Programme de colles n° 6

Semaine du 9 novembre au 13 novembre

Élements propres

- Dans E K-espace vectoriel : définition d'une valeur propre λ de $u \in \mathscr{L}(E)$, d'un vecteur propre associé. Équivalence avec la non injectivité de $u - \lambda \mathrm{id}_E$. Notion d'espace propre. Notation $E_\lambda(u)$.

Le reste du chapitre se passe dans un K-espace vectoriel E de dimension finie.

- Si 2 endomorphismes u et v commutent alors, pour toute valeur propre λ de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes 2 à 2 alors la somme des sous-espaces propres associés est directe. Corollaire : toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- λ est une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E) \iff \det(u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$.
- Définition du spectre de $u \in \mathscr{L}(E)$.
- Élements propres d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
- Deux matrices semblables ont même spectre.
- Si $P \in K[X], u \in \mathscr{L}(E), \lambda \in K, x \in E$. Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- Si P est un polynôme annulateur de $u \in \mathscr{L}(E)$ alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda \in K \,/\, P(\lambda) = 0\}$. L'inclusion réciproque est fausse en général.
- Polynôme caractéristique de $u \in \mathscr{L}(E), A \in \mathcal{M}_n(K)$: définition, notation χ_u, χ_A, nature polynomiale et connaissance de certains coefficients (coeff constant et coeff de X^{n-1}).
- Les valeurs propres de $u \in \mathscr{L}(E)$ sont les racines du polynôme caractéristique.
- Définition de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre. Majoration du nombre de valeurs propres (2 résultats).
- 2 matrices semblables ont même polynôme caractéristique. A et $A^\top$ aussi pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
- Valeurs propres d'une matrice triangulaire et multiplicités.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, expression de $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$ si χ_A est scindé.

Suites de fonctions

Les fonctions sont définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Définition : la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f.
- Définition d'une norme N sur un K-espace vectoriel E.
- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On note $kA = \{kx \,/\, x \in A\}$. Alors, $\sup(kA) = k \sup(A)$.
- $\mathcal{B}(I, K)$ (ensemble des fonctions bornées sur I) est un K-espace vectoriel.
  On pose, pour $f \in \mathcal{B}(I, K)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$.
  $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, K)$, appelée norme de la convergence uniforme ou norme infinie.
- Définition : la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f.
- La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse.
- Transfert de continuité par convergence uniforme. Version avec hypothèse « convergence uniforme sur tout segment ».
- Interversion limite-intégrale par convergence uniforme sur un segment, théorème de convergence dominée.
  Remarque : Le programme de PSI indique que : « *Pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.* »
- Théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions (pour l'hypothèse sur la convergence uniforme des f_n', il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout segment). Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Réduction

On travaille dans un K-espace vectoriel E de dimension finie.

- Définition : endomorphismes, matrices diagonalisables.
- Différentes caractérisations de la diagonalisabilité : soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
  Il y a équivalence entre :
  - u est diagonalisable.
  - Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
  - E est la somme directe des sous-espaces propres de u : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
  - $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$
  - χ_u est scindé et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$ en notant m_λ la multiplicité de la valeur propre λ.
  - u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
  - $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u.

  A adapter pour les matrices.
- Deux conditions suffisantes de diagonalisabilité :
  - Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $\dim(E) = n$ et u admet n valeurs propres deux à deux distinctes. Alors u est diagonalisable et ses espaces propres sont des droites vectorielles.
    A adapter pour les matrices.
  - Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.
  Si u est diagonalisable et F stable par u alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est diagonalisable.
- Définition : endomorphismes, matrices trigonalisables.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est trigonalisable $\iff$ χ_u est scindé.
- Calcul de $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$ à l'aide des valeurs propres de A lorsque A est trigonalisable.
- Tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable. Cas de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque : *La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.*

Questions de cours

Demander en début de colle à chaque étudiant(e) :

- une définition ou une proposition ou un théorème du cours (parmi les points listés précédemment) ;
- et l'une des démonstrations suivantes :

— $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, K)$.

— Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie.
u est diagonalisable $\iff$ χ_u est scindé et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

— *Exemple fait en cours* : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

❶ Déterminer χ_A.

❷ Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Ensuite un ou deux exercices.