Programme de colles n° 5

Semaine du 2 novembre au 6 novembre

Intégrales généralisées

- Intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ d'une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$. Convergence, divergence.
- Premier théorème de comparaison avec $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a,+\infty[$.
- Intégrale généralisée sur un intervalle I d'extrémités a et b où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Intégrale doublement généralisée.
- Notion d'intégrale faussement généralisée.
- Exemples de référence : intégrales de Riemann, $\displaystyle\int e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$.
- Linéarité.
- Positivité, croissance. Relation de Chasles.
- Cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Intégrales absolument convergentes. Théorème (absolue convergence $\implies$ convergence).
- Fonctions intégrales sur un intervalle I (fonctions continues par morceaux sur I telles que l'intégrale sur I est absolument convergente).
- Espace vectoriel $L^1(I,K)$.
- Intégrabilité des fonctions de référence.
- Si f est intégrable sur I, continue, positive, d'intégrale nulle alors f est la fonction nulle sur I. Savoir contraposer.
- Théorèmes de comparaison pour l'intégralité : inégalités, résultats sur $\sim, o$ et O.
- Techniques de calcul : primitivation de l'intégrande, intégration par parties, changement de variables.

Élements propres

- Dans E K-espace vectoriel : définition d'une valeur propre λ de $u \in \mathscr{L}(E)$, d'un vecteur propre associé. Équivalence avec la non injectivité de $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$. Notion d'espace propre. Notation $E_\lambda(u)$.

Le reste du chapitre se passe dans un K-espace vectoriel E de dimension finie.

- Si 2 endomorphismes u et v commutent alors, pour toute valeur propre λ de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.
- Si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes 2 à 2 alors la somme des sous-espaces propres associés est directe. Corollaire : toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- λ est une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E) \iff \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0$.
- Définition du spectre de $u \in \mathscr{L}(E)$.
- Élements propres d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
- Deux matrices semblables ont même spectre.
- Si $P \in K[X], u \in \mathscr{L}(E), \lambda \in K, x \in E$. Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- Si P est un polynôme annulateur de $u \in \mathscr{L}(E)$ alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda \in K \,/\, P(\lambda) = 0\}$. L'inclusion réciproque est fausse en général.
- Polynôme caractéristique de $u \in \mathscr{L}(E), A \in \mathcal{M}_n(K)$: définition, notation χ_u, χ_A, nature polynomiale et connaissance de certains coefficients (coeff constant et coeff de X^{n-1}).

- Les valeurs propres de $u \in \mathscr{L}(E)$ sont les racines du polynôme caractéristique.
- Définition de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre. Majoration du nombre de valeurs propres (2 résultats).
- 2 matrices semblables ont même polynôme caractéristique. A et $A^\top$ aussi pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
- Valeurs propres d'une matrice triangulaire et multiplicités.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, expression de $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$ si χ_A est scindé.

Suites de fonctions

Les fonctions sont définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Définition : la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f.
- Définition d'une norme N sur un K-espace vectoriel E.
- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On note $kA = \{kx \,/\, x \in A\}$. Alors, $\sup(kA) = k\sup(A)$.
- $\mathcal{B}(I, K)$ (ensemble des fonctions bornées sur I) est un K-espace vectoriel.
  On pose, pour $f \in \mathcal{B}(I, K)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$.
  $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, K)$, appelée norme de la convergence uniforme ou norme infinie.
- Définition : la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f.
- La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse.
- Transfert de continuité par convergence uniforme. Version avec hypothèse « convergence uniforme sur tout segment ».
- Interversion limite-intégrale par convergence uniforme sur un segment, théorème de convergence dominée.
  Remarque : Le programme de PSI indique que : « *Pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.* »
- Théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions (pour l'hypothèse sur la convergence uniforme des f_n', il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout segment). Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Questions de cours

Demander en début de colle à chaque étudiant(e) :

- une définition ou une proposition ou un théorème du cours (parmi les points listés précédemment) ;
- et l'une des démonstrations suivantes :

— *Exemple fait en cours* : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Calculer I_n.

— *Exercice fait en cours* :
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E stable par $u \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_F induit par u sur F divise le polynôme caractéristique de u : χ_{u_F} divise χ_u.

— $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, K)$.

Ensuite un ou deux exercices.