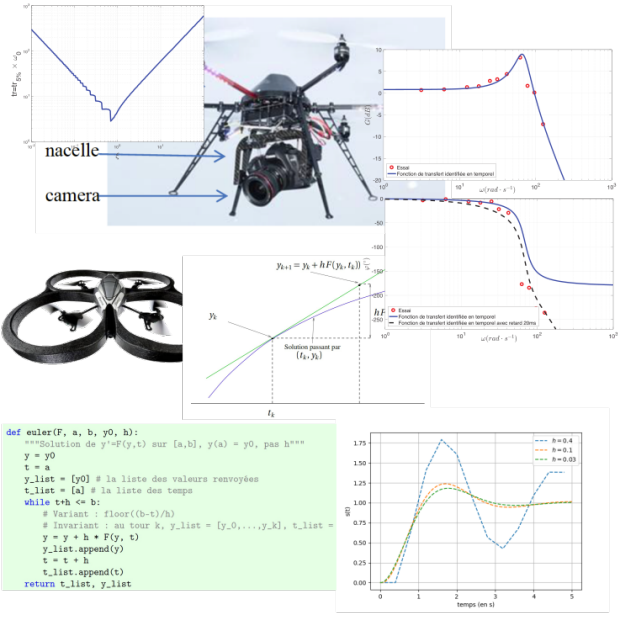



nacelle
camera

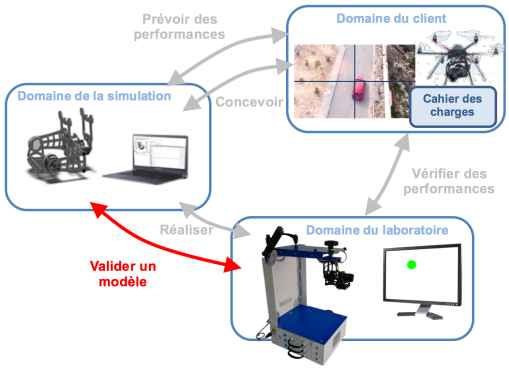
I. Identification à partir d'un modèle de connaissance

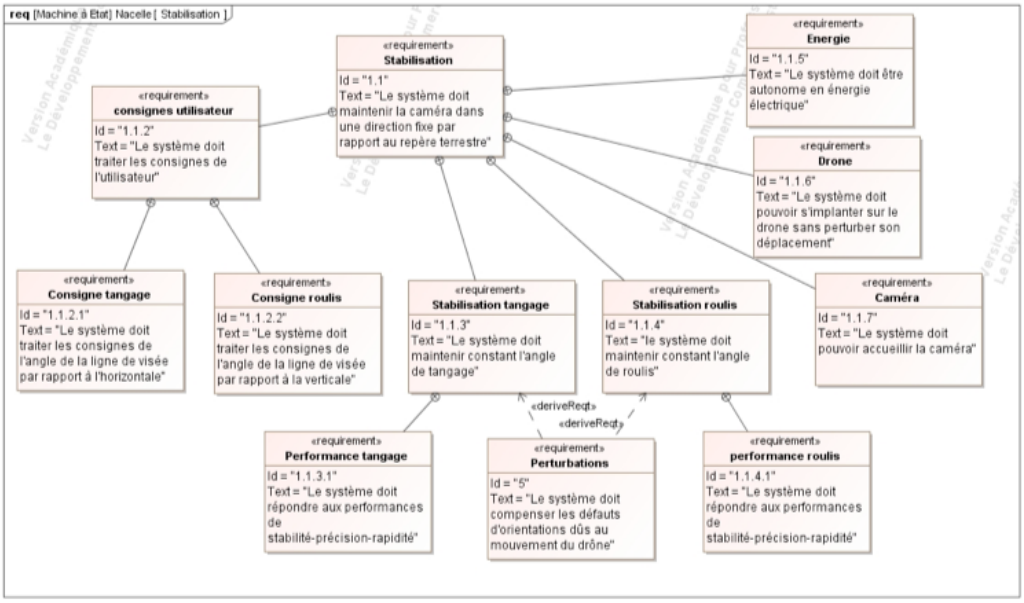
1 Intérêt de l'identification d'un modèle d'un système

On considère un système pluritechnique réel. On souhaite modéliser ce système pour effectuer des simulations pour prévoir les performances du système.

Exemple 1 : ***Exemple du cours nacelle de drone***



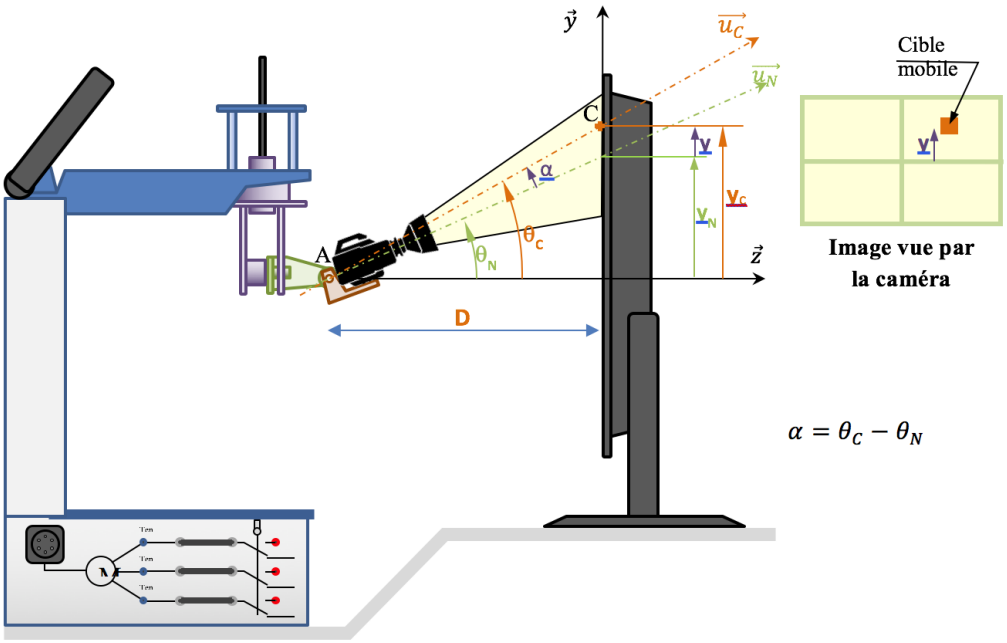


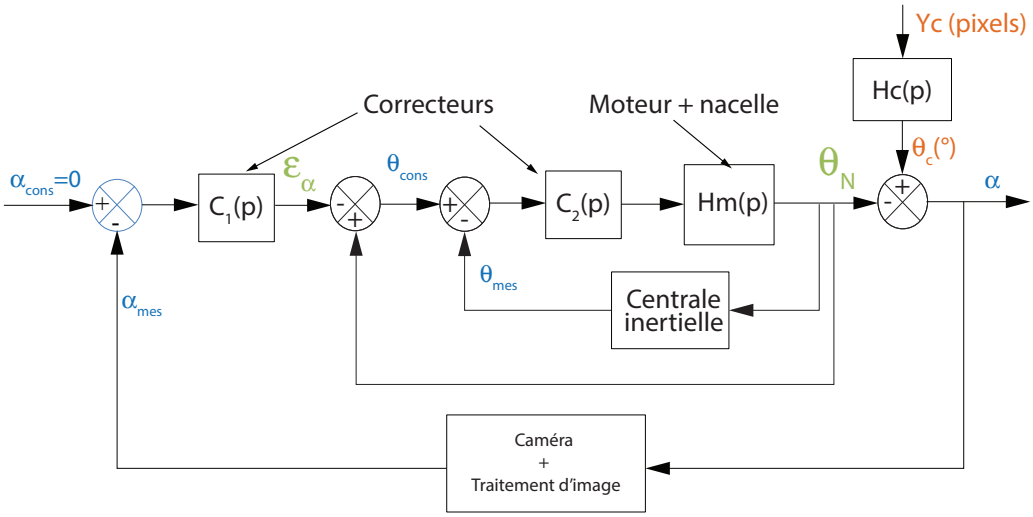


2 Construction d'un modèle de connaissance

Exemple 2 : *Modélisation globale de la nacelle*

On donne la structure de la modélisation globale de la nacelle avec traitement d'image.





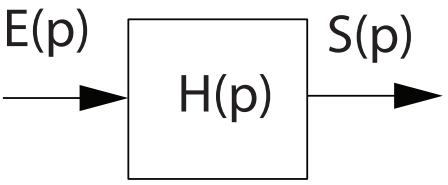
Le **but de l'identification** est de déterminer un **modèle mathématique** décrivant le plus précisément possible les différents blocs du modèle proposé. On procèdera pour cela à des mesures décrivant **le comportement** sur le système réel et on en déduira quel sera le type de modèle qu'il serait préférable d'utiliser.

3 Principe d'identification

Définition 1 : *Principe d'identification*

On cherche à identifier un bloc modélisant un phénomène physique ou un composant. Le principe d'identification consiste à trouver une fonction de transfert reliant deux grandeurs physiques (d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$) qu'on pourra mettre dans la plupart des cas sous la forme :

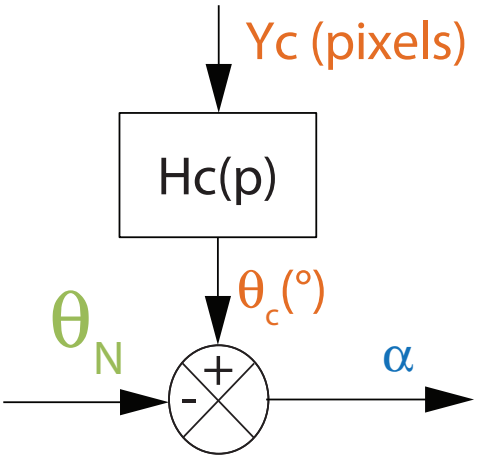
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot e^{-\tau \cdot p}}{p^{\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{n_1} (1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod_{j=1}^{n_2} \left(1 + \frac{2\xi_j}{\omega_{j0}} p + \frac{p^2}{\omega_{j0}^2}\right)} \quad (1)$$



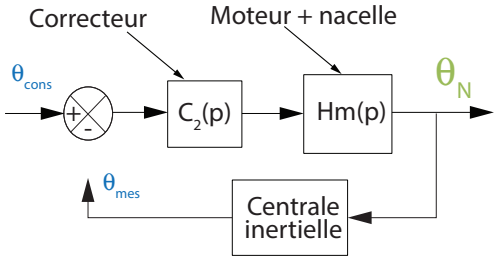
- α est **la classe** de la fonction transfert :
  - le nombre d'**intégrations** si $\alpha > 0$;
  - le nombre de **dérivations** si $\alpha < 0$.
- L'ordre de la fonction de transfert est donné par
  - $n = n_1 + 2 \cdot n_2 + \alpha$ si $\alpha > 0$;
  - $n = n_1 + 2 \cdot n_2$ si $\alpha < 0$;
- avec :
  - n_1 le nombre de fonction de transfert du **premier ordre**.
  - n_2 le nombre de fonction de transfert du **second ordre** à pôles complexes.
- τ le retard dans la boucle ouverte

Remarque 1 :

- Une relation fait intervenir au moins **3 grandeurs physique distinctes** se modélisera dans un schéma bloc à l'aide de **"sommateur/comparateur"**.
- Pour modéliser efficacement et en détail une fonction de transfert d'un système asservi on privilégiera une identification de la fonction de transfert en **boucle ouverte.** On pourra ainsi directement juger des performances du système asservi en terme de stabilité et de précision.



$\alpha(p) = \theta_C(p) - \theta_N(p) = H_C(p) \cdot Y_c(p) - \theta_N(p)$



$H_{bo}(p) = \frac{\theta_{mes}(p)}{\theta_{cons}(p)}$ Définition de la fonction de transfert en boucle ouverte

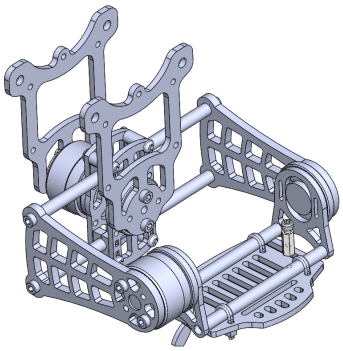
II. Identification à partir de mesures de comportement

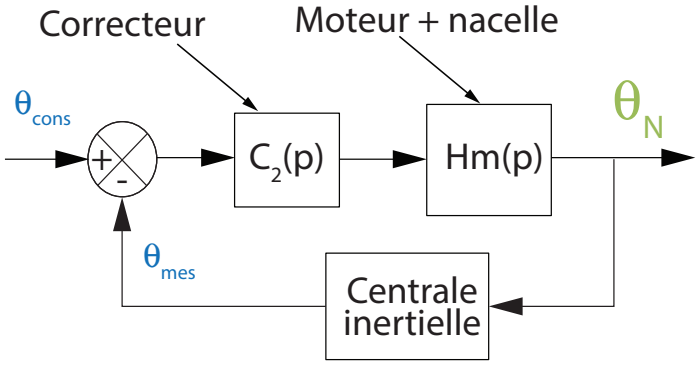
1 Modélisation du bloc moteur de la nacelle

Exemple 3 : *Identification du bloc moteur de la nacelle*

Nous cherchons ici à identifier le comportement de la nacelle seule avec la caméra. On retient la structure du schéma bloc suivant. Nous pourrons travailler :

- en **boucle ouverte :** $H_{BO}(p) = \frac{\theta_{mes}(p)}{\theta_{cons}(p)}$ avec bouclage "coupé".
- en **boucle fermée :** $H_{BF}(p) = \frac{\theta_N(p)}{\theta_{cons}(p)}$ avec "asservissement bouclé".





2 Identification dans le domaine temporel

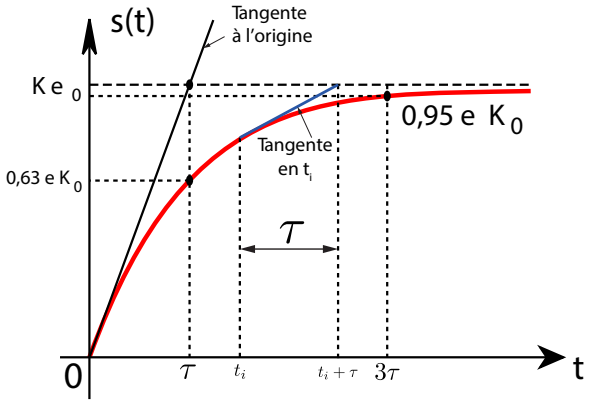
Nous rappelons ici les éléments théoriques qui permettent de mettre en place une méthodologie d'identification d'un système dans le domaine temporel.

Concrètement il faut solliciter un système avec un échelon d'une amplitude déterminée.

Systèmes du premier ordre

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'un échelon), un système du premier ordre :

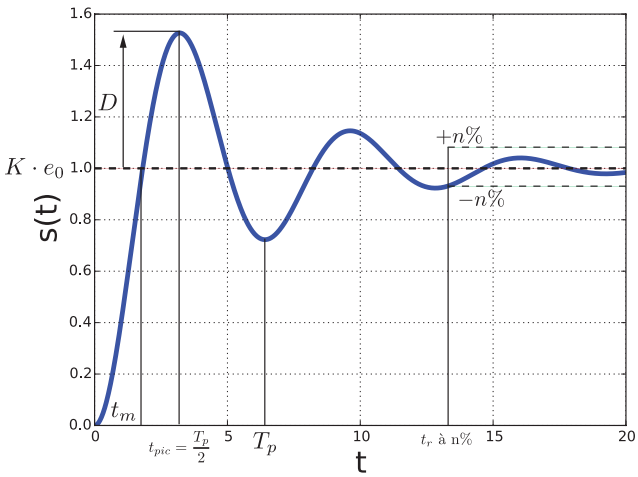
- est toujours stable (si $\tau > 0$),
- ne présente jamais de dépassements,
- converge **vers** $K\,e_0$,
- possède une tangente à l'origine de pente $\frac{K\,e_0}{\tau}$,
- possède un temps de réponse à 5% qui vaut $t_{r5\%} = 3\,\tau$.
- la tangente en t_i coupe l'asymptote horizontale d'équation $K\,e_0$ en $t_i + \tau$.



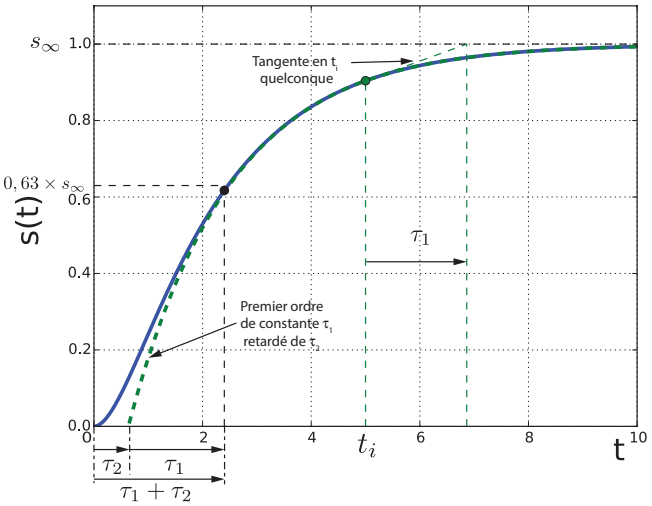
Systèmes du deuxième ordre

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du deuxième ordre :

- présente un dépassement si $\xi < 1$,
- converge **vers** $K\,e_0$,
- possède une tangente à l'origine de **pente nulle** ,
- possède un temps de réponse à 5% qui se calcule à partir de l'abaque donné ci-dessous.
- possède un optimal de rapidité pour $\xi = 0,7$ et $t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0}$.
- Pour **un second ordre** oscillant ($\xi < 1$) la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement s'identifient avec les définitions de :
  - la pseudo période : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$
  - le dépassement % : $D\% = 100 \times exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \frac{s_{max}-s_\infty}{s_\infty} \times 100$
- Pour **un second ordre** non-oscillant ou amorti ($\xi > 1$) soit le comportement s'approche d'un premier ordre (pôle dominant) soit on peut identifier τ_1 et τ_2 avec la méthode présentée ci-dessous. Avec ici $\tau_1 > \tau_2$ et :
  - $\tau_1 = \frac{1}{\omega_0\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)}$;
  - $\tau_2 = \frac{1}{\omega_0\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)}$.



$\xi < 1$



$\xi > 1$

FIGURE 1 – Réponse à un échelon pour un système du second ordre

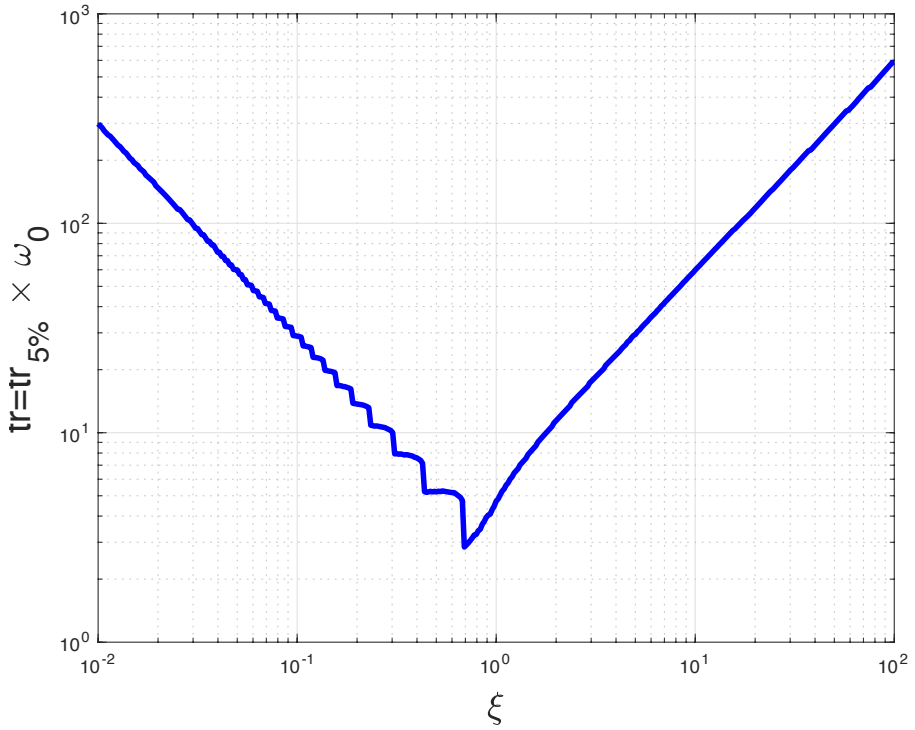
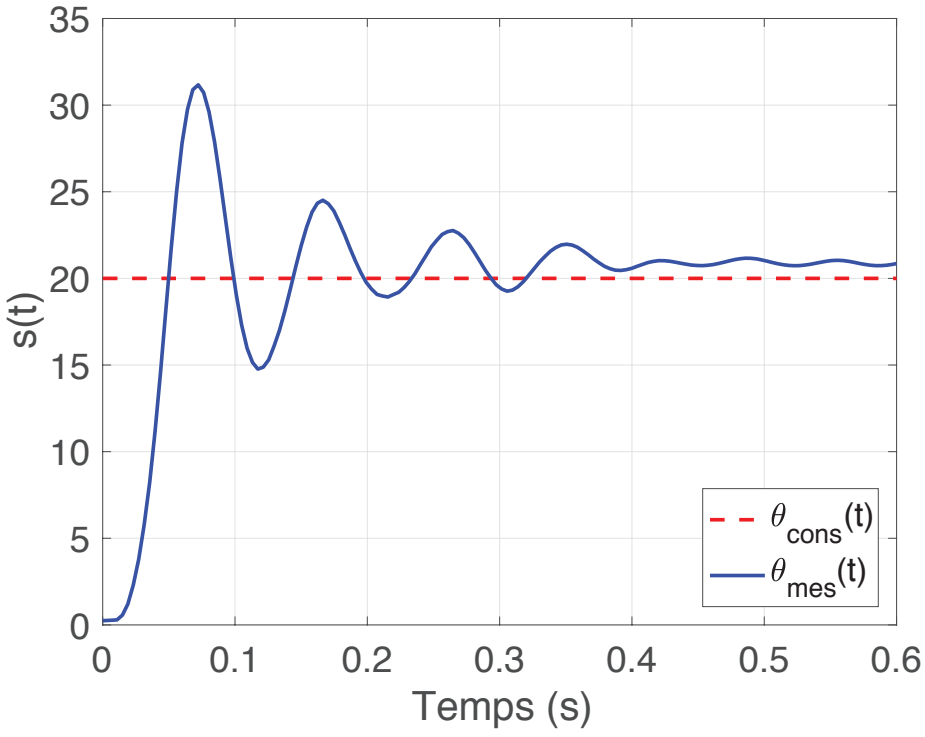


FIGURE 2 – Abaque : temps de réponse réduit en fonction du coefficient d'amortissement

Exemple 4 : ***Identification de la boucle ouverte de la nacelle***

En se référant au schéma bloc présenté précédemment, on a sollicité la nacelle en boucle ouverte avec $\theta_{cons} = 20°$, on a réglé le correcteur tel que $C_2(p) = K_p = 1850$.
On trouve le relevé ci-dessous :



Exemple 5 : *Identification de la boucle ouverte de la nacelle*

Déterminer la fonction de transfert

- **Ordre de la fonction de transfert :**

La tangente à l'origine et le dépassement nous laisse supposer que l'on a au moins un second ordre avec $\xi < 1$:

$$H_{BO}(p) = \frac{K_p \cdot K_m}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

- **Gain statique :**
  - On mesure $s_\infty \approx 20,83°$;
  - On en déduit $K_p \cdot K_m \cdot e_0 = 20,83°$, d'où :

$$\boxed{K_m = \frac{20,83°}{K_p \cdot e_0} = \frac{20,83°}{1850 \cdot 20} = 5,63 \cdot 10^{-4}}$$

- **Coefficient d'amortissement ξ :**
  - On mesure $D = 10.3°$, d'où $D_1 = \frac{D}{s_\infty} = 0,5$
  - On en déduit ξ avec :

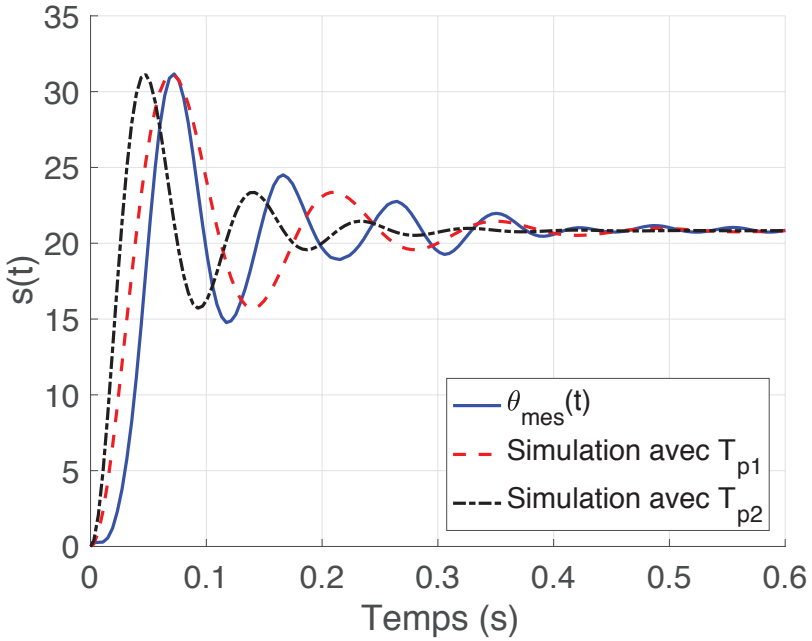
$$\xi = \frac{|ln(D_1)|}{\sqrt{\pi^2 + (ln(D_1))^2}} \approx 0,22$$

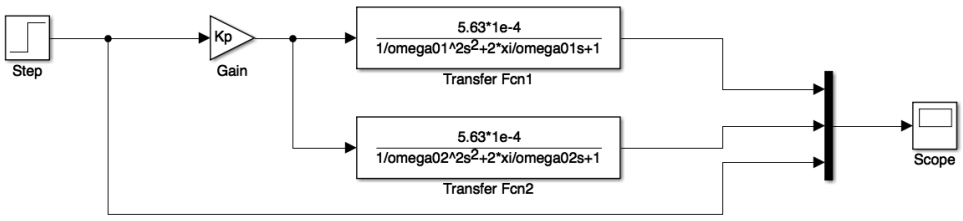
Exemple 6 : *Identification de la boucle ouverte de la nacelle*

- On peut déterminer la **pseudo-période** avec deux méthodes (notés respectivement T_{p1} et T_{p2}) :
  - Avec $T_{p1} = 2 \cdot t_{pic} \approx 2 \times 0,07 = 0,14$
  - l'écart entre 4 maximum : $T_{p2} \approx \frac{0,84-0,07}{3} = 0,09$
- On en déduit deux valeurs de **pulsations propres** admissibles :
  - $\omega_{01} = \frac{2\pi}{T_{p1}\sqrt{1-\xi^2}} \approx 46 rad/s$;
  - $\omega_{02} = \frac{2\pi}{T_{p2}\sqrt{1-\xi^2}} \approx 69 rad/s$.

Exemple 7 : *Comparaison entre la mesure réelle et les simulations*

On réalise deux simulations avec ω_{01} et ω_{02}.





On remarque que :

- la simulation avec T_{p1} fait bien coïncider le temps pic mais pas les autres dépassements.
- la simulation avec T_{p2} fait bien coïncider les durées entre chaque dépassements mais pas le temps pic.

On pourrait interpréter cet écart entre réel et simulation par un retard. Une **étude fréquentielle** permettrait d'affiner le modèle.

3 Identification dans le domaine fréquentiel

Système du premier ordre

- **Tracé du diagramme asymptotique en gain** :
  - tangente horizontale en $\omega \longrightarrow 0$ d'équation $20 \cdot log(K)$;
  - tangente oblique en $\omega \longrightarrow +\infty$ de pente $-20dB/decade$ coupant la première asymptote en $\omega = 1/\tau$ (**pulsation de cassure**)
- **Pulsation de coupure ω_c :**

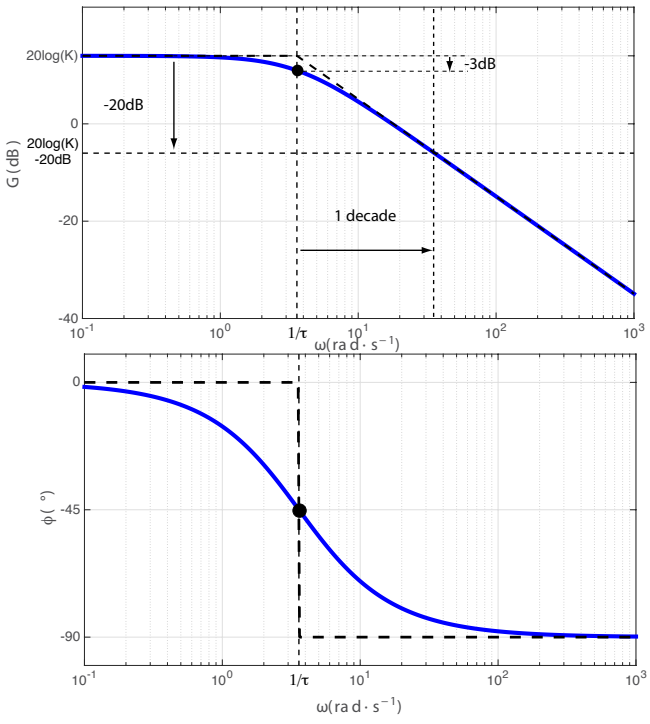
$$\boxed{|H(j\,\omega_c)| = \frac{|H(j\,\omega)|_0}{\sqrt{2}}.} \qquad (2)$$

où $|H(j\,\omega)|_0$ est le module de la fonction de transfert $H(j\,\omega)$ lorsque ω tend vers 0.
On trouve que le gain de coupure :

$$\boxed{G_{dB}(\omega_c) = 20\,log(K) - 20log(\sqrt{2}) \simeq 20\,log(K) - 3dB} \qquad (3)$$

Pour un premier ordre, $\omega_c = \frac{1}{\tau}$.

- **Calcul de la phase de $H(j\,\omega)$:** $\varphi(\omega) = -arctan(\tau\,\omega)$
- **Tracé du diagramme asymptotique en phase :**
  - $\omega \longrightarrow 0 : \varphi(\omega) = \underset{\omega \to 0}{\longrightarrow} 0$
  - $\omega \longrightarrow +\infty : \varphi(\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$

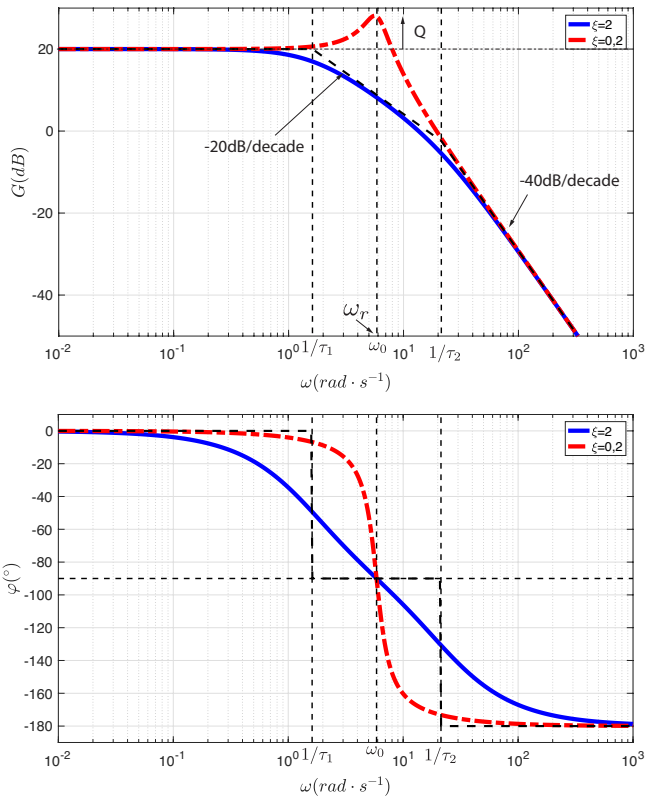


Système du second ordre

- **Tracé du diagramme asymptotique en gain** :
  - tangente horizontale en $\omega \longrightarrow 0$ d'équation $20 \cdot log(K)$;
  - tangente oblique en $\omega \longrightarrow +\infty$ de pente $-40dB/decade$ coupant la première asymptote en $\omega = \omega_0$ (**pulsation propre**)
- **Tracé du diagramme en gain** :
  - Lorsque $\xi > 1$ il existe deux autres pulsations de cassure en $1/\tau_1$ et $1/\tau_2$ avec une branche asymptotique intermédiaire de $-20dB/decade$.
  - Lorsque $\xi < \sqrt{2}/2$, il y a existence de résonance (maximum en gain) en $\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$. On appelle le **facteur de résonance ou coefficient de surtension** la grandeur Q définie par :

$$\boxed{Q = \frac{|H(j\,\omega)|_{max}}{\lim\limits_{\omega \to 0} |H(j\,\omega)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}.} \qquad (4)$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en phase :**
  - $\omega \longrightarrow 0 : \varphi(\omega) = \underset{\omega \to 0}{\longrightarrow} 0$
  - $\omega \longrightarrow +\infty : \varphi(\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} -\pi$



Propriété 1 : *Identification dans le cas d'une fonction de transfert plus complexes*

Dans le cas où la fonction de transfert est est une combinaison d'un premier ordre, un second ordre, un intégrateur, un dérivateur et un retard il convient d'identifier :

- la **classe** α sur le diagramme de phase :

$$\boxed{\varphi(\omega) \underset{\omega \to 0}{\longrightarrow} -\alpha \times \frac{\pi}{2}} \tag{5}$$

- Si la phase admet une tangente horizontale pour $\omega \to \infty$, la fonction de transfert n'admet pas de retard et on obtient son ordre avec :

$$\begin{cases} \varphi(\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} = -n \times \frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha \geq 0 \\ \varphi(\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} = -(n+\alpha) \times \frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha < 0 \end{cases} \tag{6}$$

- Si la phase n'admet pas de tangente horizontale pour $\omega \to \infty$, la fonction de transfert admet un retard et on obtient son ordre avec le tracé en gain :
  En $\omega \to \infty$ $G_{dB}(\omega)$ admet une branche asymptotique de $-n \times 20dB/decade$ (si $\alpha \geq 0$) et $-(n+\alpha) \times 20dB/decade$ (si $\alpha > 0$) .
- Par ailleurs pour $\omega \to 0$, $G_{dB}(\omega)$ admet une branche asymptotique de $-(\alpha) \times 20dB/decade$.

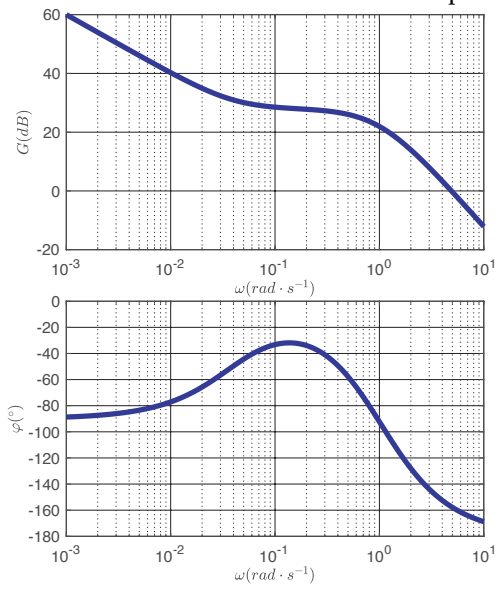
Remarque 2 :

Attention cette méthode ne fonctionne que si la phase est **strictement décroissante**.
Si ce n'est pas le cas cela veut dire que le numérateur de la fonction de de transfert dépend de p.

$$H(p) = \frac{(1+\tau p)}{p\left(1 + \frac{2\xi_1 p}{\omega_{01}} + \frac{p^2}{\omega_{01}^2}\right)}$$

Avec,

$$\begin{cases} \xi_1 = 0.01 \\ \omega_{01} = 1 rad/s \\ \tau = \frac{1}{0.04} s \end{cases}$$



Propriété 2 : *Comportement fréquentiel d'un retard*

La fonction de transfert d'un retard pur est :

$$\boxed{H(p) = e^{-\tau \cdot p}} \quad (7)$$

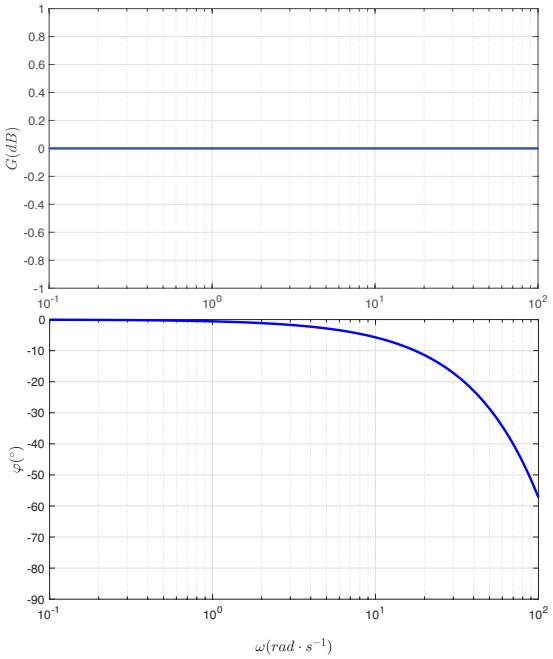
Ainsi :

- Le gain en dB est constant et nul :

$$\boxed{G_{dB}(\omega) = 0dB} \quad (8)$$

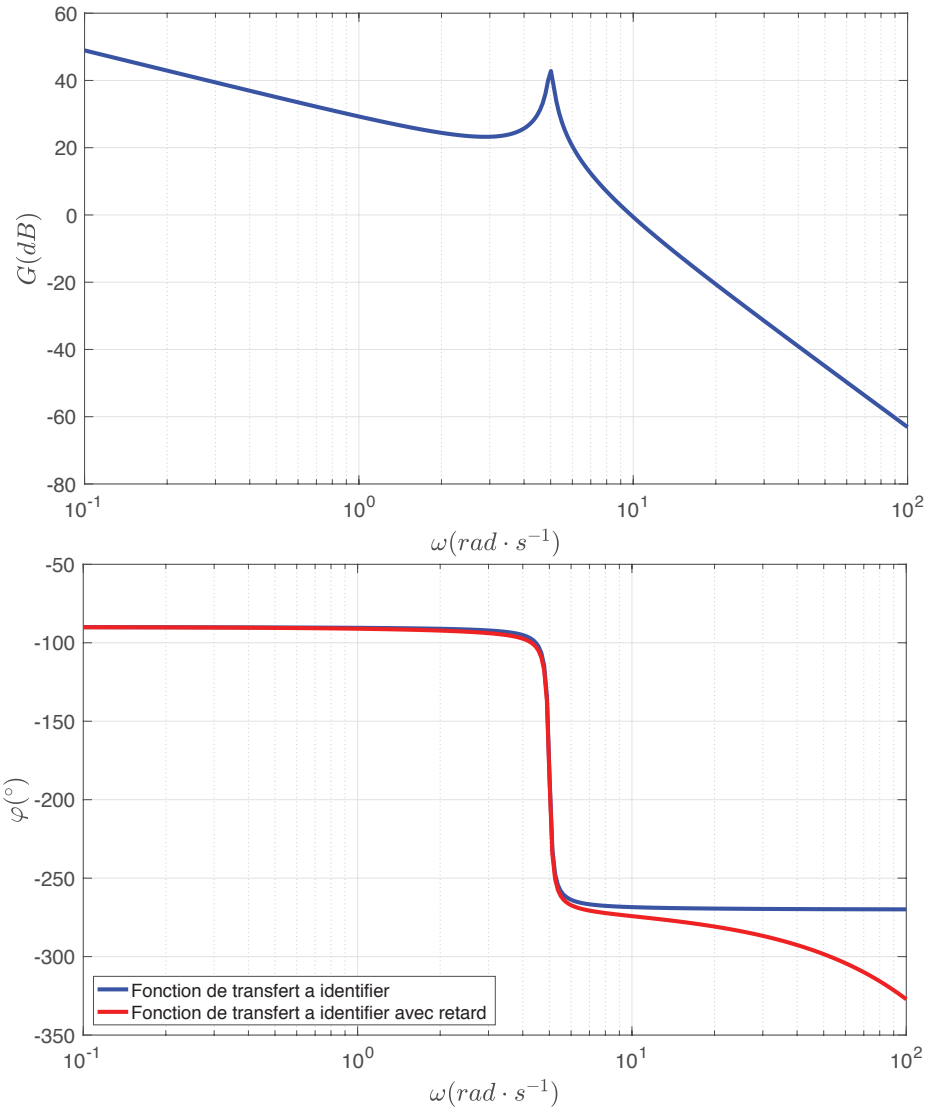
- La phase est décroissante :

$$\boxed{\varphi(\omega) = -\tau \cdot \omega} \quad (9)$$



Exemple 8 : *Identification d'une fonction de transfert*

On donne le tracé du diagramme de Bode d'une fonction de transfert $G(p)$. Déterminer ses caractéristiques :

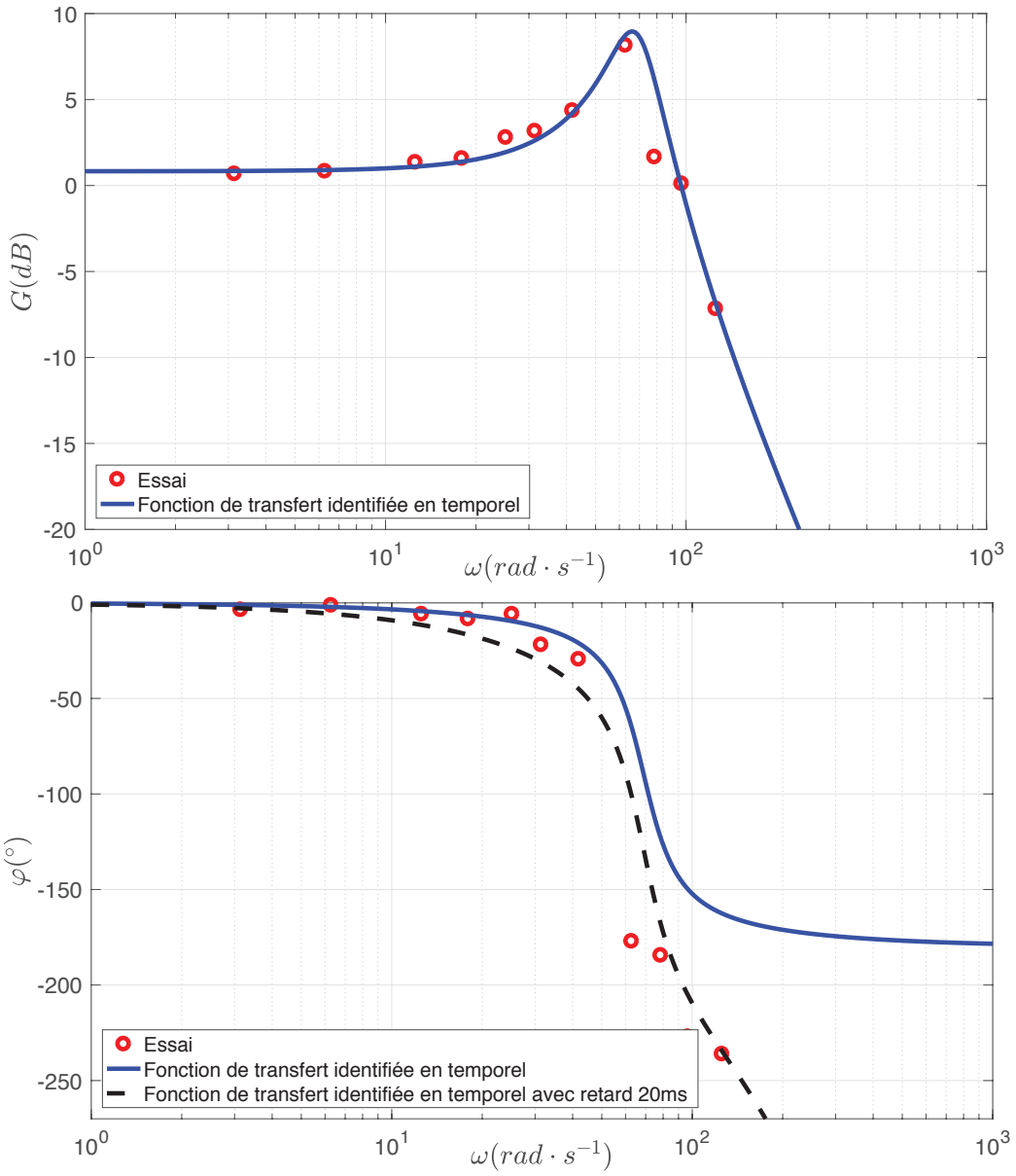


On doit trouver :

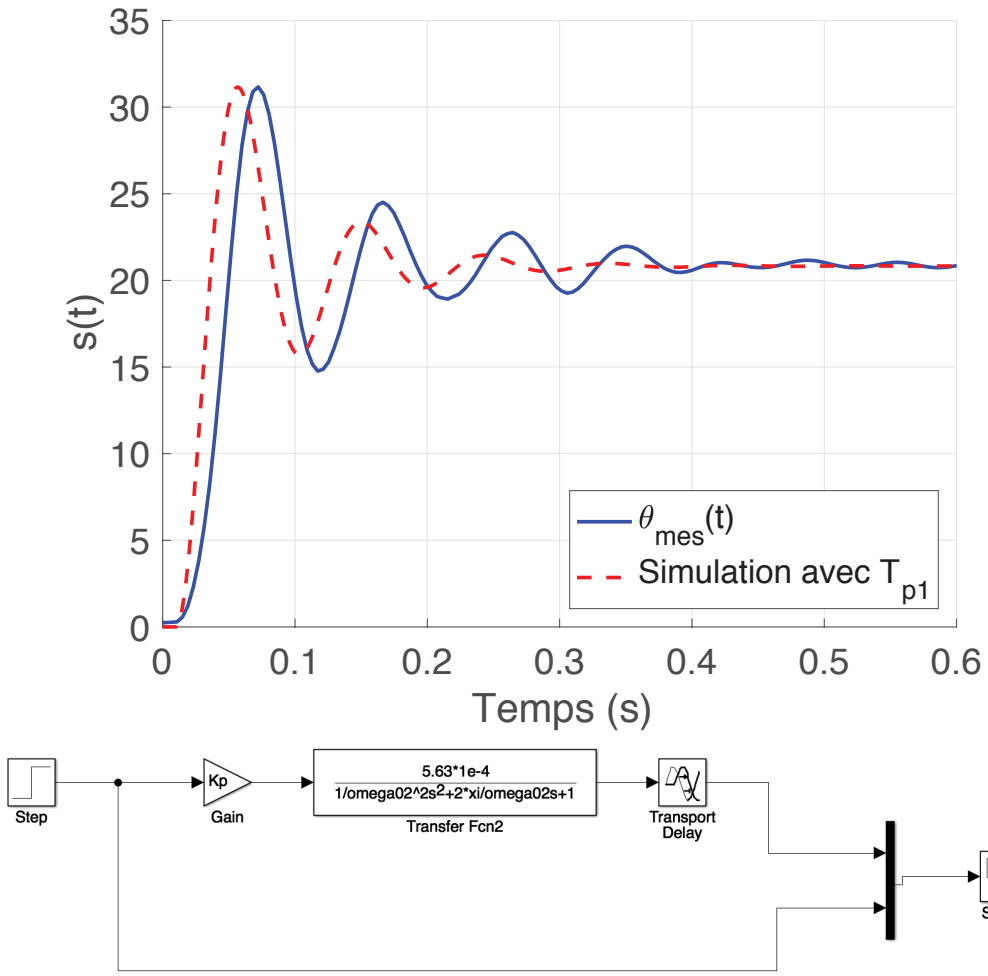
- Classe 1 ;
- Ordre 3 ;
- Résonance ;
- $Q_dB = 28dB$;
- $\xi = 0.02$;
- $K = 25$:

$$G(p) = \frac{K}{p\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Exemple 9 : ***Tracer du diagramme de Bode de la nacelle***



Exemple 10 : ***Résultats de la simulation avec prise en compte du retard***



III. Traitement à partir de données

Exemple 11 : ***Application***

On souhaite ici filtrer les données numériques issues de la centrale inertielle de la nacelle de drone.

1 Traitement de fichier de données

Propriété 3 :

Les mesures sont données dans un fichier **mesures_drone.csv**.
Il contient 3 colonnes : Temps ; angle potentiomètre ; angle accéléromètre ; Gyrometre.
Q1 : Donner la suite d'instructions pour visualiser le fichier et extraire les 3 colonnes de mesures et celle du temps dans 3 variables : `tp`, `gyro`, `acc`, `potentiometre`.

```
temps;APEG;AAT;TV
temps;Angle Pivot;Angle Acc X;Gyrometre
961.321;-140;-66;0
961.326;-200;-267;-6
961.332;-160;-133;0
961.337;-140;-66;0
961.343;-160;-133;0
961.348;-140;-133;2
961.354;-140;-133;4
961.359;-160;-133;0
```

```
tp=[]
angle_pivot=[]
angle_acc=[]
gyro=[]
with open('mesure_drone.csv',encoding='utf8') as f:
    ligne=f.readline()
    ligne=f.readline()
    ligne=f.readline()
    while '' !=ligne:
        ligne=ligne.strip()
        t,ap,aa,g=ligne.split(';')
        tp.append(float(t))
        angle_pivot.append(float(ap))
        angle_acc.append(float(aa))
        gyro.append(float(g))
        ligne=f.readline()
```

2 Analyse de données : moyenne et écarts type

Le calcul de la moyenne arithmétique des nombres d'une liste est donné par :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Le calcul de la variance des nombres d'une liste est donné par :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Le calcul de l'écart type des nombres d'une liste est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

3 Traitement des données

a) Dérivation numérique

Définition 2 : *Dérivation numérique*

La méthode de dérivation consiste à approximer la dérivée par son taux d'accroissement. On utilise pour cela une discrétisation temporelle et l'on notera les piquets de temps t_i.

$$\frac{df(t_{i+1})}{dt} \approx \frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Propriété 4 : *Implémentation de la dérivation numérique*

Q2 : Donner la suite d'instructions pour calculer la dérivée par rapport au temps d'une grandeur que l'on notera `derive_tp(tp:list,y:list)->list`.

```
def deriv(L,T):
    n=len(L)
    S=[0]
    for i in range(1,n-1):
        S.append((L[i+1]-L[i])/(T[i+1]-T[i]))
    S.append(S[n-2])
    return(S)
```

b) Intégration numérique

Définition 3 : *Méthode des trapèzes*

La méthode de d'intégration numérique consiste à approximer l'intégrale sous la courbe représentative de f sur un intervalle $[t_i,]$ par un trapèze.

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \cdot dt \approx \frac{1}{2}\left(f(t_i) + f(t_{i-1})\right) \cdot (t_i - t_{i-1}) = \frac{Te}{2}\left(f(t_i) + f(t_{i-1})\right)$$

Propriété 5 : *Implémentation de l'intégration numérique*

```
def T(f,t,i):
    """Approximation de l'intégrale de ti-1 àti de f
    return 0.5*(t[i]-t[i-1])*(f[i]+f[i-1])
```

4 Filtrage des données

a) Moyenne glissante

Définition 4 : *Moyenne glissante*

La moyenne glissante est une moyenne qui au lieu d'être calculée sur l'ensemble des n valeurs d'un échantillonnage, est calculée tour à tour sur chaque sous-ensemble de N valeurs consécutives ($N \leq n$) ; le sous-ensemble utilisé pour calculer chaque moyenne « glisse » sur l'ensemble des données. On appelle N, l'ordre de la moyenne glissante.
Par exemple, le tableau suivant montre les moyennes mobiles simples sur 3 valeurs, pour une série de 9 mesures.

Mesures	2	3	5	8	8	7	8	5	2
Moyennes glissantes	néant	néant	(2 + 3 + 5)/3 3,3333	(3 + 5 + 8)/3 5,3333	(5 + 8 + 8)/3 7	(8 + 8 + 7)/3 7,6666	(8 +7 + 8)/3 7,6666	(7 + 8 + 5)/3 6,6666	(8 + 5 + 2)/3 5

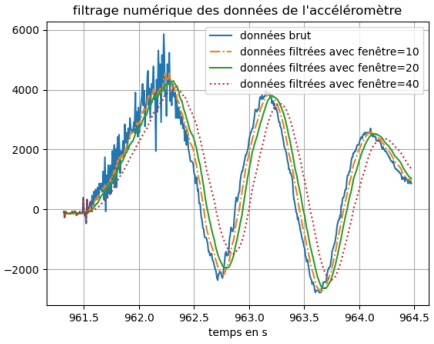
Une formule permettant de calculer une moyenne mobile est :

$$\overline{x_n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k} \text{ ou } \overline{x_n} = \overline{x}_{n-1} + \frac{x_n - x_{n-N}}{N}$$

Exemple 12 : *Mise en oeuvre de la méthode*

Q3 : Ecrire une fonction filtre_mg(L,N) qui prend en argument une liste L ainsi que l'ordre de la moyenne glissante N et qui retourne la liste L filtrée.

```
def filtre_mg(l,N):
    res = [0]*(len(l))
    for i in range(len(l)):
        res[i]= l[i]
    for i in range(N,len(l)):
        res[i]=(sum(l[i-j] for j in range (N))/N)
    return(res)
```



b) filtres numériques

Définition 5 : *Filtre numérique passe bas du premier ordre*

Un filtre numérique du premier ordre permet de filtre un signal $e(t)$ en un signal $s(t)$ avec la fonction de transfert suivante :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+\tau \cdot p}$$

Cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre.
Le filtrage numérique consiste à approximer les relations de dérivées par leur taux d'accroissement comme on l'a vu précédemment. O

Exemple 13 : *Mise en oeuvre de la méthode*

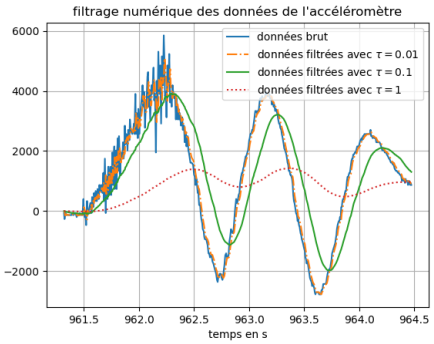
Q4 : Donner l'équation différentielle reliant $s(t)$ à $e(t)$ dans le cas d'un filtre du premier ordre.
$\tau \frac{\mathrm{ds(t)}(t)}{\mathrm{dt}} + s(t) = e(t)$

Q5 : Écrire la relation de récurrence qui permet d'obtenir la liste LF (valeurs viltrées) à partie de la liste `L` (valeurs non filtrées) en utilisant la méthode d'Euler explicite.

$$\mathrm{LF}_{i+1} = \frac{\mathrm{dt}}{\tau} L_i + \left(1 - \frac{\mathrm{dt}}{\tau}\right) \mathrm{LF}_i$$

Q6 : Ecrire la fonction filtre(L,tau,T) qui prend en argument deux listes de même taille L et T ainsi qu'un réel tau et qui renvoie la liste L filtrée. Tracer la courbe. La valeur de τ sera prise égale au pas d'échantillonnage.

```
def filtre(L,tau,T):
    n=len(T)
    dt=T[1]-T[0]
    h=dt/tau
    S=[0]*n
    for i in range(0,n-1):
        S[i+1]=(h*L[i]+(1-h)*S[i])
    return(S)
```



5 Régression linéaire par la méthode des moindres carrés

a) Cadre

Dans beaucoup de contextes scientifiques, il est fréquent qu'on soit dans la situation suivante.

- On modélise qu'une valeur b dépend linéairement de paramètres $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$: il existe des constantes $C_1, \ldots, C_q$ telles que pour toute valeur des paramètres et toute valeur de b associée

$$b = \sum_{k=1}^{q} C_k \alpha_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_q \end{pmatrix}.$$

- On a mesuré des valeurs $b_1, \ldots, b_p$ et $(a_{11}, \ldots, a_{1q}), \ldots, (a_{p1}, \ldots, a_{pq})$ les valeurs associées des paramètres.
- On aimerait « connaître » $C_1, \ldots, C_q$.

On a dispose de p mesures pour estimer q paramètres.

On suppose $p \geq q$ (sinon on n'arrivera pas à connaître tous les paramètres sans effectuer d'hypothèses supplémentaires). En fait, on demande même plutôt $p > q$ (voire même de plusieurs facteurs), pour voir si ce modèle linéaire est réaliste, pour essayer de réduire l'effet des erreurs (aléatoires) de mesure *etc.*

Il s'agit de résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix},$$

d'inconnues $C_1, \ldots, C_q$.

En pratique, on n'arrivera pas à résoudre ce système, pour plusieurs raisons.

1. Erreurs de mesure : il n'y a pas de solution alors que la relation était correcte.
2. La modélisation linéaire n'est en général qu'une approximation (on parle bien de « modèle »).

Pour s'en sortir, on change de point de vue :

Ne pas chercher à *résoudre*

$$Ax - b$$

mais plutôt à *minimiser*

$$\|Ax - b\|.$$

On prendra la norme 2 (c'est le plus facile et les résultats ont souvent une interprétation naturelle). Ainsi, on minimise le carré des écarts de Ax à b. D'où le nom : «Méthode des moindres carrés».

b) Résolution par projection orthogonale

Trouver x tel que $\|Ax - b\|$ soit minimale revient à trouver un élément de $\mathrm{Im}A$ dont la distance à b est minimale.

Or la distance de b à un sous-espace vectoriel en dimension finie, est atteinte en le projeté orthogonal de b sur ce sev. Notons

$$\hat{b} = Ax_0$$

le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}A$. Alors pour tout x,

$$(Ax | b - \hat{b}) = 0,$$

soit

$$x^T A^T (b - Ax_0) = 0,$$

i.e.

$$A^T (b - Ax_0) = 0.$$

Ainsi, le vecteur x_0 recherché est la solution du système

$$A^T A x_0 = A^T b.$$

Sous des hypothèses raisonnables, $A^T A$ est inversible donc il existe une unique solution.

Exemple 14 : *Régression linéaire sur des données de température*

On note t^C la température en degrés Celsius et t^F celle en degrés Farenheit. On sait qu'il existe α, β tels que $t^F = \alpha + \beta t^C$.
On dispose de deux thermomètres : un en degrés Celsius, l'autre en degrés Farenheit, et l'on veut déterminer α et β.
On effectue 14 relevés de température : $a = (t_1^C, \cdots, t_{14}^C)$ et $b = (t_1^F, \cdots, t_{14}^F)$.
On note A la matrice 14×2 dont la première colonne ne contient que des 1, et la seconde colonne est b.
En théorie

$$A \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = b,$$

mais la relation n'est pas exacte ici (à cause des erreurs de mesure, notamment).
On cherche donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\|AX - b\|$ soit minimale. D'après la partie précédente, on sait qu'il convient de résoudre le système

$$A^T A \times X = A^T b.$$

```
from numpy import array, transpose
A = array([[1. , -40.],
           [1. , -35.5],
           [1. ,  -30.5],
           [1. ,  -25.5],
           [1. , -20.5],
           [1. ,  -15.5],
           [1. ,  -10.5],
           [1. , -5.5],
           [1. ,  -0.5],
           [1. ,  4.5],
           [1. , 19.5],
           [1. ,  34.5],
           [1. ,  44.5],
           [1. ,  49.5]])
b = array([[-39.67],
           [-32.68],
           [-23.81],
           [-13.61],
           [-3.76],
           [5.38],
           [12.50],
           [24.28],
           [32.57],
           [38.78],
           [66.65],
           [93.18],
           [111.88],
           [121.52]])

%At = transpose(A)
%At
%At.dot(A)
%At.dot(b)
```

Il nous reste à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 14 & -31.5 \\ -31.5 & 11236.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 393.21 \\ 19215.61 \end{pmatrix}.$$

Utilisons les outils de numpy pour résoudre ce système.

```
from numpy.linalg import solve
X = solve(At.dot(A),At.dot(b))
X
```

Ainsi, $t^F \approx 32.1 + 1.8\,t^C$ (voir figure 3).

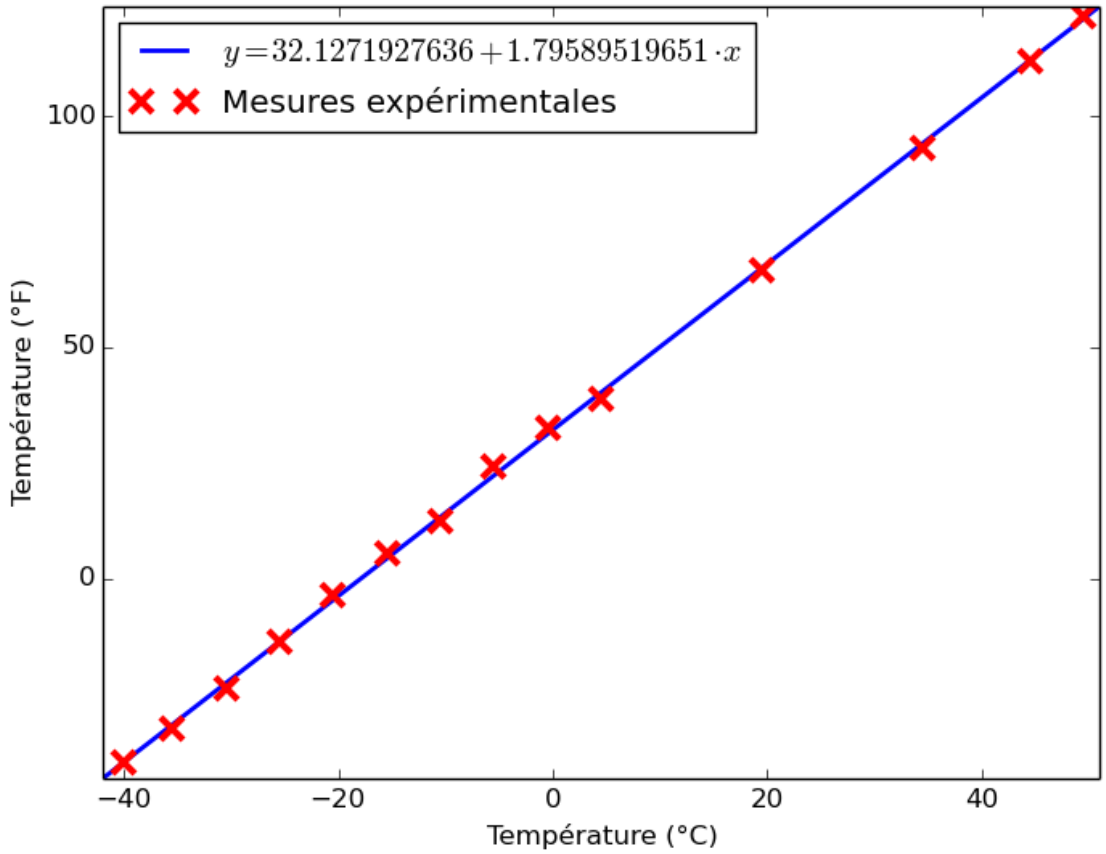


FIGURE 3 – Régression linéaire par moindres carrés entre les degrés Celsius et Farenheit.