Programme de colles n° 4

Semaine du 5 octobre au 09 octobre

Séries

- Définition d'une série, de la convergence d'une série, de la somme d'une série.
- Reste d'une série convergente.
- Condition nécessaire de convergence : Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Réciproque fausse. Divergence grossière.
- Lien suite/série.
- Série géométrique, série exponentielle, séries de Riemann.
- Opérations sur les séries : combinaisons linéaires.
- Cas des séries à termes complexes.
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes réels positifs : inégalités, équivalences, résultats avec O et o.
- Définition de l'absolue convergence, condition suffisante de convergence.
- Dernier théorème de comparaison : Si $\sum u_n$ est à termes complexes, $\sum v_n$ à termes réels positifs. Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ (resp. $u_n = o(v_n)$) alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
- Technique de comparaison série-intégrale.
- Formule de Stirling.
- Règle de d'Alembert.
- Définition des séries alternées et théorème spécial des séries alternées (résultat de convergence et résultats sur le reste).
- Produit de Cauchy de deux séries : définition et théorème (produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes).

Intégration sur un segment : révisions de première année

On étend juste les premières propriétés des intégrales aux fonctions continues par morceaux.

- Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans K.
- Propriétés : linéarité, positivité, relation de Chasles, inégalité triangulaire.
- Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, positive. f n'est pas la fonction nulle $\implies \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$. Contraposée.
- Théorème fondamental de l'analyse.
- Sommes de Riemann.
- Intégration par parties, changement de variable.

Intégrales généralisées

- Intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ d'une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$. Convergente, divergence.
- Premier théorème de comparaison avec $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a,+\infty[$.
- Intégrale généralisée sur un intervalle I d'extrémités a et b où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Intégrale doublement généralisée.
- Notion d'intégrale faussement généralisée.
- Exemples de référence : intégrales de Riemann, $\displaystyle\int e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$.
- Linéarité.
- Positivité, croissance. Relation de Chasles.
- Cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Intégrales absolument convergentes. Théorème (absolue convergence $\implies$ convergence).
- Fonctions intégrales sur un intervalle I (fonctions continues par morceaux sur I telles que l'intégrale sur I est absolument convergente).
- Espace vectoriel $L^1(I,K)$.
- Intégrabilité des fonctions de référence.
- Si f est intégrable sur I, continue, positive, d'intégrale nulle alors f est la fonction nulle sur I. Savoir contraposer.
- Théorèmes de comparaison pour l'intégralité : inégalités, résultats sur $\sim, o$ et O.
- Techniques de calcul : primitivation de l'intégrande, intégration par parties, changement de variables.

Élements propres

Cette semaine, pas d'exercices sur ce chapitre, seulement des questions de cours.

- Dans E K-espace vectoriel : définition d'une valeur propre λ de $u \in \mathscr{L}(E)$, d'un vecteur propre associé. Équivalence avec la non injectivité de $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$. Notion d'espace propre. Notation $E_\lambda(u)$.

Le reste du chapitre se passe dans un K-espace vectoriel E de dimension finie.

- Si 2 endomorphismes u et v commutent alors, pour toute valeur propre λ de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.
- Si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes 2 à 2 alors la somme des sous-espaces propres associés est directe. Corollaire : toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- λ est une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E) \iff \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0$.
- Définition du spectre de $u \in \mathscr{L}(E)$.
- Élements propres d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
- Deux matrices semblables ont même spectre.
- Si $P \in K[X], u \in \mathscr{L}(E), \lambda \in K, x \in E$. Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- Si P est un polynôme annulateur de $u \in \mathscr{L}(E)$ alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda \in K \,/\, P(\lambda) = 0\}$. L'inclusion réciproque est fausse en général.
- Polynôme caractéristique de $u \in \mathscr{L}(E), A \in \mathcal{M}_n(K)$: définition, notation χ_u, χ_A, nature polynomiale et connaissance de certains coefficients (coeff constant et coeff de X^{n-1}).
- Les valeurs propres de $u \in \mathscr{L}(E)$ sont les racines du polynôme caractéristique.

- Définition de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre. Majoration du nombre de valeurs propres (2 résultats).
- 2 matrices semblables ont même polynôme caractéristique. A et $A^\top$ aussi pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
- Valeurs propres d'une matrice triangulaire et multiplicités.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, expression de $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$ si χ_A est scindé.

Questions de cours

Demander en début de colle à chaque étudiant(e) :

- une définition ou une proposition ou un théorème du cours (parmi les points listés précédemment) ;
- et l'une des démonstrations suivantes :

— *Exemple fait en cours* : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Calculer I_n.

— *Exemple fait en cours* : Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge mais ne converge pas absolument.

— *Exercice fait en cours* :

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E stable par $u \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_F induit par u sur F divise le polynôme caractéristique de u : χ_{u_F} divise χ_u.

Ensuite, un ou deux exercices. Dans un premier temps, un exercice sur les séries puis un exercice sur les intégrales généralisées.

Remarque : Pour les intégrations par parties et changement de variable, le pgm est clair et demande d'éviter tout excès de rigueur. Dans les cas concrets de calcul, on ne demande pas de vérifier les hypothèses de régularité des fonctions.