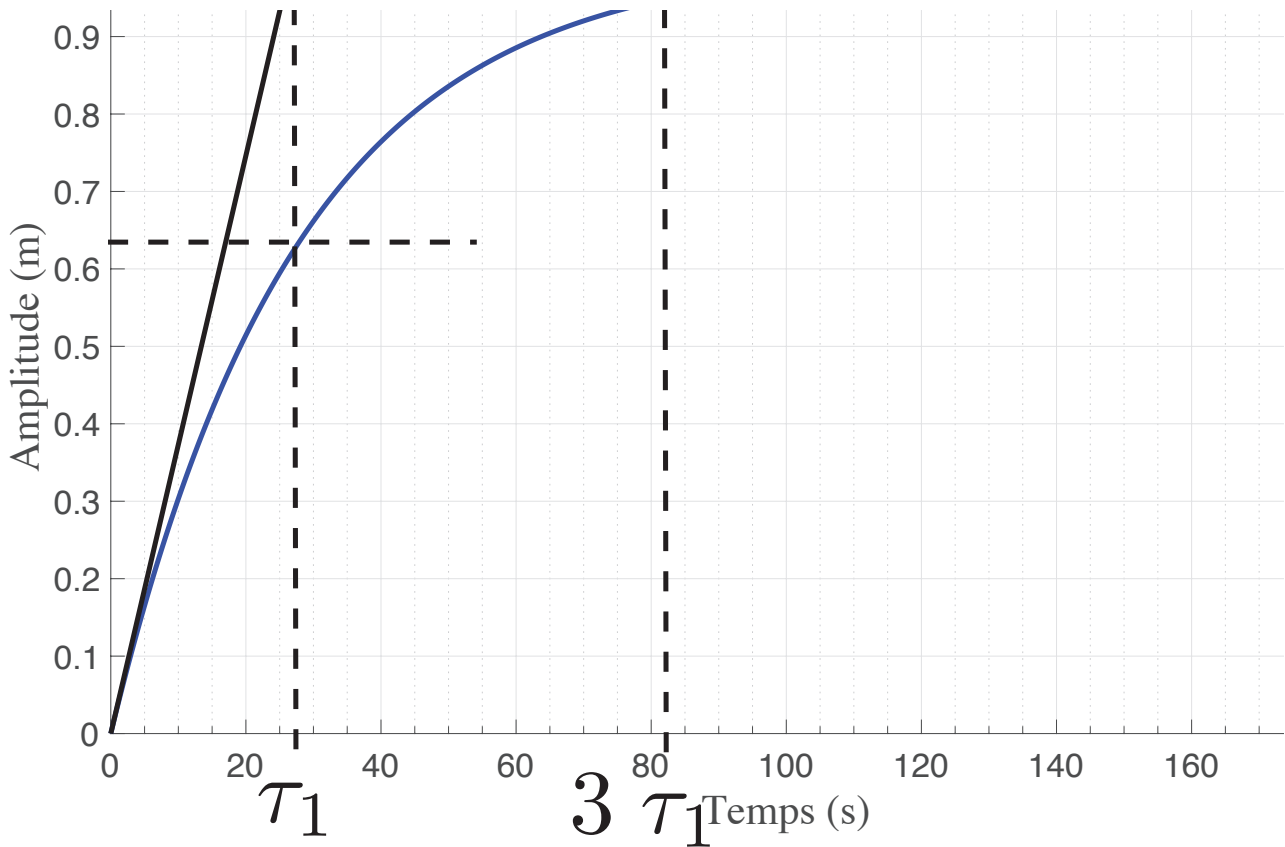
Q 46 : A partir de la réponse expérimentale, et en le justifiant, identifier l'ordre de la fonction de transfert du modèle de comportement. Sur le graphe du document réponse, effectuer les tracés nécessaires pour identifier les paramètres caractéristiques de ce système.

Sur le relevé expérimental on obtient la réponse d'un premier ordre. En effet τ_2 est négligeable devant τ_1 donc la fonction transfert peut se mettre sous la forme :

$$G_1(p) \approx \frac{\tilde{K}_1}{1 + \tau_1 p}$$

On peut alors identifier τ_1 en utilisant :

- la tangente à l'origine de pente $1/\tau_1$,
- le temps de réponse à 5% qui correspond à $3 \tau_1$,
- le temps de montée à 63% correspondant à τ_1 .



Q 47 : Vérifier que les critères de rapidité et de précision sont vérifiés

Exercice 8 : Télé-chirurgie

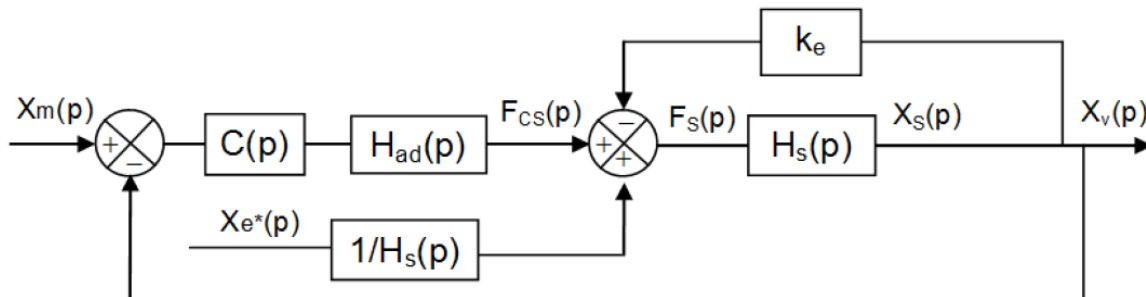
4 Corrigé : Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

Q 48 : Simplifier le schéma bloc précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure ci-dessous. Exprimer $H_i(p)$ et $H(p)$ en fonction de k_e , k_a et $H_s(p)$.

Nous présentons ici une méthode s'appuyant sur l'algèbre des schéma-bloc.

Les schémas ci-dessous sont les différentes étapes des modifications conduisant au schéma bloc souhaité.

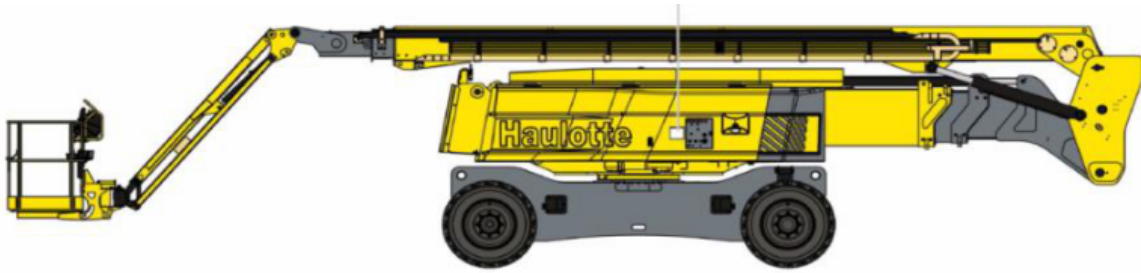
Tout d'abord on décale l'intervention de $X_e(p)$ en amont pour le sortir de la boucle interne.



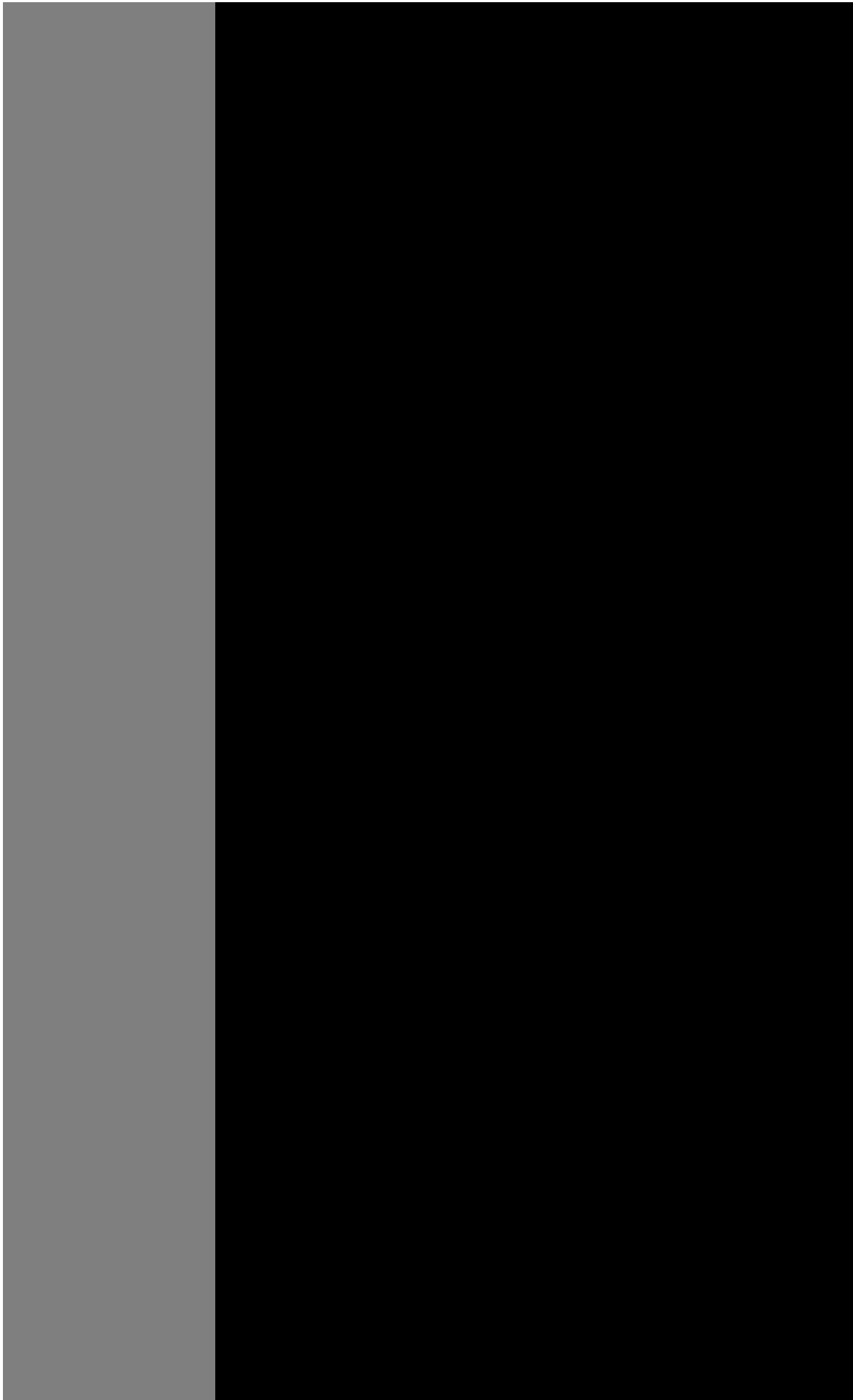
La FTBF de la boucle interne est alors :

$$\frac{X_v(p)}{F_{cs}(p)} = \frac{H_s(p)}{1 + k_e.H_s(p)}$$

, d'où le schéma-bloc suivant.



On décale ensuite l'intervention en aval de la FT calculée pour obtenir le schéma-bloc final identique à la forme demandée.



On identifie finalement :

$$H(p) = \frac{Ka.Hs(p)}{1 + ke.Hs(p)}$$

et

$$Ht(p) = \frac{1}{1 + ke.Hs(p)}$$

Q 49 : Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle : $X^*e(p) = 0$) : $FBF_1(p) = \frac{Xv(p)}{Xm(p)}$, puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique (K), pulsation propre (ω_0) et coefficient d'amortissement (z).

$$FBF_1(p) = \frac{Xv(p)}{Xm(p)} = \frac{C(p).H(p)}{1 + C(p).H(p)} = \frac{1}{\frac{1}{C(p).H(p)} + 1}$$

avec $C(p)=1$ et ;

$$H(p) = \frac{1}{m_s.p^2 + b_s.p + k_e}$$

On reconnaît une FT du 2^{ème} ordre.

Ecrivons cette FT sous forme canonique :

$$FBF_1(p) = \frac{\frac{1}{1+k_e}}{\frac{m_s}{1+k_e}.p^2 + \frac{b_s}{1+k_e}.p + 1}$$

D'où ses paramètres caractéristiques : gain statique

$$K = \frac{1}{1 + k_e} = 0,005 \text{ su}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m_s}{1+k_e} \\ \frac{2z}{\omega_0} = \frac{b_s}{1+k_e} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{1+k_e}{m_s}} = 36,4 \text{ rad/s} \\ z = \frac{\omega_0}{2} \frac{b_s}{1+k_e} = \frac{b_s}{2\sqrt{m_s.(1+k_e)}} = 0,13 \text{ su} \end{array} \right.$$

. NB : « su » pour sans unité;

Q 50 : Faire l'application numérique.

Q 51 : En vous aidant des abaques de la figure 15, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).

- La FT a un coefficient d'amortissement $z=0,13 < 1$, donc la réponse indicielle présentera un dépassement transitoire. *L'exigence de stabilité (amortissement) n'est donc pas vérifiée.*
- L'exigence rapidité impose un temps de réponse à 5% max pour un échelon de 0,1 s. Pour $z=0,13$ l'abaque du temps de réponse réduit figure 21.a donne .

Ainsi

$$tr_{5\%} > \frac{20}{\omega_0}$$

, or

$$\omega_0 = 36,4 \text{ rad/s}$$

d'où

$$tr_{5\%} > 0,55 \text{ s}$$

.

L'exigence de rapidité n'est donc pas vérifiée.

- L'exigence de précision impose une erreur statique max relative à un échelon de 1%. La FT ayant un gain statique K on aura en régime permanent (statique) :

$$\Delta s = K.\Delta e$$

,

d'où une erreur statique relative :

$$\frac{\Delta e - \Delta s}{\Delta e} = 1 - \frac{\Delta s}{\Delta e} = 1 - K$$

Avec $K=0,005$ on obtient une erreur de $0,995$ bien supérieur à $1\%=0,01$.

L'exigence de précision n'est donc pas vérifiée.

Q 52 : Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne $x_m(t) = x_0$ (on prendra $Q(p) = 0$ pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

On considère $A(p)$ la fonction de transfert relative à l'entrée (ou transmittance pour les puristes). C'est un FT du 2^{ème} ordre dont le $tr5\%$ est lié à la pulsation propre ω_0 et au coefficient d'amortissement z par l'abaque du temps de réponse réduit.

$$A(p) = \frac{1}{(1 + T.p)^2} = \frac{1}{1 + 2.T.p + (T.p)^2}$$

On peut donc identifier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_0^2} = T^2 \\ \frac{2z}{\omega_0} = 2T \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{T} \\ z = \frac{\omega_0}{2} \cdot 2T = \frac{2T}{2T} = 1 \text{ su} \end{array} \right.$$

. Pour $z=1$ l'abaque du temps de réponse réduit donne

$$tr5\% \cdot \omega_0 \approx 5$$

, c'est-à-dire

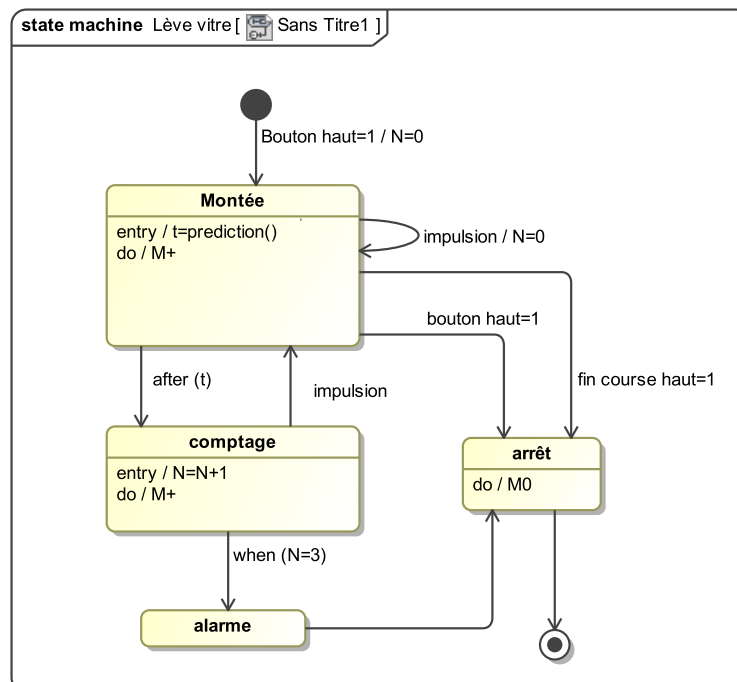
$$tr5\% \approx 5.T$$

Ainsi il faut diminuer T pour diminuer le $tr5$. Pour avoir $tr5\% \leq 0,1s$ on doit avoir $5T \leq 0,1s$ soit $T \leq 0,02s$

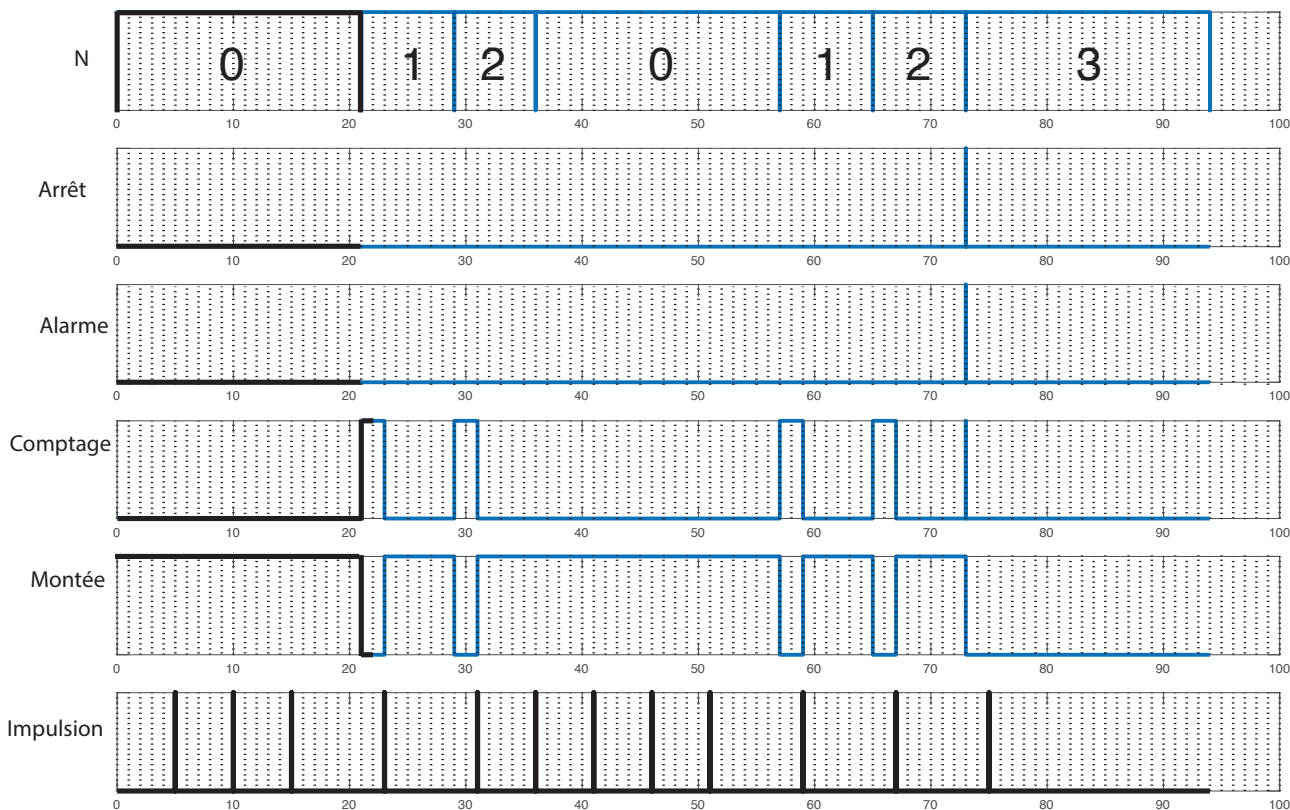
Exercice 9 : Système de commande d'un lève vitre électrique

5 Corrigé : Lève vitre électrique

Q 53 : Donner l'expression des deux conditions notées « t1 » et « t2 » permettant de passer de l'état "montée" à l'état "arrêt" directement.



Q 54 : Compléter le chronogramme (figure 20) en indiquant par des créneaux les durées pendant lesquelles un état est activé et l'évolution du contenu de la variable N. La durée de l'alarme et de l'arrêt est supposée très faible et sera représentée par un dirac (une impulsion).



Exercice 10 : Modélisation fréquentielle d'un simulateur de conduite

6 Corrigé : Étude d'un simulateur de conduite

Q 1 : Proposer une forme de fonction de transfert pour la fonction $H_{tilt}(p)$ en fonction de ces diagrammes de Bode et identifier ses paramètres caractéristiques. Pour cela, on fera apparaître sur le diagramme de Bode du document réponse (figure 47) le tracé du diagramme asymptotique

On reconnaît bien un tracé d'une fonction de transfert du premier ordre :

- Pente de -20dB/decade pour $\omega \rightarrow +\infty$.
- Pente nulle pour $\omega \rightarrow 0$.
- Pulsation de coupure : $\omega_c = \frac{1}{\tau} = 10\text{ s}^{-1}$

On obtient alors :

$$H_{tilt}(p) = \frac{1}{1 + 0.1 p}$$

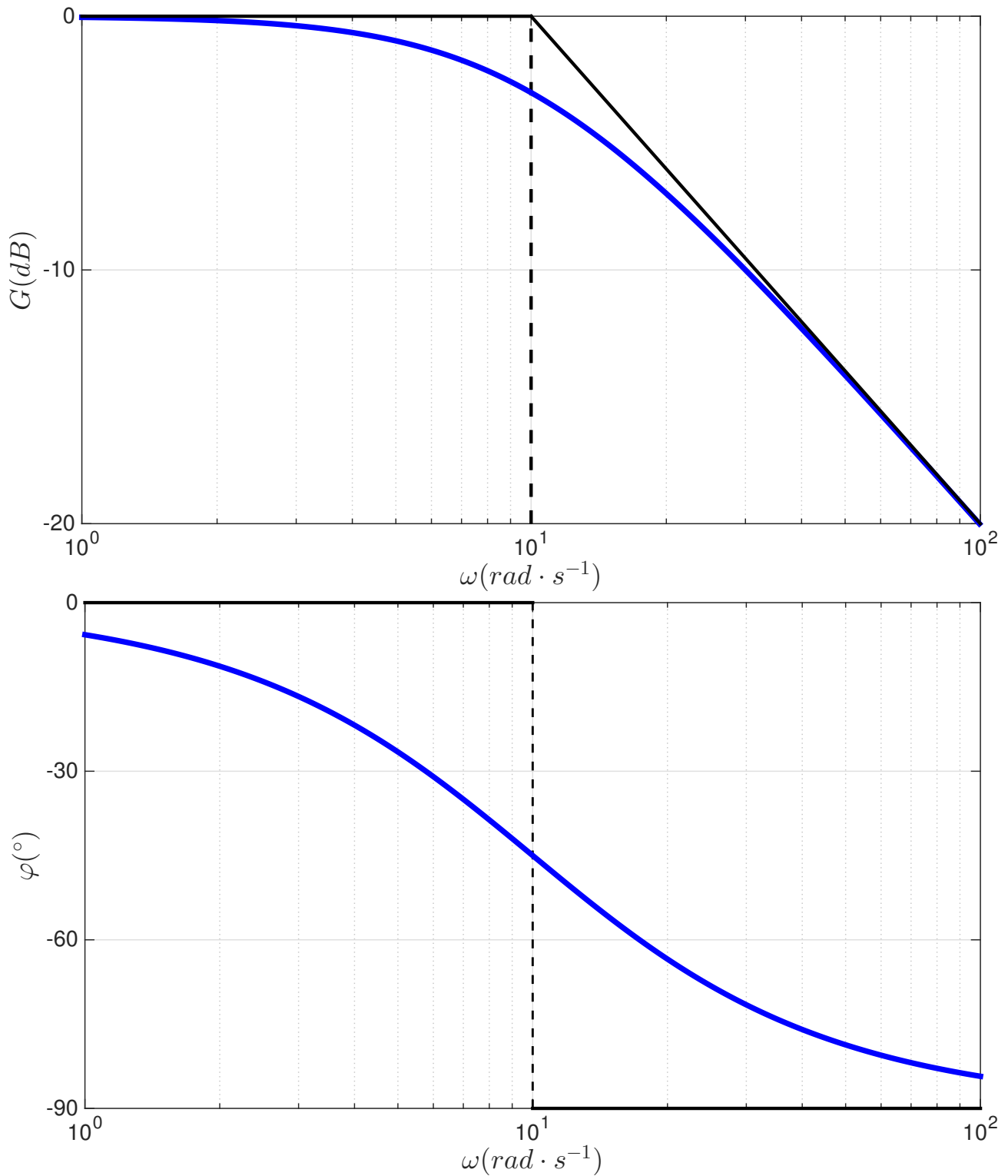


FIGURE 47

Q 2 : Tracer sur le document réponse (figure 48) les diagrammes de Bode asymptotiques et l'allure des diagrammes réels de ce filtre. Préciser le nom de ce filtre et son intérêt vis-à-vis de la composante à extraire.

- On pourra décomposer en un dérivateur pur et un premier ordre.
- On pourra chercher à trouver pour quelle valeur de ω , le dérivateur pur τp coupe l'axe des abscisses.

Q 3 : Par identification à l'aide du schéma bloc 24 et après avoir passé dans le domaine de Laplace l'expression précédente, en déduire la fonction de transfert $H_{mov2}(p)$

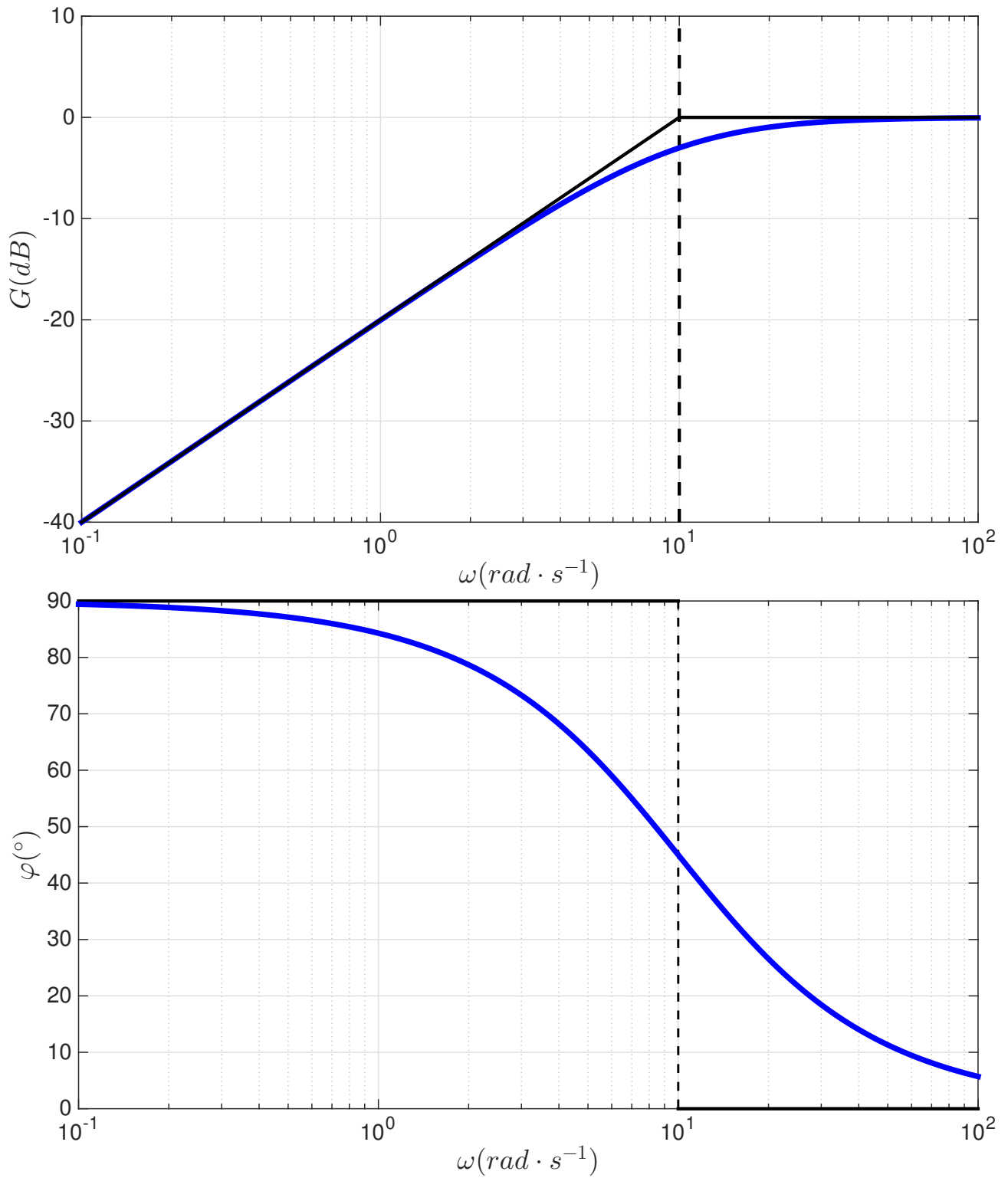


FIGURE 48

En passant l'expression précédente dans le domaine de Laplace, on obtient :

$$a_{mov}(p) = h \cdot p^2 \cdot \alpha_{mov}(p)$$

ainsi avec $H_{mov2}(p) = \frac{\alpha_{mov}(p)}{a_{mov}(p)}$, on obtient :

$$H_{mov2}(p) = \frac{1}{h \cdot p^2}$$

Q 4 : A partir de la fonction de transfert $H_{mov2}(p)$ et de la consigne en échelon imposée, justifier l'allure de courbe obtenue par simulation en régime établi et conclure sur la nécessité de choisir un filtre plus élaboré.

- On pourra calculer dans le domaine de Laplace $\alpha_{mov}(p)$.
- On pourra utiliser les théorèmes aux limites pour étudier le comportement asymptotique de $\alpha_{mov}(t)$ en $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$.
- On pourra utiliser les théorèmes aux limites pour étudier le comportement asymptotique de $\frac{d\alpha_{mov}(t)}{dt}$ en $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$.

$$\alpha_{mov}(p) = \frac{\tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{1}{h \cdot p^2} \cdot \frac{a_0}{p} = \frac{\tau \cdot a_0}{h \cdot p^2 \cdot (1 + \tau p)}$$

Ainsi :

•

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_{mov}(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \alpha_{mov}(p) = 0.$$

•

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_{mov}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \alpha_{mov}(p) = +\infty.$$

•

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\alpha_{mov}(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 \alpha_{mov}(p) = 0.$$

•

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d\alpha_{mov}(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \alpha_{mov}(p) = \frac{\tau \cdot a_0}{h}.$$

Cela correspond bien à l'allure de $\alpha_{mov}(t)$.

Q 5 : Montrer alors qu'en régime permanent, l'angle $\alpha_{mov}(t)$ obtenu pour une accélération a_{Tx} de type échelon (de valeur a_0) est nul.

$$\alpha_{mov}(p) = \frac{K \cdot p}{(1 + \tau \cdot p)^3} \cdot \frac{a_0}{p}.$$

Le théorème de la valeur finale donne :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_{mov}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \alpha_{mov}(p) = 0.$$

Q 6 : Représenter dans le domaine fréquentiel (document réponse figure 49) la fonction de transfert filtrée : $H_{mov1}(p) \times H_{mov2}(p) = \frac{K \cdot p}{(1 + \tau \cdot p)^3}$ avec $K = 0, 1$ et $\tau = 0, 1$ s en traçant le diagramme de Bode asymptotique.

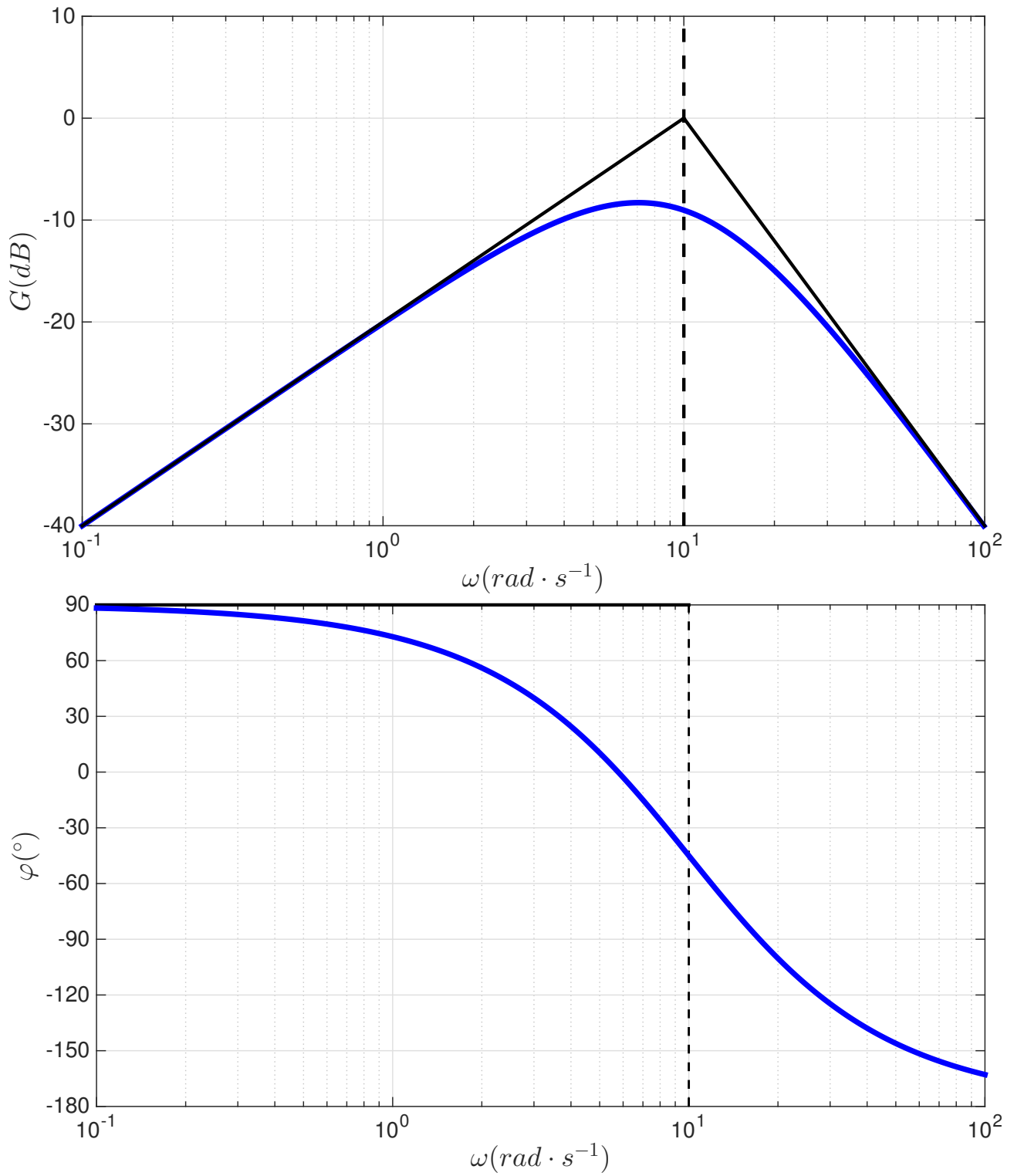


FIGURE 49

Q 7 : Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et identifier les coefficients associés.

On peut mettre sous forme canonique :

$$FTBO(p) = \frac{\frac{10^4}{3,5}}{1 + \frac{10}{3,5} p + \frac{0,14}{3,5} p^2}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} K = \frac{10^4}{3,5} = 2857 \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{3,5}{0,14}} = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \xi = \frac{10}{7} \sqrt{\frac{3,5}{0,14}} = 7,14 \end{cases}$$

Q 8 : Sur le diagramme de Bode de la figure 50, représenter le diagramme asymptotique décrivant les lieux de transfert de la FTBO.

ξ étant supérieur à 1, on peut calculer les deux pôles réels du second ordre :

$$\begin{cases} p_1 = -\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) = -71,1 = -\frac{1}{\tau_1} \\ p_2 = -\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) = -0,35 = -\frac{1}{\tau_2} \end{cases}$$

On trouve aussi :

$$\begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{p_1} = 0,0141 \text{ s}^{-1} \\ \tau_2 = -\frac{1}{p_2} = 2,8431 \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

On peut alors tracer :

$$FTBO(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p) \cdot (1 + \tau_2 p)}$$

On trouve alors 3 branches asymptotiques :

- Une branche horizontale pour $\omega < \frac{1}{\tau_2}$ passant par $20 \cdot \log(K) = 69,1 \text{ dB}$,
- Une branche asymptotique de -20 dB/decade pour $\frac{1}{\tau_2} < \omega < \frac{1}{\tau_1}$,
- Une branche asymptotique de -40 dB/decade pour $\omega > \frac{1}{\tau_1}$.

Exercice 11 :

Pour définir la matrice de cet élément (c_1) au point C , il faut appliquer le théorème de Huygens. Dans la base

$(B_2) = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, on a $\vec{CK} = -\frac{H_b + H_c}{2} \vec{x}_2 + e \vec{y}_2$, les termes des matrices d'inertie en C et K sont liés par :

$$\begin{cases} A_{C1} = A_{K1} + m_c e^2 \\ B_{C1} = B_{K1} + m_c \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right)^2 \\ C_{C1} = C_{K1} + m_c \left[e^2 + \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right)^2 \right] \\ D_{C1} = D_{K1} \\ E_{C1} = E_{K1} \\ F_{C1} = F_{K1} + m_c e \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right) \end{cases}$$

$$\bar{I}(C, (c_1)) = \begin{pmatrix} m_c \left(\frac{R_c^2}{4} + \frac{H_c^2}{12} + e^2 \right) & -m_c e \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right) & 0 \\ -m_c e \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right) & m_c \left(\frac{R_c^2}{4} + \frac{H_c^2}{12} + \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right)^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_c \left[\frac{R_c^2}{2} + e^2 + \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right)^2 \right] \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

En procédant de la même façon pour le disque (c_2) situé à droite :

$$\bar{I}(C, (c_2)) = \begin{pmatrix} m_c \left(\frac{R_c^2}{4} + \frac{H_c^2}{12} + e^2 \right) & m_c e \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right) & 0 \\ m_c e \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right) & m_c \left(\frac{R_c^2}{4} + \frac{H_c^2}{12} + \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right)^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_c \left[\frac{R_c^2}{2} + e^2 + \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right)^2 \right] \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

Soit pour l'ensemble des deux disques (c) :

$$\bar{I}(C, (c)) = \bar{I}(C, (c_1)) + \bar{I}(C, (c_2)) = 2m_c \begin{pmatrix} \frac{R_c^2}{4} + \frac{H_c^2}{12} + e^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_c^2}{4} + \frac{H_c^2}{12} + \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_c^2}{2} + e^2 + \left(\frac{H_b + H_c}{2} \right)^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

Il reste à faire la somme des trois matrices :

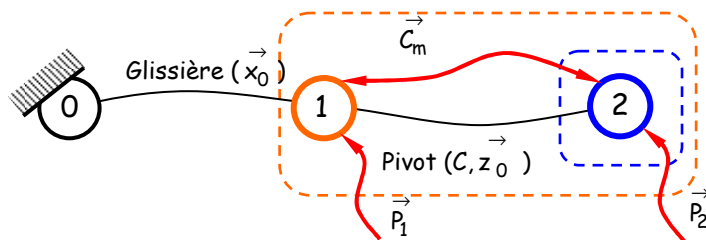
$$\bar{I}(C, 2) = \bar{I}(C, (a)) + \bar{I}(C, (b)) + \bar{I}(C, (c))$$

-3- Procéder à l'étude dynamique du système.
En déduire les équations du mouvement de (1) et de (2).

Graphe de structure

S'agissant d'une chaîne ouverte, il convient d'écrire :

- le théorème du moment dynamique appliqué au rotor (2), en C , en projection sur \vec{z}_0 ;
- le théorème de la résultante dynamique appliqué à l'ensemble (1, 2), en projection sur \vec{x}_0 .



a/ Théorème du moment dynamique appliqué au rotor (2)

Ce moment est d'abord exprimé au point G_2 , centre d'inertie du rotor, où son expression est simple :

$$\vec{\delta}(G_2, 2 / 0) = C_2 \ddot{\alpha} \vec{z}_0$$

Pour exprimer le moment dynamique en C, il faut connaître la résultante dynamique de (2)/(0) :

$$\vec{V}(G_2, 2 / 0) = a_2 \dot{\alpha} \vec{y}_2$$

$$\vec{\Gamma}(G_2, 2 / 0) = a_2 \ddot{\alpha} \vec{y}_2 - a_2 \dot{\alpha}^2 \vec{x}_2$$

$$\vec{\delta}(C, 2 / 0) = \vec{\delta}(G_2, 2 / 0) + m_2 \vec{\Gamma}(G_2, 2 / 0) \wedge \vec{G_2 C} = C_2 \ddot{\alpha} \vec{z}_0 + m_2 a_2 (\ddot{\alpha} \vec{y}_2 - \dot{\alpha}^2 \vec{x}_2) \wedge (-a_2 \vec{x}_2)$$

$$\text{Soit } \boxed{\vec{\delta}(C, 2 / 0) = (C_2 + m_2 a_2^2) \ddot{\alpha} \vec{z}_0}$$

Actions appliquées à (2) :

- liaison pivot, de projection nulle sur \vec{z}_0 ;
- couple moteur $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$;
- pesanteur : $-m_2 g a_2 \sin \alpha \vec{z}_0$;

Première équation du mouvement :

$$\boxed{(C_2 + m_2 a_2^2) \ddot{\alpha} = C_m - m_2 g a_2 \sin \alpha}$$

a/ Théorème de la Résultante dynamique appliquée à l'ensemble (1, 2)

$$\vec{A}((1,2) / 0) = \vec{A}(1 / 0) + \vec{A}(2 / 0) = m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1 / 0) + m_2 \vec{\Gamma}(G_2, 2 / 0)$$

$$\vec{\Gamma}(G_2, 2 / 0) = a_2 (\ddot{\alpha} \vec{y}_2 - \dot{\alpha}^2 \vec{x}_2)$$

$$\vec{\Gamma}(G_1, 1 / 0) = \ddot{x} \vec{x}_0$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{\vec{A}((1,2) / 0) = m_1 \ddot{x} \vec{x}_0 + m_2 a_2 (\ddot{\alpha} \vec{y}_2 - \dot{\alpha}^2 \vec{x}_2)}$$

Aucune action extérieure à l'ensemble (1, 2) ne possède de composante en projection sur \vec{x}_0 .

Deuxième équation du mouvement :

$$\boxed{m_1 \ddot{x} - m_2 a_2 (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) = 0}$$

-4- On suppose que le rotor (2) tourne à vitesse constante $\vec{\Omega}_{2/1} = \omega \vec{z}_0$ par rapport à (1).

Intégrer dans cette hypothèse les équations du mouvement. En déduire en particulier :

- l'expression de $x(t)$ si les conditions initiales sont les suivantes : $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\alpha(0) = 0$ et $\omega(0) = \omega = c^{te}$.
- l'expression du couple moteur C_m permettant de générer le mouvement uniforme du rotor.

Si le rotor (2) tourne à vitesse constante ω , on peut écrire : $\alpha = \omega t$, $\dot{\alpha} = \omega$ et $\ddot{\alpha} = 0$.

La seconde équation du mouvement s'écrit :

$$m_1 \ddot{x} - m_2 a_2 \omega^2 \cos(\omega t) = 0$$

L'intégration est immédiate : $m_1 x(t) = -m_2 a_2 \cos(\omega t) + C_1 t + C_2$

Compte tenu des conditions initiales, on a : $C_1 = C_2 = 0$.

D'où la loi de déplacement du chariot :
$$\boxed{x(t) = -\frac{m_2}{m_1} a_2 \cos(\omega t)}$$

Le couple moteur est directement déduit de la première équation :
$$\boxed{C_m = m_2 g a_2 \sin(\omega t)}$$

Remarques :

- on peut noter que la valeur moyenne du couple moteur sur un nombre entier de tours est nulle...
En réalité, l'énergie développée par le moteur ne sert qu'à compenser la dissipation d'énergie dans les guidages du rotor et des roues ;
- l'hypothèse de vitesse de rotation uniforme est acceptable si l'inertie C_2 du rotor (2) est importante, ce qui tend à régulariser le mouvement de rotation...

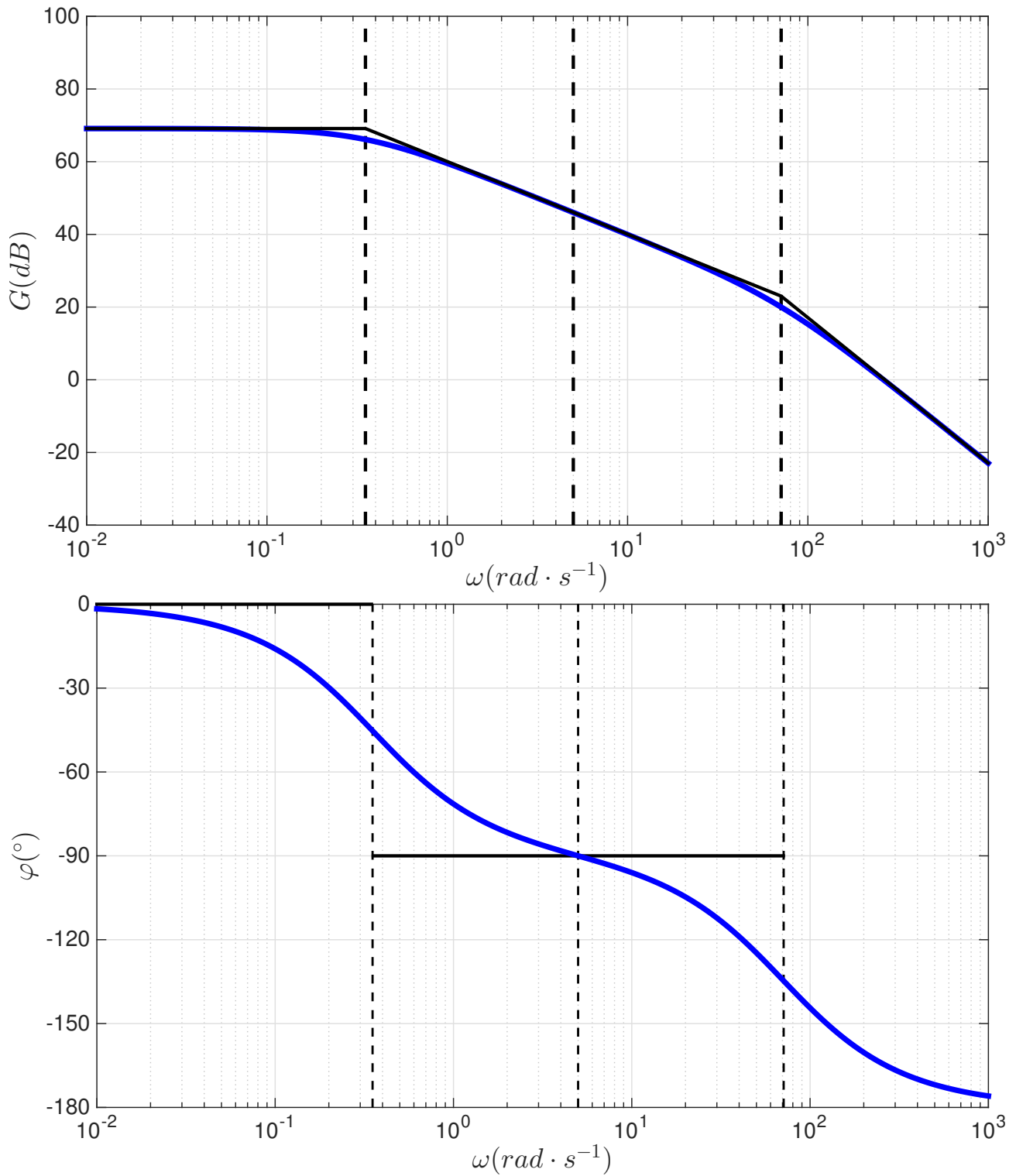
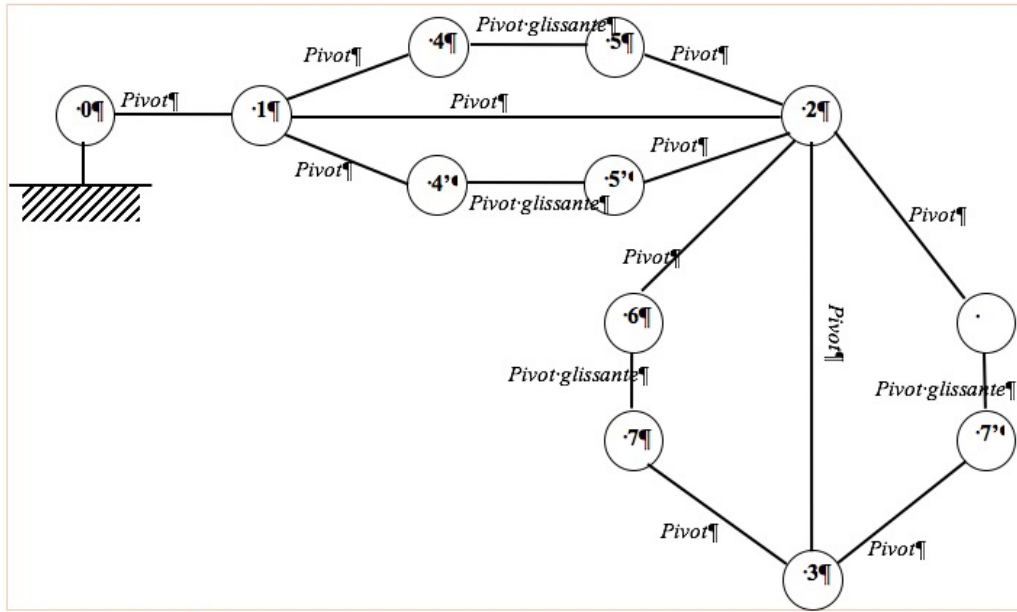


FIGURE 50

Exercice 12 : Echelle pivotante automatique

Q 9 : Tracer le graphe des liaisons.



Q 10 : Déterminer le degré d'hyperstaticité du mécanisme.

$$h = m_u + m_i + 6\gamma - N_c$$

Le mécanisme comporte :

- 4 boucles indépendantes : $\gamma = 4$
- 19 inconnues cinématiques : 11 pivots + 4 pivots glissantes : $N_c = 11 + 4 \times 2$
- Pas de mobilités internes et 3 mobilités utiles : $m_i = 0$ les mobilités des liaisons pivots (0-1), (1-2) et (2-3), $m_u = 3$

D'où un degré d'hyperstatisme : $h = 3 + 0 + 6 \times 4 - 19$, soit

$$h = 8$$

Q 11 : Proposez des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.

Isostatisme :

On change les pivots situés aux extrémités des vérins (pivots glissantes) par des sphériques, soient les liaisons (1-4), (1-4'), (2-5), (2-5'), (2-6), (2-6'), (3-7) et (3-7').

Le mécanisme comporte désormais :

- Toujours 4 boucles indépendantes : $\gamma = 4$
- 35 inconnues cinématiques : 3 pivots + 4 pivots glissantes et 8 sphériques : $N_c = 3 + 4 \times 2 + 8 \times 3 = 35$
- Toujours 3 mobilités utiles : les mobilités des liaisons pivots (0-1), (1-2) et (2-3), $m_u = 3$, mais des mobilités internes : rotation du corps et de la tige autour de leur axe (2 mobilités internes) pour chacun des 4 vérins : $m_i = 4 \times 2 = 8$

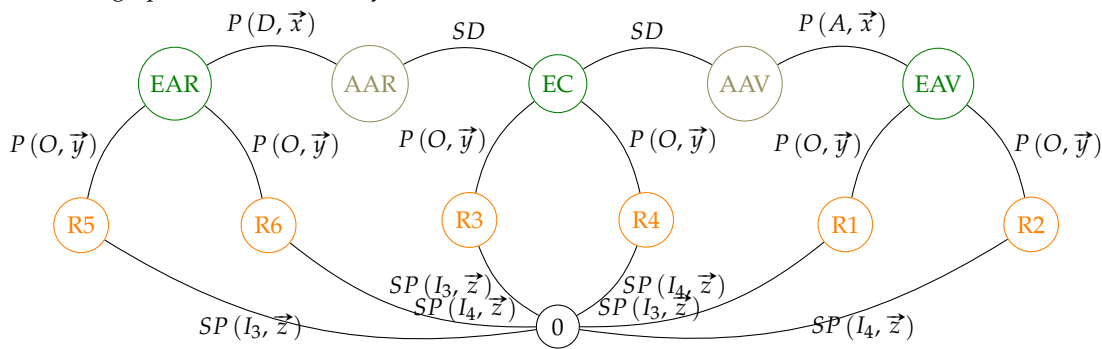
D'où un degré d'hyperstatisme : $h = 3 + 8 + 6 \times 4 - 35$, soit $h = 0$, le mécanisme est bien isostatique.

On peut aussi remplacer ces mêmes liaisons par des sphériques à doigts (la rotation éliminée sera celle de la mobilité interne de la solution à sphérique), ainsi il n'y aura pas de mobilité interne.

Exercice 13 : ROBOVOLC

7 Robovolc

Q1. Tracer le graphe de structure du système



Q2. Déterminer le nombre d'inconnues cinématiques, le nombre cyclomatique, puis le nombre d'équations à écrire. Conclure

$$\gamma = L - N + 1$$

$$\gamma = 16 - 11 + 1 = 5$$

soit

$$E_c = 6 \times 5 = 30$$

$$I_c = 6 \times SP + 6 \times P + 2 \times SD + 2 \times P$$

$$I_c = 6 \times 5 + 6 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 1$$

$$I_c = 42$$

Si le système est isostatique, alors le mécanisme possède $m = 12$ mobilités.

Q3. Déterminer le nombre d'inconnues de liaison, Préciser le nombre d'équations d'équilibre que l'on peut écrire.

$$I_s = 6 \times SP + 6 \times P + 2 \times SD + 2 \times P$$

$$I_s = 6 + 30 + 8 + 10$$

$$I_s = 54 \text{ inconnues}$$

Il est comporte 12 solides soit

$$E_s = (12 - 1) \times 6 = 66 \text{ équations}$$

Le rang du système ne peut dépasser $r_s \leq \min(E_s, I - s) = 54$. Il y a donc 12 équations supplémentaires.

Ce résultat est cohérent avec le précédent mais ne suffit pas pour dire que le degré de mobilité est de 12 et que le système est isostatique. Il est nécessaire de vérifier que toutes les inconnues de liaison sont calculables.

On isole la roue R_i . On note C_i le centre de la liaison pivot et I_i le point de contact avec le sol (avec $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

On note

- $\vec{P}_{AV} = -P_{AV} \cdot \vec{z}$ le poids de la partie avant que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre AAV
- $\vec{P}_{AR} = -P_{AR} \cdot \vec{z}$ le poids de la partie arrière que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre AAR
- $\vec{P}_C = -P_C \cdot \vec{z}$ le poids de la partie centrale que l'on suppose appliqué au milieu de l'arbre EC en O.

Les couples moteurs sont nuls.

Q4. Écrire le système d'équation relatif à l'équilibre de la roue R_i . Conclure

Compte tenu des hypothèses, la roue est soumise à deux actions de liaisons, l'équilibre s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow R_i}\} + \{\mathcal{A}_{Ex \rightarrow R_i}\} = \{0\}$$

Avec $Ex \in \{EAV, EC, EAR\}$.

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{0i} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (I_i, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}} + \begin{Bmatrix} X_{xi} & L_{xi} \\ Y_{xi} & 0 \\ Z_{xi} & N_{xi} \end{Bmatrix}_{\substack{C_i \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}} = \{0\}$$

d'où les 6 équations de l'équilibre

$$\begin{cases} X_{xi} = 0 \\ Y_{xi} = 0 \\ Z_{0i} + Z_{xi} = 0 \\ L_{xi} = 0 \\ 0 = 0 \\ N_{xi} = 0 \end{cases}$$

Cet équilibre permet de déterminer 4 inconnues de liaisons, il ne reste par équilibre qu'une seule inconnue à préciser (Z_{xi}).

On constate aussi une équation supplémentaire, ($0 = 0$), cet équation caractérise une mobilité, ici, la rotation de la roue par rapport à l'arbre.

L'équilibre des six roues étant identiques. un premier bilan permet de dire que

- $6 \times 4 = 24$ inconnues sont déterminables
- il reste $6 \times 1 = 6$ inconnues à déterminer
- il y a 6 mobilités

On isole maintenant l'essieu avant (respectivement l'essieu arrière)

Q5. Écrire les équations de l'équilibre.

L'arbre avant est soumis à 3 actions de liaison.

$$\{\mathcal{A}_{AV \rightarrow EV}\} + \{\mathcal{A}_{R_1 \rightarrow EV}\} + \{\mathcal{A}_{R_2 \rightarrow EV}\} = \{0\}$$

Les deux torseurs $\{\mathcal{A}_{R_1 \rightarrow EV}\}$ et $\{\mathcal{A}_{R_2 \rightarrow EV}\}$ ont été déterminés au dessus

$$\{\mathcal{A}_{R_1 \rightarrow EV}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1EV} & 0 \end{Bmatrix}_{C_1} \text{ et } \{\mathcal{A}_{R_2 \rightarrow EV}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{2EV} & 0 \end{Bmatrix}_{C_2}$$

$$\begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{2EV} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^{C_2}$$

On choisit d'écrire l'équilibre en A.

$$\begin{cases} X_{AEV} & 0 \\ Y_{AEV} & M_{AEV} \\ Z_{AEV} & N_{AEV} \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^A + \begin{cases} 0 & e \cdot Z_{1EV} \\ 0 & 0 \\ Z_{1EV} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^A + \begin{cases} 0 & -e \cdot Z_{2EV} \\ 0 & 0 \\ Z_{2EV} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^A = \{0\}$$

On déduit de cet équilibre :

$$\begin{cases} X_{AEV} = 0 \\ Y_{AEV} = 0 \\ Z_{AEV} + Z_{1EV} + Z_{2EV} = 0 \\ e \cdot Z_{1EV} - e \cdot Z_{2EV} = 0 \\ M_{AEV} = 0 \\ N_{AEV} = 0 \end{cases}$$

On déduit $Z_{1EV} = Z_{2EV} = -\frac{1}{2}Z_{AEV}$ et les 4 autres composantes sont nulles. Cet équilibre n'a pas d'équation supplémentaire, il n'y a donc pas de mobilité.

À partir de l'équilibre des deux essieux avant et arrière et des 6 roues, on détermine donc

- $24 + 2 \times 4 = 32$ inconnues de liaison,
- il subsiste 2 inconnues à déterminer Z_{AEV} et Z_{AER} les deux composantes sur \vec{z} dans les deux liaison pivot.
- et toujours $m = 6$

On isole maintenant l'arbre avant AAV (respectivement l'arbre arrière AAR).

Q6. Écrire les équations de l'équilibre.

Il est soumis à deux actions de liaison et à l'action de la gravité.

$$\{\mathcal{A}_{EC \rightarrow AAV}\} + \{\mathcal{A}_{AV \rightarrow AAV}\} + \{\mathcal{P}_{g \rightarrow AAV}\} = \{0\}$$

On choisit d'écrire l'équilibre en B.

$$\begin{cases} X_{CV} & 0 \\ Y_{CV} & 0 \\ Z_{CV} & N_{CV} \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^B + \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & (a-b) \cdot Z_{AEV} \\ Z_{AER} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^B + \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a-b}{2} \cdot P_{AV} \\ -P_{AV} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^B = \{0\}$$

On déduit de cet équilibre :

$$\begin{cases} X_{CV} = 0 \\ Y_{CV} = 0 \\ Z_{CV} + Z_{AEV} - P_{AV} = 0 \\ 0 = 0 \\ (a-b) \cdot Z_{AEV} - \frac{a-b}{2} \cdot P_{AV} = 0 \\ N_{CV} = 0 \end{cases}$$

On note pour cet équilibre que toute les actions sont déterminables avec $Z_{CV} = Z_{AEV} = \frac{1}{2}P_{AV}$ et les autres composantes nulles

On note aussi que la présence d'une équation supplémentaire, elle caractérise la rotation de l'arbre AAV autour de l'axe (B, \vec{x}) .

Q7. Terminons, en écrivant le dernier équilibre sur EC.

Le dernier solides est soumis a cinq glisseurs parallèles :

$$\{\mathcal{A}_{AAV \rightarrow EC}\} = \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}P_{AV} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^B, \quad \{\mathcal{A}_{AAR \rightarrow EC}\} = \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}P_{AR} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^C,$$

$$\{\mathcal{A}_{R_3 \rightarrow EC}\} = \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{3c} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^{C_3},$$

$$\{\mathcal{A}_{R_4 \rightarrow EC}\} = \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{4c} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^{C_4},$$

$$\{\mathcal{P}_{g \rightarrow EC}\} = \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_C & 0 \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}^O.$$

L'équilibre en O donne :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{1}{2}P_{AV} - \frac{1}{2}P_{AR} + Z_{3c} + Z_{4c} - P_C = 0 \\ e \cdot Z_{3c} - e \cdot Z_{4c} = 0 \\ b \cdot \frac{1}{2}P_{AV} - b \cdot \frac{1}{2}P_{AR} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières inconnues de liaison sont déterminées $Z_{3c} = Z_{4c} = \frac{1}{2} \left(+\frac{1}{2}P_{AV} + \frac{1}{2}P_{AR} + P_C \right)$

ON trouve aussi 3 équations nulles et une équations entre des actions extérieures, ce qui nous donne 4 nouvelles mobilités

- les translations de l'ensemble suivant \vec{x} et \vec{z} ,
- une rotation de l'ensemble autour de (O, \vec{z}) ,
- la rotation de EC autour de (O, \vec{y}) .

On a bien identifié les douze mobilités et vérifié que le système est isostatique

Exercice 14 :

8 Exercice : modélisation dynamique et énergétique d'un cycliste

a) Présentation

La vitesse d'un cycliste dépend de la puissance fournie par celui-ci, mais aussi du vent et de la pente de la route qui s'opposent ou contribuent à faire avancer le cycliste, ainsi que de la résistance au roulement des pneumatiques. La puissance d'un cycliste moyen est de $250W$. L'objectif de ce problème est d'exprimer cette vitesse en fonction des paramètres cités : pour cela nous allons modéliser l'ensemble {vélo + cycliste + sol}, écrire les équations de comportement et les résoudre.

b) Modélisation du {vélo + cycliste + sol}

Le modèle cinématique est constitué de :

- Le sol auquel est associé un repère Galiléen 0.
- Le {cadre + cycliste} 1 de masse M et de centre d'inertie G .
Le cadre est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport à 0 de direction \vec{x}_0 .
- La roue avant 2 de rayon R , de centre d'inertie O_2 , de masse m , et de moment d'inertie par rapport à l'axe (O_2, \vec{z}_0) égal à I .
 - Cet ensemble est en liaison pivot **parfaite** d'axe (O_2, \vec{z}_0) par rapport à 1.
 - Il est aussi en liaison roulement sans glissement en A_2 avec 0. Liaison non parfaite car présentant une résistance au roulement.
- La roue arrière 3 de rayon R , de centre d'inertie O_3 , de masse m , et de moment d'inertie par rapport à l'axe (O_3, \vec{z}_0) égal à I .
 - Elle est en liaison pivot parfait d'axe (O_3, \vec{z}_0) par rapport à 1.
 - Il est aussi en liaison roulement sans glissement en A_3 avec 0. Liaison non parfaite car présentant une résistance au roulement.
 - les deux roues sont donc supposées de masses et moments d'inerties identiques.

Actions mécaniques

- Le {cadre + cycliste} et les roues subissent l'action de la pesanteur : $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_g$.
- Le {cadre + cycliste} subit un effort de traînée aérodynamique (lié au vent) modélisé par un glisseur en G et fonction de la vitesse relative du cycliste / air :

$$\{\mathcal{F}_{(air \rightarrow 1)}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \rho S C_x (v(t) - v_{vent})^2 \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}.$$

Avec

- ρ : masse volumique de l'air,
 - S : surface maître couple,
 - C_x : coefficient de traînée du profil,
 - v_{vent} : vitesse du vent (positive si opposée au cycliste).
 - Le cycliste développe une puissance notée $P_{cyc}(t) = \mathcal{P}(1 \leftrightarrow 4)$.
 - Les actions mécaniques du sol sur les roues sont modélisées :
 - pour la résultante selon le modèle de Coulomb,
 - pour le couple, en intégrant une de résistance au roulement proportionnel à la résultante.
- On a donc avec $i = \{2, 3\}$:

$$\{\mathcal{F}_{(0 \rightarrow i)}\}_{A_i} = \left\{ \begin{array}{c} T_i \vec{x}_0 + N_i \vec{y}_0 \\ N_i r \vec{z}_0 \end{array} \right\}.$$

Avec

- T_i lié à N_i par le modèle de Coulombs (configuration d'adhérence),
- r : facteur de résistance au roulement.
- Les autres actions mécaniques dans les liaisons sont celles de liaisons parfaites.

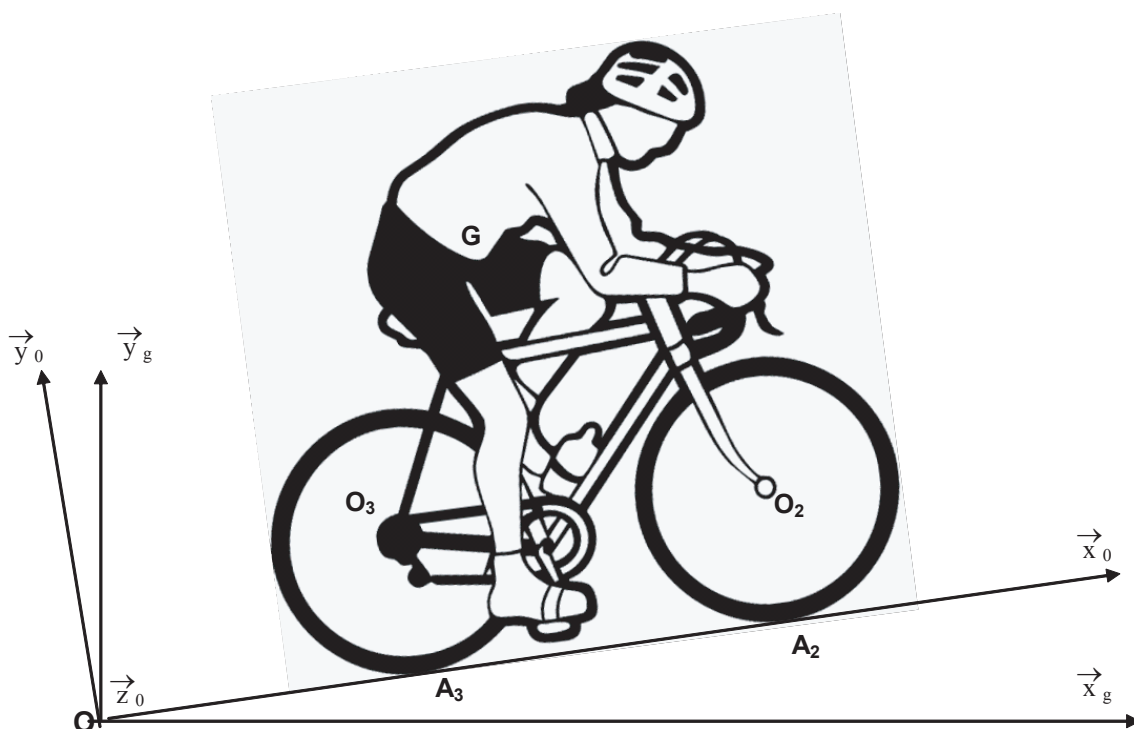


FIGURE 51

c) Paramétrage

- L'angle α est l'angle de la pente tel que $\alpha = (\vec{x}_g, \vec{x}_0) = (\vec{y}_g, \vec{y}_0)$,
- $\vec{OG} = x(t) \vec{x}_0 + h \vec{y}_0$ et on note $v(t) = \dot{x}(t)$,
- Comme les roues ont même diamètre, et que **le roulement se fait sans glissement**, il n'est pas nécessaire de démontrer que les roues tournent à la même vitesse :

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{3/1} = -\omega(t) \vec{z}_0.$$

d) Questions

Q 12 : Par une relation de fermeture cinématique passant par la boucle (2, 1, 0) déterminer $v(t)$ en fonction de $\omega(t)$ et de R .

On isole $\Sigma = \{1, 2, 3\}$.

Q 13 : Écrire l'équation scalaire (simple) du PFD qui donne $(N_2 + N_3)$ en fonction des masses et de la pente.

Q 14 : Exprimer $E_c(\Sigma/R_0)$ en fonction de $v(t)$. On peut ainsi faire apparaître la masse équivalente M_{eq} du système.

Q 15 : Exprimer l'énergie potentielle de la pesanteur sur Σ par rapport au Galiléen.

Q 16 : Déterminer les puissances suivantes :

1. Puissance de la pesanteur sur Σ par rapport au Galiléen, Puissance dissipée dans la résistance au roulement de la roue 2, Puissance dissipée dans la résistance au roulement de la roue 3, Puissance de traînée aérodynamique.

Q 17 : Conclure en précisant la puissance des actions mécanique extérieures à Σ en fonction de $v(t)$ ainsi que les puissances intérieures. Justifier.

Q 18 : Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ afin de déterminer $P_{cyc}(t)$ en fonction de $v(t)$ et des

paramètres constants, $g, M, m, I, R, r, S, C_x, v_{vent}, \rho$ et α .

Exercice 15 :

I. Étude du déploiement d'une échelle de pompier : corrigé

Q 19 : Déterminez l'énergie cinétique galiléenne de la plate-forme et des quatre plans du parc échelle en fonction de $V(t)$ et des différentes masses.

Tous les solides sont en translation puisque l'angle de dressage est ici considéré constant, donc leurs énergie cinétiques sont de la forme $E_c = \frac{1}{2} m V^2$.

- Plate-forme : $E_c(Pf/R_0) = \frac{1}{2} M V^2$.
- Plan 1 : $E_c(P_1/R_0) = \frac{1}{2} m V^2$.
- Plan 2 : $E_c(P_2/R_0) = \frac{1}{2} m \frac{V^2}{4}$.
- Plan 3 : $E_c(P_3/R_0) = \frac{1}{2} m \frac{V^2}{16}$.
- Plan 4 : $E_c(P_4/R_0) = 0$.

D'où l'énergie totale de l'ensemble (plate-forme+plan) :

$$E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \left[M + m \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) \right] V^2.$$

soit :

$$E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \left[M + m \left(\frac{21}{16} \right) \right] V^2.$$

Q 20 : Déterminez l'énergie cinétique galiléenne du treuil en fonction de $V(t)$.

Le treuil est un solide en rotation autour d'un axe fixe :

$$E_c(T/R_0) = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Or

$$\vec{V}(P_3/R_0) = \vec{V}(P_3/P_4) = \frac{V}{4} \vec{x}_1 = R \omega \vec{x}_1,$$

donc :

$$E_c(T/R_0) = \frac{1}{2} I \frac{V^2}{16 R^2}.$$

Q 21 : Déterminez la puissance des actions extérieures à l'ensemble $\Sigma = \{\text{treuil} + \text{parc échelle} + \text{plate-forme}\}$ en fonction de $V(t)$.

Les actions extérieures sont uniquement le poids subit par chacun des composants de Σ ainsi le couple C fourni au treuil.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(ext \rightarrow \Sigma/R_0) &= \mathcal{P}(pes \rightarrow Pf/R_0) + \mathcal{P}(pes \rightarrow P1/R_0) + \mathcal{P}(pes \rightarrow P2/R_0) \\ &+ \mathcal{P}(pes \rightarrow P3/R_0) + \mathcal{P}(pes \rightarrow P4/R_0) + \mathcal{P}(moteur \rightarrow treuil/R_0) \end{aligned}$$

On calcule alors chaque puissance due aux actions de la pesanteur comme le comoment du torseur des actions mécaniques extérieures avec le torseur cinématique. Par exemple :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(pes \rightarrow Pf/R_0) &= \left\{ \begin{array}{c} -M \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V(t) \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{R_0} = -M g V(t) \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1 \\ &= -M g V(t) \sin \theta. \end{aligned}$$

On en déduit alors les autres puissances :

- $\mathcal{P}(pes \rightarrow P1/R_0) = -m g V(t) \sin \theta$.
- $\mathcal{P}(pes \rightarrow P2/R_0) = -m g \frac{V(t)}{2} \sin \theta$.
- $\mathcal{P}(pes \rightarrow P3/R_0) = -m g \frac{V(t)}{4} \sin \theta$.
- $\mathcal{P}(pes \rightarrow P4/R_0) = 0$.
- $\mathcal{P}(moteur \rightarrow treuil/R_0) = C \omega = \frac{C V}{4 R}$.

On en déduit alors la puissance totale extérieure s'appliquant sur Σ :

$$\mathcal{P}(ext \rightarrow \Sigma/R_0) = \frac{C V}{4 R} - g V \sin \theta \left[M + m \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \right].$$

Alors,

$$\boxed{\mathcal{P}(ext \rightarrow \Sigma/R_0) = V \left[\frac{C}{4 R} - g \left(M + m \frac{7}{4} \right) \sin \theta \right].}$$

Q 22 : Déterminez la puissance des actions intérieures de ce même ensemble en fonction de $V(t)$.

Les liaisons entre les différents plans sont ici non parfaites puisqu'il y a existence d'un effort de frottement s'opposant au mouvement (F). Ainsi :

$$\mathcal{P}_{int} = \mathcal{P}(P_2 \leftrightarrow P_1) + \mathcal{P}(P_3 \leftrightarrow P_2) + \mathcal{P}(P_4 \leftrightarrow P_3)$$

En particulier,

$$\mathcal{P}(P_2 \leftrightarrow P_1) = \{ \mathcal{T}_{(P_2 \rightarrow P_1)} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{(P_1/P_2)} \} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{x}_1 \\ ? \end{array} \right\}_P \otimes_{\vee P} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ (V - \frac{V}{2}) \vec{x}_1 \end{array} \right\} = -F \frac{V}{2}.$$

De la même façon,

$$\mathcal{P}(P_3 \leftrightarrow P_2) = \{ \mathcal{T}_{(P_3 \rightarrow P_2)} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{(P_2/P_3)} \} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{x}_1 \\ ? \end{array} \right\}_P \otimes_{\vee P} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ (\frac{V}{2} - \frac{V}{4}) \vec{x}_1 \end{array} \right\} = -F \frac{V}{4}.$$

$$\mathcal{P}(P_4 \leftrightarrow P_3) = \{ \mathcal{T}_{(P_4 \rightarrow P_3)} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{(P_3/P_4)} \} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{x}_1 \\ ? \end{array} \right\}_P \otimes_{\vee P} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \frac{V}{4} \vec{x}_1 \end{array} \right\} = -F \frac{V}{4}.$$

D'où l'expression des puissances intérieures :

$$\mathcal{P}_{int} = -F V \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right],$$

soit,

$$\boxed{\mathcal{P}_{int} = -F V.}$$

Q 23 : En déduire le moment du couple moteur nécessaire pendant la première phase de mouvement.

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble $\Sigma = \{treuil + parc échelle + plate-forme\}$ en fonction de $V(t)$:

$$\frac{dE_c(\Sigma/R_0)}{dt} = \mathcal{P}(ext \rightarrow \Sigma/R_0) + \mathcal{P}_{int}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{dE_c(\Sigma/R_0)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left[M + m \left(\frac{21}{16} \right) \right] V^2 + \frac{1}{2} I \frac{V^2}{16 R^2} \right] \\ &= \left[M + m \frac{21}{16} + \frac{I}{16 R^2} \right] V \dot{V}. \end{aligned}$$

Ainsi en simplifiant l'expression du théorème de l'énergie cinétique par V , on obtient,

$$\left[M + m \frac{21}{16} + \frac{I}{16 R^2} \right] \dot{V} = -F + \left[\frac{C}{4 R} - g \left(M + m \frac{7}{4} \right) \sin \theta \right].$$

On en déduit alors le couple moteur, avec $\dot{V} = \Gamma_0$.

$$\boxed{C = 4 R \left[\left(M + m \frac{21}{16} + \frac{I}{16 R^2} \right) \Gamma_0 + F + g \left(M + m \frac{7}{4} \right) \sin \theta \right].}$$

Exercice 16 :

Q 24 : Parmi celles développées par les solides de E, exprimer uniquement les suivantes :

1. Énergie cinétique galiléenne du solide 1 dans son mouvement par rapport à N, en fonction de $\dot{\theta}_1$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
2. Énergie cinétique galiléenne du solide 2 dans son mouvement par rapport à N, en fonction de $\dot{\theta}_2$, \dot{x}_{24} , x_{24} et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
3. Énergie cinétique galiléenne du solide 4 dans son mouvement par rapport à N, en fonction de $\dot{\theta}_2$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

1.

$$2.T(1/N) = M_1 \cdot \vec{V}(G_1, 1/N) \cdot \vec{V}(G_1, 1/N) + \vec{\sigma}(G_1, 1/N) \cdot \vec{\Omega}(1/N)$$

$$\vec{\sigma}(G_1, 1/N) = [I(G_1, 1)] \vec{\Omega}(1/N)$$

soit,

$$T(1/N) = \frac{1}{2} (M_1 \cdot L_1^2 + C_1) \dot{\theta}_1^2$$

2.

$$2.T(2/N) = M_2 \cdot \vec{V}(G_2, 2/N) \cdot \vec{V}(G_2, 2/N) + \vec{\sigma}(G_2, 2/N) \cdot \vec{\Omega}(2/N) \\ = M_2 \cdot \dot{x}_{24}^2 + M_2 \cdot (L_2 - x_{24})^2 \dot{\theta}_2^2 + B_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$T(2/N) = \frac{1}{2} (M_2 \dot{x}_{24}^2 + (M_2 \cdot (L_2 - x_{24})^2 + B_2) \dot{\theta}_2^2)$$

3.

$$T(4/N) = \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2$$

(rotation autour d'un axe fixe)

Q 25 : Recenser (notation $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$), puis exprimer les puissances non nulles développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

$$P(1 \leftrightarrow 2) = P(1 \rightarrow 2/1)$$

$$P(1 \leftrightarrow 3) = P(1 \rightarrow 3/1)$$

Q 26 : Recenser (notation $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$), puis exprimer les puissances galiléennes non nulles développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné. Les notations utilisées sont celles des tableaux ci-dessus.

Q 27 : Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste.

Q 28 : Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure 39 sur la figure 40, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0s$, $t = 1s$, $t = 3s$ et $t = 4s$.

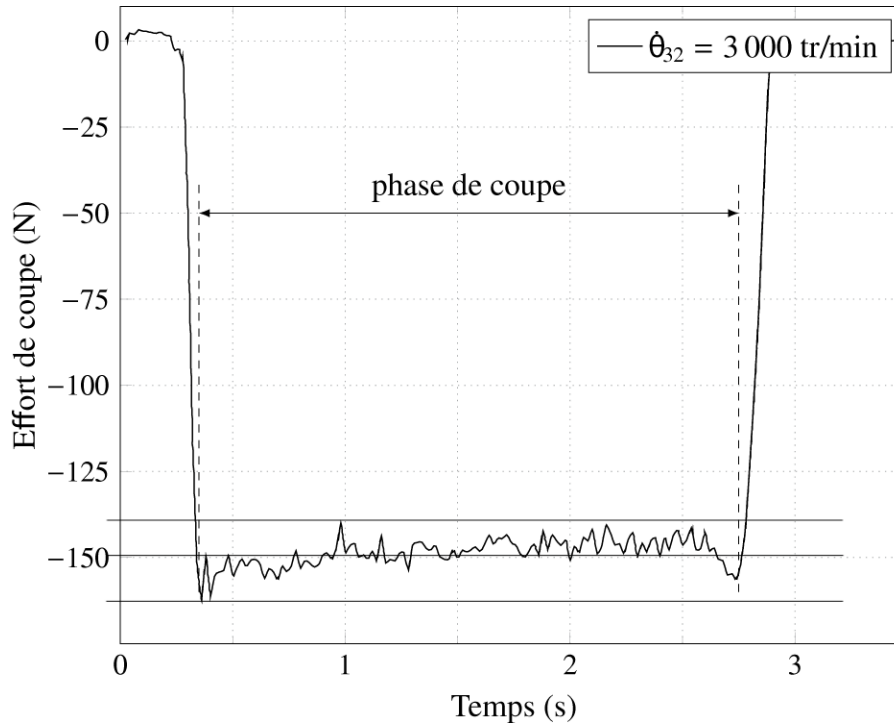
Q 29 : Sur cet intervalle $[0, 4s]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Q 30 : Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la diffé-

rence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Exercice 17 :

Q 31 : Durant la phase de coupe, déterminer les valeurs moyenne, maximale et minimale de l'effort de coupe.



Si on raisonne en norme :

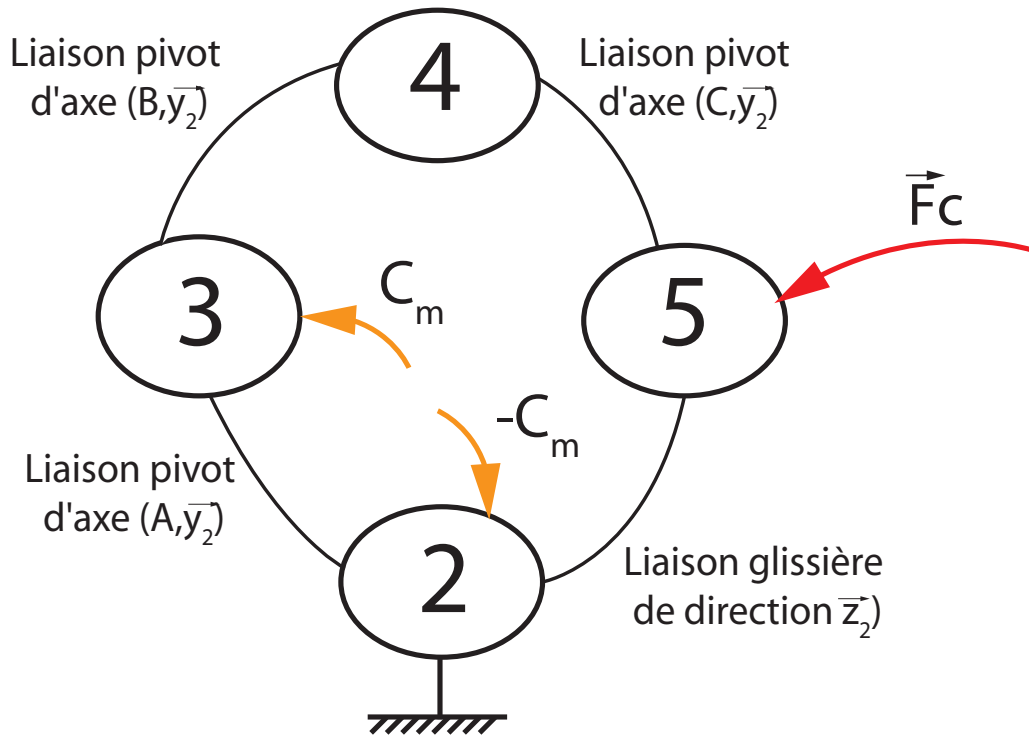
Valeur maximale : 162.5N Valeur minimale : 140N Valeur moyenne : 150 N

Q 32 : Conclure sur la validation de l'exigence 1.2.1.1. Justifier.

$$\frac{\max - \min}{\text{moy}} = \frac{162.5 - 140}{150} = 15\%$$

L'effort de coupe varie donc de $\pm 7.5\% < \pm 10\%$ par rapport à la valeur moyenne, l'exigence 1.2.1.1 est respectée

Q 33 : Dessiner le graphe de structure complet décrivant le mécanisme et le problème dynamique associé.



Q 34 : Proposer une méthode permettant d'obtenir une équation de mouvement.

- On isole le solide (4) (solide soumis à 2 glisseurs) et en déduire la direction des résultantes des actions mécaniques de $\vec{R}_{3 \rightarrow 4}$ et de $\vec{R}_{5 \rightarrow 4}$.
- On isole 3 et on applique le théorème du moment dynamique appliqué selon l'axe (A, \vec{y}_2) .
- On isole la lame (5) qui est animée d'un mouvement de translation selon la direction \vec{z}_2 par rapport au référentiel galiléen R_2 , on peut appliquer le théorème de la résultante dynamique

Q 35 : Déterminer l'équation de mouvement en régime permanent ($\dot{\theta}_{32} = cte$) reliant $C_m, F_c, M_5, \theta_{32}, \dot{\theta}_{32}$

- On isole le solide (4) qui est seulement soumis à deux actions mécaniques de type glisseur du à la possibilité d'utiliser une modélisation plane. Ainsi $\vec{R}_{3 \rightarrow 4}$ et de $\vec{R}_{5 \rightarrow 4}$ sont directement opposées, donc :

$$\vec{R}_{3 \rightarrow 4} = -\vec{R}_{5 \rightarrow 4}$$

$$\vec{R}_{3 \rightarrow 4} // \vec{R}_{5 \rightarrow 4} // \vec{z}_4$$

$$\vec{R}_{3 \rightarrow 4} = R_{34} \cdot \vec{z}_4.$$

- On isole la manivelle (3) qui est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe (A, \vec{y}_2) par rapport au référentiel galiléen R_2 , on peut appliquer le théorème du moment dynamique :

$$I^{(3)}_{(A, \vec{y}_2)} \cdot \frac{d\vec{\Omega}(3/2) \cdot \vec{y}_2}{dt} = \vec{M}_A(ext \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2.$$

- Le bilan des moments des actions mécaniques s'appliquant sur 3 selon l'axe (A, \vec{y}_2) donne :
 - Action du moteur : $\vec{M}_A(moteur \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = C_m$;
 - Action de 4 \rightarrow 3 : $\vec{M}_A(4 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = -L_3 \cdot R_{34} \cdot \sin \theta_{43}$;
 - Action de 2 \rightarrow 3 : $\vec{M}_A(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = 0$ car liaison pivot parfaite;
- On calcule le moment $\vec{M}_A(4 \rightarrow 3)$ en fonction de R_{34}, θ_{43} et L_3 .

$$\vec{M}_A(4 \rightarrow 3) = \vec{M}_B(4 \rightarrow 3) + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{4 \rightarrow 3}$$

Or, $\vec{R}_{4 \rightarrow 3} = -\vec{R}_{3 \rightarrow 4} = -R_{3 \rightarrow 4} \cdot \vec{z}_4$, $\vec{M}_B(4 \rightarrow 3) = \vec{0}$ et $\vec{AB} = L_3 \cdot \vec{z}_3$.
ainsi :

$$\vec{M}_A(4 \rightarrow 3) = L_3 \cdot \vec{z}_3 \wedge (-R_{3 \rightarrow 4} \cdot \vec{z}_4) = -L_3 \cdot R_{34} \cdot \sin \theta_{43} \cdot \vec{y}_2.$$

- La projection du moment dynamique est donnée par :

$$I_{(3)}^{(A, \vec{y}_2)} \cdot \frac{d\vec{\Omega}(3/2) \cdot \vec{y}_2}{dt} = J_3 \ddot{\theta}_{32}.$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$J_3 \ddot{\theta}_{32} = C_m - L_3 \cdot R_{34} \cdot \sin \theta_{43}.$$

- On isole la lame (5) qui est animée d'un mouvement de translation selon la direction \vec{z}_2 par rapport au référentiel galiléen R_2 , on peut appliquer le théorème de la résultante dynamique :

$$M_5 \cdot \overrightarrow{a(G_5/R_2)} \cdot \vec{z}_2 = \vec{F}(ext \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_2.$$

- On en déduit une relation entre M_5 , $\ddot{\lambda}(t)$, R_{34} , F_c et les paramètres géométriques du problème. Le bilan des résultantes des actions mécaniques s'appliquant sur 5 selon la direction \vec{z}_2 donne :
 - Action de coupe : $\vec{R}(coupe \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_2 = F_c$;
 - Action de 4 \rightarrow 5 : $\vec{R}(4 \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_2 = -\vec{R}(5 \rightarrow 4) \cdot \vec{z}_2 = \vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{z}_2 = R_{34} \cdot \vec{z}_4 \cdot \vec{z}_2 = R_{34} \cos \theta_{54}$;
 - Action de 2 \rightarrow 5 : $\vec{R}(2 \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_2 = 0$ car liaison glissière parfaite ;
- La projection résultante dynamique est donnée par :

$$M_5 \cdot \overrightarrow{a(G_3/R_2)} \cdot \vec{z}_2 = M_5 \ddot{\lambda}(t).$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$M_5 \ddot{\lambda}(t) = F_c + R_{34} \cos \theta_{54}.$$

$$\begin{cases} -L_4 \sin \theta_{54} + L_3 \sin \theta_{32} = 0 \\ L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \cos \theta_{54} = \lambda \end{cases}$$

La deuxième équation donne :

$$\cos \theta_{54} = \frac{\lambda - L_3 \cos \theta_{32}}{L_4}$$

Or d'après l'expression simplifiée de λ : $\lambda \approx L_3 \cos \theta_{32} + L_4$, on obtient

$$\cos \theta_{54} \approx 1.$$

En projetant la fermeture géométrique sur \vec{x}_4 , on obtient :

$$(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) \cdot \vec{x}_4 = 0$$

$$L_3 \vec{z}_3 \cdot \vec{x}_4 + L_4 \vec{z}_4 \cdot \vec{x}_4 - \lambda(t) \cdot \vec{z}_2 \cdot \vec{x}_4$$

$$-L_3 \sin \theta_{43} + 0 + \lambda(t) \sin \theta_{54} = 0$$

d'où,

$$\sin \theta_{43} = \frac{\lambda \sin \theta_{54}}{L_3}$$

Or $L_3 \sin \theta_{32} = L_4 \sin \theta_{54}$
donc,

$$\sin \theta_{43} = \lambda \frac{\sin \theta_{32}}{L_4} = \frac{(L_3 \cos \theta_{32} + L_4) \sin \theta_{32}}{L_4} = \sin \theta_{32} + \frac{L_3}{L_4} \cos \theta_{32}$$

En faisant l'hypothèse que $L_3 \ll L_4$, on obtient bien : $\sin \theta_{43} \approx \sin \theta_{32}$.

En combinant les équations provenant des théorèmes en résultante et en moment dynamique, on obtient :

$$J_3 \ddot{\theta}_{32} = C_m - L_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot \left(\frac{M_5 \ddot{\lambda}(t) - F_c}{\cos \theta_{54}} \right).$$

Or,

$$\ddot{\lambda}(t) = \ddot{\theta}_{32} \sin \theta_{32}(t) - \omega_{32}^2 \cdot \cos \theta_{32}(t)$$

Donc dans le cas du régime permanent :

$$\ddot{\lambda}(t) = -\omega_{32}^2 \cdot \cos \theta_{32}(t)$$

On obtient alors,

$$J_3 \ddot{\theta}_{32} = C_m - L_3 \cdot \sin \theta_{32} \cdot (-M_5 L_3 \cdot \omega_{32}^2 \cdot \cos \theta_{32}(t) - F_c).$$

Au final,

$$C_m = L_3 \cdot \sin \theta_{32} \cdot (-M_5 L_3 \cdot \omega_{32}^2 \cdot \cos \theta_{32}(t) - F_c)$$

Q 36 : Pourquoi le couple moteur n'est-il pas constant en régime permanent? Quelle en est la conséquence sur le comportement du système?

Le coulisseau a un mouvement de va et vient donc même en régime permanent (vitesse de rotation constante du moteur) *l'accélération du coulisseau n'est pas constante.*

De plus la pesanteur sur le coulisseau *est motrice durant la phase de descente et résistante durant la phase de montée.*

Ces 2 phénomènes sont à l'origine du couple moteur variable en régime permanent et *vont provoquer des vibrations.*