Programme de colles n° 3

Semaine du 28 septembre au 02 octobre

Séries

- Définition d'une série, de la convergence d'une série, de la somme d'une série.
- Reste d'une série convergente.
- Condition nécessaire de convergence : Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Réciproque fausse. Divergence grossière.
- Lien suite/série.
- Série géométrique, série exponentielle, séries de Riemann.
- Opérations sur les séries : combinaisons linéaires.
- Cas des séries à termes complexes.
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes réels positifs : inégalités, équivalences, résultats avec O et o.
- Définition de l'absolue convergence, condition suffisante de convergence.
- Dernier théorème de comparaison : Si $\sum u_n$ est à termes complexes, $\sum v_n$ à termes réels positifs. Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ (resp. $u_n = o(v_n)$) alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
- Technique de comparaison série-intégrale.
- Formule de Stirling.
- Règle de d'Alembert.
- Définition des séries alternées et théorème spécial des séries alternées (résultat de convergence et résultats sur le reste).
- Produit de Cauchy de deux séries : définition et théorème (produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes).

Intégration sur un segment : révisions de première année

On étend juste les premières propriétés des intégrales aux fonctions continues par morceaux.

- Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans K.
- Propriétés : linéarité, positivité, relation de Chasles, inégalité triangulaire.
- Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, positive. f n'est pas la fonction nulle $\implies \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$. Contraposée.
- Théorème fondamental de l'analyse.
- Sommes de Riemann.
- Intégration par parties, changement de variable.

Intégrales généralisées

Cette semaine, pas d'exercices sur les intégrales généralisées, seulement des questions de cours.

- Intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ d'une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$. Convergente, divergence.
- Premier théorème de comparaison avec $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a,+\infty[$.
- Intégrale généralisée sur un intervalle I d'extrémités a et b où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Intégrale doublement généralisée.
- Notion d'intégrale faussement généralisée.
- Exemples de référence : intégrales de Riemann, $\displaystyle\int e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$.
- Linéarité.
- Positivité, croissance. Relation de Chasles.
- Cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Intégrales absolument convergentes. Théorème (absolue convergence $\implies$ convergence).
- Fonctions intégrales sur un intervalle I (fonctions continues par morceaux sur I telles que l'intégrale sur I est absolument convergente).
- Espace vectoriel $L^1(I,K)$.
- Intégrabilité des fonctions de référence.
- Si f est intégrable sur I, continue, positive, d'intégrale nulle alors f est la fonction nulle sur I. Savoir contraposer.
- Théorèmes de comparaison pour l'intégralité : inégalités, résultats sur $\sim, o$ et O.
- Techniques de calcul : primitivation de l'intégrande, intégration par parties, changement de variables.

Questions de cours

Demander en début de colle à chaque étudiant(e) :

- une définition ou une proposition ou un théorème du cours (parmi les points listés précédemment) ;
- et l'une des démonstrations suivantes :

— *Exemple fait en cours* : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

En utilisant le lien suite/série, montrer que la suite (u_n) converge.

— *Exemple fait en cours* : On pose : $\forall n \geqslant 1, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Déterminer un équivalent de (S_n) par comparaison série/intégrale.

— *Exemple fait en cours* : Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge mais ne converge pas absolument.

Ensuite, un ou deux exercices. Dans un premier temps, un exercice sur les séries. S'il reste du temps, un exercice de révision de première année sur les intégrales sur un segment.

Remarque : Pour les intégrations par parties et changement de variable (sur un segment puis intégrales généralisées la semaine prochaine), le pgm est clair et demande d'éviter tout excès de rigueur. Dans les cas concrets de calcul, on ne demande pas de vérifier les hypothèses de régularité des fonctions.