Programme de colles n° 7

Semaine du 16 novembre au 20 novembre

Suites de fonctions

Les fonctions sont définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Définition : la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f.
- Définition d'une norme N sur un K-espace vectoriel E.
- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On note $kA = \{kx \,/\, x \in A\}$. Alors, $\sup(kA) = k\sup(A)$.
- $\mathcal{B}(I, K)$ (ensemble des fonctions bornées sur I) est un K-espace vectoriel.
  On pose, pour $f \in \mathcal{B}(I, K)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$.
  $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, K)$, appelée norme de la convergence uniforme ou norme infinie.
- Définition : la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f.
- La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse.
- Transfert de continuité par convergence uniforme. Version avec hypothèse « convergence uniforme sur tout segment ».
- Interversion limite-intégrale par convergence uniforme sur un segment, théorème de convergence dominée.
  Remarque : Le programme de PSI indique que : « *Pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.* »
- Théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions (pour l'hypothèse sur la convergence uniforme des f_n', il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout segment). Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Réduction

On travaille dans un K-espace vectoriel E de dimension finie.

- Définition : endomorphismes, matrices diagonalisables.
- Différentes caractérisations de la diagonalisabilité : soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
  Il y a équivalence entre :
  - u est diagonalisable.
  - Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
  - E est la somme directe des sous-espaces propres de u : $E = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
  - $\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$
  - χ_u est scindé et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$ en notant m_λ la multiplicité de la valeur propre λ.
  - u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

— $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u.

A adapter pour les matrices.

- Deux conditions suffisantes de diagonalisabilité :
  — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $\dim(E) = n$ et u admet n valeurs propres deux à deux distinctes. Alors u est diagonalisable et ses espaces propres sont des droites vectorielles.
  A adapter pour les matrices.
  — Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.
  Si u est diagonalisable et F stable par u alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est diagonalisable.
- Définition : endomorphismes, matrices trigonalisables.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est trigonalisable $\iff$ χ_u est scindé.
- Calcul de $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$ à l'aide des valeurs propres de A lorsque A est trigonalisable.
- Tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable. Cas de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque : *La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.*

Séries de fonctions

Cette semaine, les séries de fonctions ne sont concernées que par les questions de cours.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I à valeurs dans K.

- Convergence simple : définition, somme partielle d'ordre n de la série de fonctions, somme de la série, reste d'ordre n de la série.
- Convergence uniforme : définition.
- On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur I. Alors, il y a équivalence entre les énoncés :
  — $\sum f_n$ converge uniformément sur I
  — La suite (R_n) de ses restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle : la fonction R_n est bornée à partir d'un certain rang et $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Convergence normale : On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur I lorsque : f_n est bornée sur I à partir d'un certain rang et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
- Lien entre les différents modes de convergence :
  — Convergence normale $\implies$ Convergence uniforme $\implies$ convergence simple.
  — On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur I. Alors, pour tout $x \in I$, $\sum f_n(x)$ converge absolument.
- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et $\sum f_n$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment inclus dans I) alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.
- Théorème de la double limite.

Questions de cours

Demander en début de colle à chaque étudiant(e) :

- une définition ou une proposition ou un théorème du cours (parmi les points listés précédemment) ;
- et l'une des démonstrations suivantes :

— Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie.
u est diagonalisable $\iff$ χ_u est scindé et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

— *Exemple fait en cours* : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

❶ Déterminer χ_A.

❷ Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

— *Exemple fait en cours* : On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

❶ Justifier que f est bien définie.

❷ Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ en utilisant une comparaison série/ intégrale.

Ensuite un ou deux exercices.