Programme de colles n° 2

Semaine du 21 au 25 septembre

Révisions d'algèbre linéaire de sup

- Sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels engendrés par une famille finie de vecteurs.
- Famille libre, famille génératrice, base.
- Somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Applications linéaires. Noyau, image.
- Théorème de la base extraite, de la base incomplète.
- Utilisation d'un argument de dimension pour montrer qu'une famille de vecteurs est une base, pour montrer que 2 sous-espaces vectoriels sont égaux, pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, pour montrer qu'un endomorphisme est bijectif.
- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire relativement à 2 bases, d'un endomorphisme dans une base.
- Effet de l'inversibilité de la matrice sur la famille de vecteurs, l'endomorphisme qu'elle représente.
- Matrices de passage, formules de changement de bases.
- Différentes notions de rang (famille de vecteurs, application linéaire, matrice).
- Théorème du rang.
- Rang d'une composée d'applications linéaires.
- Projections, symétries : définitions, propriétés.
- Caractérisations des projections et symétries.
- Écriture de la matrice d'une projection/symétrie dans une base adaptée.

Compléments d'algèbre linéaire

- Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
- Somme $F_1 + \cdots + F_p$ d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Somme directe.
- En dimension finie, base adaptée à une décomposition $E = \oplus F_i$. Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
- En dimension finie, dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (inégalité). Cas d'égalité.
- Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).
- Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.
- Si u et v sont des endomorphismes de E qui commutent alors le noyau de u et l'image de u sont stables par v.
- Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme.
- Matrices semblables.
- Trace : définition, linéarité, trace d'un produit.
- Invariance de la trace par similitude, trace d'un endomorphisme.
- Polynômes d'un endomorphisme u et d'une matrice carrée A.
  Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$, $(PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$.
- Polynôme annulateur.
- Définition des polynômes d'interpolation L_i de Lagrange en $n+1$ points distincts.
- Les $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ forment une base de $K_n[X]$, décomposition d'un polynôme dans cette base.
- Déterminants d'une matrice : propriétés générales (rappels).
- Développement par rapport à une colonne, une ligne.
- $\det(\lambda A)$, déterminant d'un produit. Lien avec l'inversibilité.
- Déterminant triangulaire, triangulaire par blocs.
- Déterminant de Vandermonde.

Séries

Cette semaine, les séries ne sont concernées que par les questions de cours.
Ne pas donner d'exercices sur les séries.

- Définition d'une série, de la convergence d'une série, de la somme d'une série.
- Reste d'une série convergente.
- Condition nécessaire de convergence : Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Réciproque fausse. Divergence grossière.
- Lien suite/série.
- Série géométrique, série exponentielle, séries de Riemann.
- Opérations sur les séries : combinaisons linéaires.
- Cas des séries à termes complexes.
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes réels positifs : inégalités, équivalences, résultats avec O et o.
- Définition de l'absolue convergence, condition suffisante de convergence.
- Dernier théorème de comparaison : Si $\sum u_n$ est à termes complexes, $\sum v_n$ à termes réels positifs.
  Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ (resp. $u_n = o(v_n)$) alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
- Technique de comparaison série-intégrale.
- Formule de Stirling.
- Règle de d'Alembert.
- Définition des séries alternées et théorème spécial des séries alternées (résultat de convergence et résultats sur le reste).
- Produit de Cauchy de deux séries : définition et théorème (produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes).

Questions de cours

Demander en début de colle à chaque étudiant(e) :

- une définition ou une proposition ou un théorème du cours (parmi les points listés précédemment) ;
- et l'une des démonstrations suivantes :

— Pour tous A et B de $\mathcal{M}_n(K), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

— *Exemple fait en cours* : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
En utilisant le lien suite/série, montrer que la suite (u_n) converge.

— *Exemple fait en cours* : On pose : $\forall n \geqslant 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Déterminer un équivalent de (S_n) par comparaison série/intégrale.

Ensuite, un ou deux exercices (pas sur les séries).