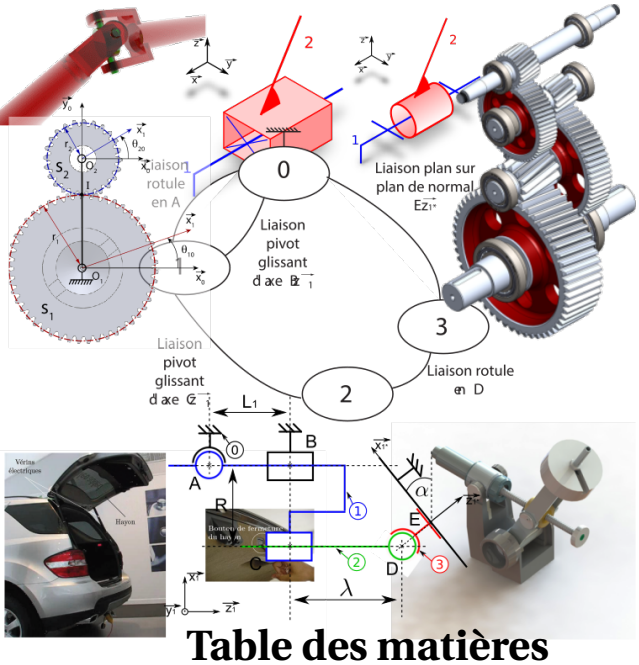




LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2026 - 2027

C3 : MODÉLISATION DES CHAÎNES DE SOLIDE : LOIS ENTRÉES/SORTIES ET CONTRAINTES GÉOMÉTRIQUES

C3-3 - Détermination de lois d'entrée sortie en statique et cinématique

9 Novembre 2026

Vidéo 1 Vidéo 2 Vidéo 3

Table des matières

I Rappels sur la mécanique du contact 2
1 Modélisation cinématique des contacts 2
a) Paramétrage 2
b) Vitesse de glissement/RSG 2
c) Vitesse de roulement/pivotement 2
2 Modélisation des actions de frottements 3
a) Modélisation 3
b) Lois de Coulomb 3
c) Direction et sens 4
d) Interprétations graphiques 4
II Lois E/S cinématiques d'un mécanisme 5
1 Lois d'entrées sorties géométriques 5
2 Lois d'entrées sorties cinématiques 6
3 Cas des transmissions par engrenages 6
a) Modélisation 6
b) Réalisation technologique 8
4 Autres transformation de mouvement 14
a) Vis-écrou 14
b) Pignon-crémaillère 15
c) Transmission par came 16
d) Transmission par bielle-manivelle 17
e) Joints de transmission 18
III Résolution numérique et cinématique 18
1 Méthode de dichotomie 19
a) Principe de la méthode 19
b) Implémentation 19
2 Méthode de Newton 20
a) Définition 20
b) Implémentation 21
3 Calcul approché de la dérivée 21
4 Méthode de la sécante 21
IV Lois d'entrée-sortie en statique 23
1 Équilibre et PFS 23
2 Théorèmes généraux 23
3 Méthodologie de résolution 24
4 Résolution numérique 25
a) Problème à résoudre 25
b) Méthode de résolution 25

Compétences

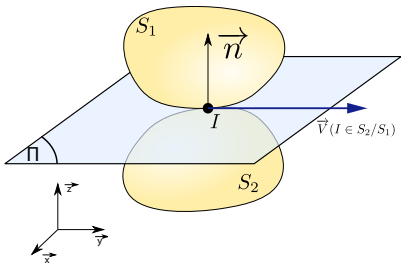
- **Analyser**
  - Analyser les performances et les écarts
- **Modéliser**
  - Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.
  - Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.
  - Modéliser une action mécanique.
- **Résoudre**
  - Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique.
  - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
  - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.
  - Mener une simulation numérique.
  - Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations.
- **Communiquer**
  - Lire et décoder un document technique.
  - Effectuer une synthèse des informations disponibles dans un dossier technique.
  - Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.
  - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

I. Rappels sur la mécanique du contact

1 Modélisation cinématique des contacts

a) Paramétrage

- Soient deux solides S_1 et S_2 **en contact** pendant leur mouvement dans un repère R_0 .
- Soit I un point de la zone de contact (on notera que la zone de contact sera souvent ramenée à cet unique point I).
- Soit Π le plan tangent au contact (i.e. tangent aux deux solides au point de contact).
- Soit $\vec{n}$ la normale à ce plan.



Solides en contact, de plan tangent Π.

b) Vitesse de glissement/RSG

Définition 1 : *vitesse de glissement/roulement sans glissement*

- On appelle **vitesse de glissement** au point I, de S_2 par rapport à S_1 le vecteur vitesse du point I dans le mouvement de S_2 par rapport à S_1 :

$$\boxed{\vec{V}(I \in S_2/S_1).} \tag{1}$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point I si :

$$\boxed{\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0}} \tag{2}$$

  Dans ce cas, on dit que S_2 "*roule sans glisser*" sur S_1.
- $\vec{V}(I \in S_2/S_1)$ est contenu dans le plan Π (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- **Décomposition** :

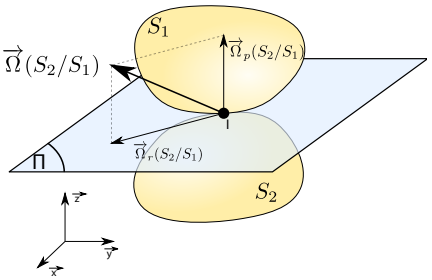
$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R_0) - \vec{V}(I \in S_1/R_0)$$

c) Vitesse de roulement/pivotement

Définition 2 : *Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement*

Soit $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ le vecteur vitesse de rotation de S_2 par rapport à S_1. On peut décomposer $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ en la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}} \tag{3}$$



où :

- $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ est le **vecteur vitesse de rotation de roulement** de S_2 par rapport à S_1. Il est contenu dans le plan Π.
- $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$ est le **vecteur vitesse de rotation de pivotement** de S_2 par rapport à S_1. Il est normal au plan Π

Remarque 1 :

De manière général, ces deux vecteurs s'obtiennent par :

$$\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}} = \left(\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \cdot \vec{n}\right) \vec{n} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} - \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}} \tag{5}$$

2 Modélisation des actions de frottements

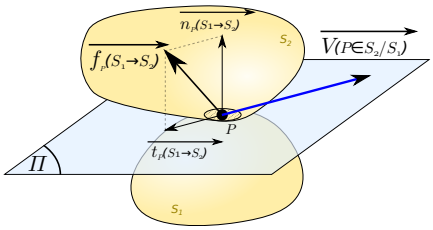
a) Modélisation

Définition 3 :

Soit deux solides (ou ensembles) S_1 et S_2, en contact. Soit P un point appartenant à la zone de contact, tel que l'action répartie au point P est :

$$\boxed{\overrightarrow{f_p(S_1 \to S_2)} = \overrightarrow{n_p(S_1 \to S_2)} + \overrightarrow{t_p(S_1 \to S_2)}} \tag{6}$$

où $\overrightarrow{n_p(S_1 \to S_2)}$ et $\overrightarrow{t_p(S_1 \to S_2)}$ sont respectivement les pressions normales et tangentielles.



b) Lois de Coulomb

Définition 4 : *Lois de Coulomb*

Adhérence $\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}$ **:**

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{t_p(S_1 \to S_2)}\right\| \leq f^* \left\|\overrightarrow{n_p(S_1 \to S_2)}\right\|} \tag{7}$$

Glissement $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$ **:**

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{t_p(S_1 \to S_2)}\right\| = f \left\|\overrightarrow{n_p(S_1 \to S_2)}\right\|.} \tag{8}$$

f et f^* sont respectivement appelés **coefficient de frottement et d'adhérence** entre S_1 et S_2.

Remarque 2 :

- En réalité, le coefficient d'adhérence est légèrement supérieur au coefficient de frottement : $f^* > f$. Mais dans la pratique de la modélisation, on considèrera généralement $f^* = f$.
- Le modèle ci-dessus concerne les frottements dits "*frottements secs*", par opposition aux "*frottements visqueux*" faisant intervenir la vitesse de déplacement.
- f dépend du couple de matériaux en contact, mais aussi de la lubrification, de la température, de l'état de surface...

Couples matériaux	acier/acier	acier/coussinet	fonte/ garniture de freins	pneus/route sèche	contact sans frottement
f	0,1 à 0,2	0,03 à 0,2	0,4	0,6 à 0,7	0

c) Direction et sens

Définition 5 : *Sens et direction de l'action tangentielle*

La condition sur le sens de l'action tangentielle peut se traduire mathématiquement sous la forme des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{t_p(S_1 \to S_2)} \wedge \vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0} \\ \overrightarrow{t_p(S_1 \to S_2)} \cdot \vec{V}(P \in S_2/S_1) < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Ainsi **l'action de S_1 sur S_2 s'oppose au mouvement de S_2 par rapport S_1**.

d) Interprétations graphiques

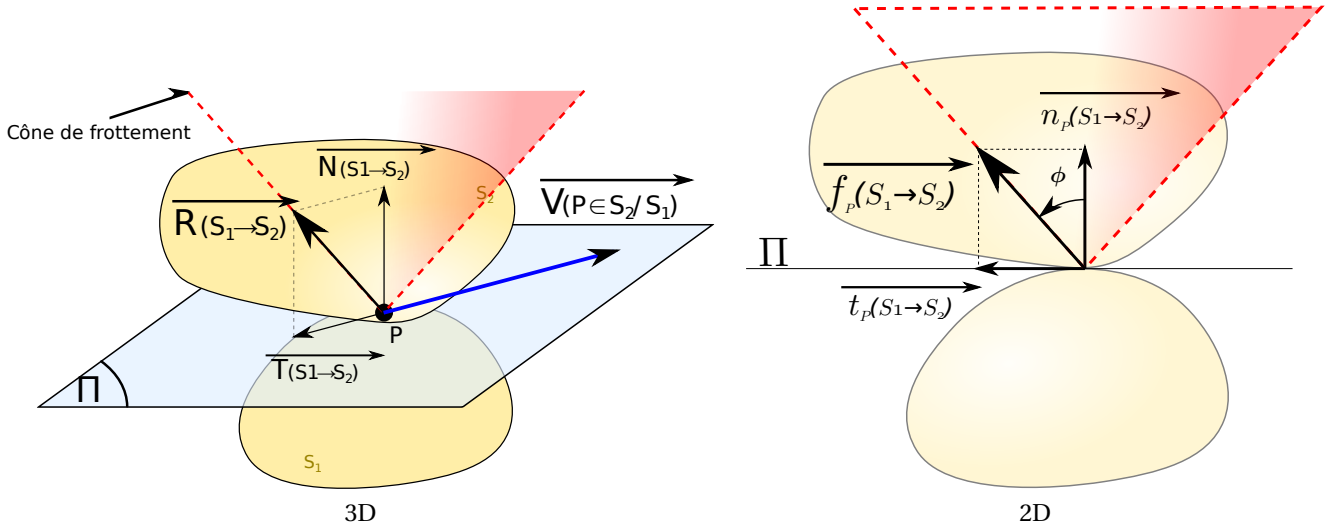


FIGURE 1 – Action mécanique répartie, au point P, sur le cône de frottement.

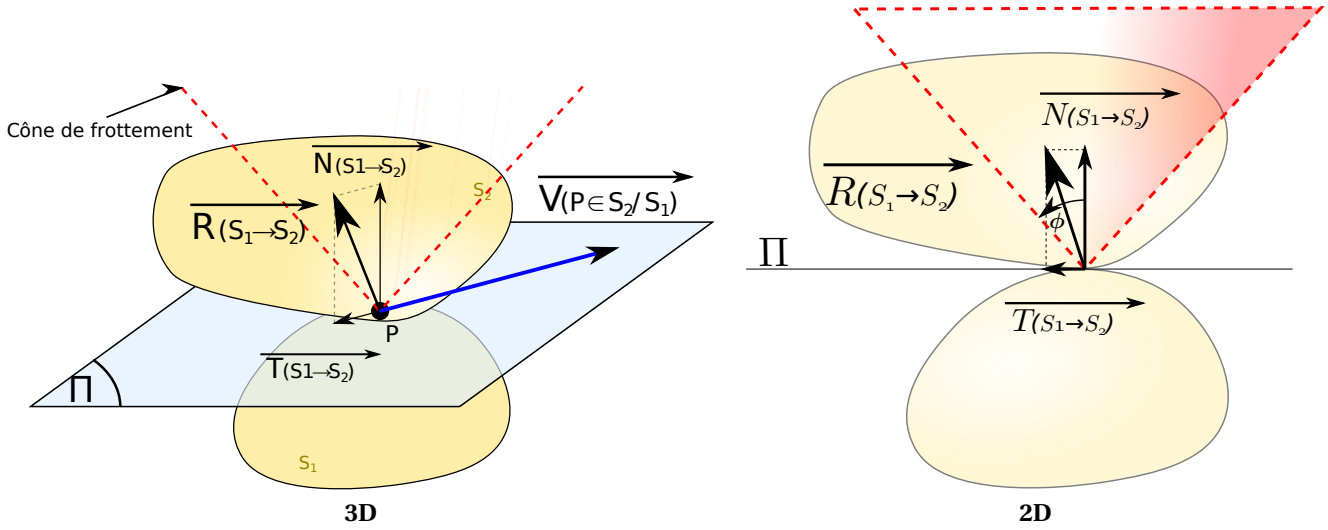


FIGURE 2 – Actions mécaniques résultante **dans** le cône de frottement (cas de l'adhérence).

II. Lois E/S cinématiques d'un mécanisme

1 Lois d'entrées sorties géométriques

Définition 6 : *Fermeture géométrique*

Lorsqu'un système possède une architecture en chaîne fermée, on écrit une relation vectorielle de **fermeture de la boucle géométrique** qui passe par les points caractéristiques O_i des liaisons entre solides. Cette relation vectorielle traduit la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \cdots + \overrightarrow{O_nO_0} = \overrightarrow{0} \tag{10}$$

On projette alors cette relation vectorielle dans une base pour obtenir des relations scalaires entre les paramètres de position ou d'orientation des solides.

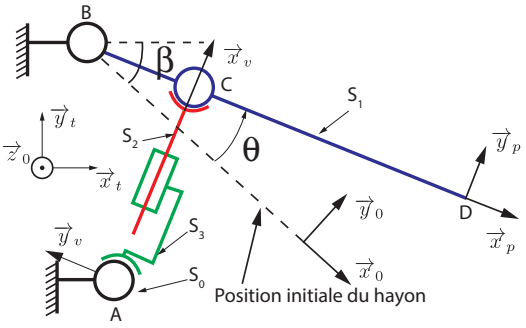
Remarque 3 :

- Cette méthode s'adapte surtout pour les mécanismes plans et/ou pour les mécanismes articulés.
- Pour les chaînes complexes on écrit une relation vectorielle par boucle fermée indépendante.

Exemple 1 : *Hayon automatique*







Fermeture géométrique associée

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}.$$

Ce qui donne

$$\lambda = \sqrt{(c\ \cos\theta - a)^2 + (c\ sin\theta + b)^2}$$

Avec,
$\overrightarrow{AB} = -a\ \overrightarrow{x_0} + b\ \overrightarrow{y_0}$; $\overrightarrow{AC} = \lambda\ \overrightarrow{x_v}$; $\overrightarrow{BC} = c\ \overrightarrow{x_p}$.

2 Lois d'entrées sorties cinématiques

Définition 7 : *Fermeture cinématique*

Lorsqu'un système possède une architecture en chaîne fermée, on écrit une relation "torseurielle" de fermeture de la boucle **cinématique**.

$$\left\{\mathscr{V}_{(S_1/S_n)}\right\} = \left\{\mathscr{V}_{(S_1/S_2)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(S_2/S_3)}\right\} + \cdots + \left\{\mathscr{V}_{(S_{n-1}/S_n)}\right\} \tag{11}$$

On obtient alors deux équations vectorielles (une en vitesse au même point et une en vitesse de rotation) que l'on peut projeter dans une base. Il en résulte un système linéaire d'équations (3 en 2D et 6 en 3D).

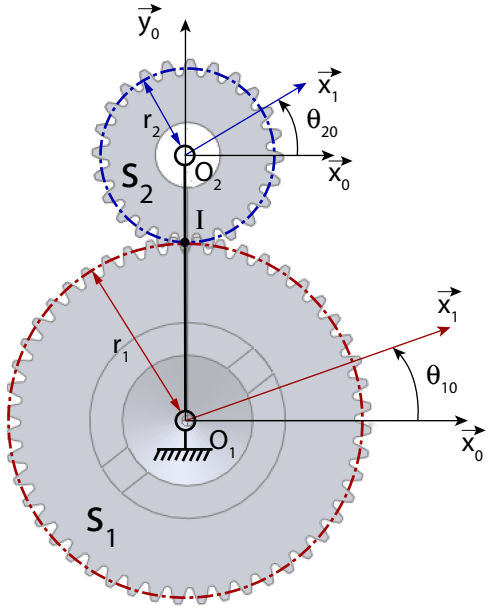
Remarque 4 :

- On discutera de la possibilité ou non de résoudre ce système d'équations dans le chapitre suivant.
- Pour les chaînes complexes on écrit une relation "torseurielle" par boucle fermée indépendante.

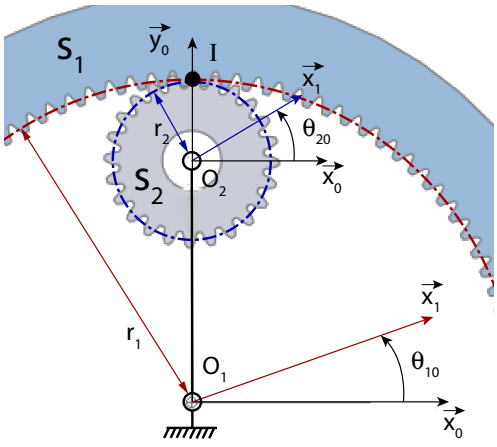
3 Cas des transmissions par engrenages

a) Modélisation

Propriété 1 : *Rapport de réduction pour un train d'engrenage simple*



Contact extérieur



Contact Intérieur

Propriété 1 : *Rapport de réduction pour un train d'engrenage simple*

- **Condition de roulement sans glissement en I**

$$\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_2) = \overrightarrow{0}$$

- **Décomposition de la vitesse de glissement**

$$\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_2) = \overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) - \overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0)$$

- **Calcul de $\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0)$ et $\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0)$:**

Contact extérieur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) &= \\ \overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) + \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) &\\ = \overrightarrow{0} - r_1 \cdot \overrightarrow{y}_0 \wedge \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{z}_0 &\\ = -r_1 \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{y}_0 &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0) &= \\ \overrightarrow{V}(O_2 \in S_2/S_0) + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_0) &\\ = \overrightarrow{0} + r_2 \cdot \overrightarrow{y}_0 \wedge \dot{\theta}_{20} \cdot \overrightarrow{z}_0 &\\ = r_2 \cdot \dot{\theta}_{20} \cdot \overrightarrow{y}_0 &\end{aligned}$$

Contact intérieur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) &= \\ \overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) + \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) &\\ = \overrightarrow{0} - r_1 \cdot \overrightarrow{y}_0 \wedge \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{z}_0 &\\ = -r_1 \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{y}_0 &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0) &= \\ \overrightarrow{V}(O_2 \in S_2/S_0) + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_0) &\\ = \overrightarrow{0} - r_2 \cdot \overrightarrow{y}_0 \wedge \dot{\theta}_{20} \cdot \overrightarrow{z}_0 &\\ = -r_2 \cdot \dot{\theta}_{20} \cdot \overrightarrow{y}_0 &\end{aligned}$$

- **Relation entre $\dot{\theta}_{10}$, $\dot{\theta}_{10}$, r_1 et r_2.**

Contact extérieur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) - \overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0) &= \overrightarrow{0} \\ \Rightarrow & \\ -r_1 \cdot \dot{\theta}_{10} - r_2 \cdot \dot{\theta}_{20} &= 0\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = -\frac{r_2}{r_1}}$$

Contact intérieur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) - \overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0) &= \overrightarrow{0} \\ \Rightarrow & \\ -r_1 \cdot \dot{\theta}_{10} + r_2 \cdot \dot{\theta}_{20} &= 0\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = +\frac{r_2}{r_1}}$$

Remarque 5 :

- Pour que deux roues dentées engrènent, il faut que leur pas de denture et le module (m) soient le même. Or le nombre de dents d'une roue i (noté Z_i) est relié par son rayon (noté r_i) avec la relation :

$$2 \cdot r_i = m \cdot Z_i$$

On obtient ainsi les rapports de réduction :

Contact extérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = -\frac{Z_2}{Z_1}}$$

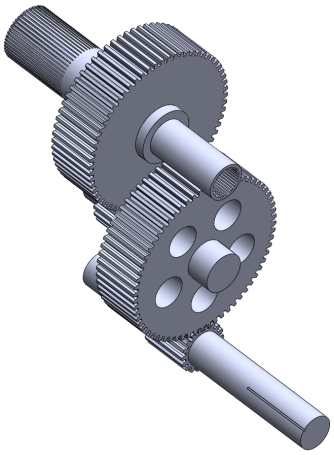
Contact intérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = +\frac{Z_2}{Z_1}}$$

- Ces relations ne sont valables que lorsque l'axe de rotation de chaque roue dentée est fixe par rapport au référentiel d'observation (ici S_0).
- Dans un problème comportant un ensemble de trains d'engrenages simples, on exprimera chaque relation d'engrènement puis on les combinera entre elles pour obtenir une **relation d'entrée-sortie**.
- Dans le cas d'un **train épicycloïdal**, les axes de rotation ne sont fixes que par rapport au porte-satellite, il faudra donc veiller à choisir comme référentiel d'observation celui lié au **porte-satellite**.

b) Réalisation technologique

Définition 8 : *Engrenages à dentures cylindriques*



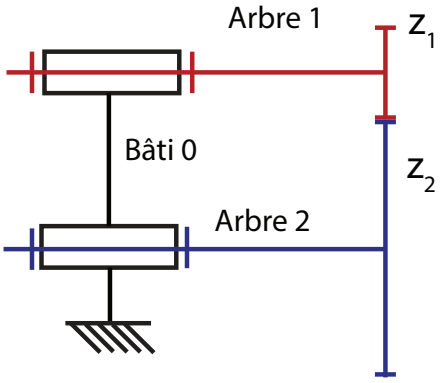
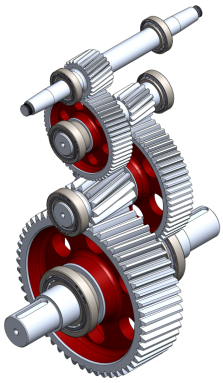


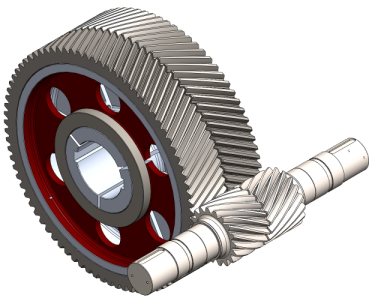
Schéma cinématique

- ☺ plus simples et économiques ;
- ☺ autorisent un déplacement axial ;
- ☹ plus bruyants.

Définition 9 : *engrenages à dentures hélicoïdales*



dentures hélicoïdales

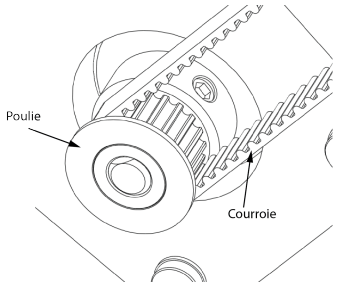


dentures Chevron

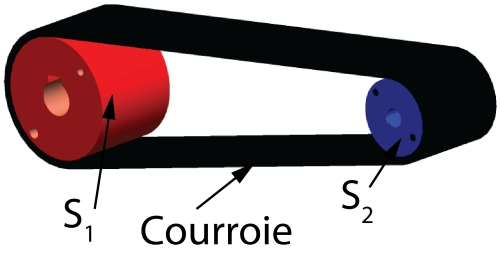
- les hélices doivent être de sens opposés ;
- ☺ nombre de dents en contact plus important ;
- ☺ engrènement plus progressif et continu ;
- ☺ engrènement plus silencieux ;
- ☺ transmission d'effort plus important ;
- ☹ employé seul génère des efforts axiaux à compenser par un jumelage de 2 engrenages à dentures hélicoïdales inversées ou des roues à chevrons.

Définition 10 : *Transmission par liens flexibles*

La transmission de mouvement par poulie-courroie se fait par l'intermédiaire de l'adhérence entre la poulie et la courroie ou par obstacle dans le cas des poulies crantées.



Courroie crantée



Courroie lisse maintenue par adhérence

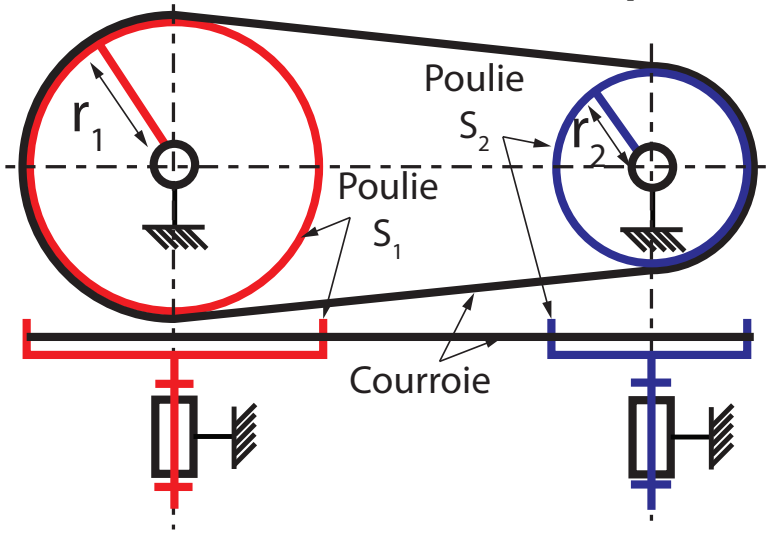


schéma cinématique

Ici il n'y a pas d'inversion du sens de rotation :

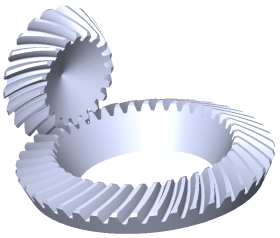
$$r = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{r_1}{r_2} \tag{12}$$

Remarque 6 :

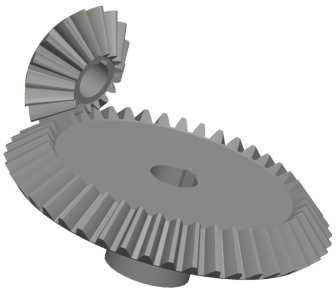
Ces différents moyens permettent de transmettre un mouvement de rotation entre deux **arbres parallèles**. D'autres moyens permettent de transmettre des mouvements entre deux **axes perpendiculaires**.

Définition 11 : *Transmission par des pignons coniques*

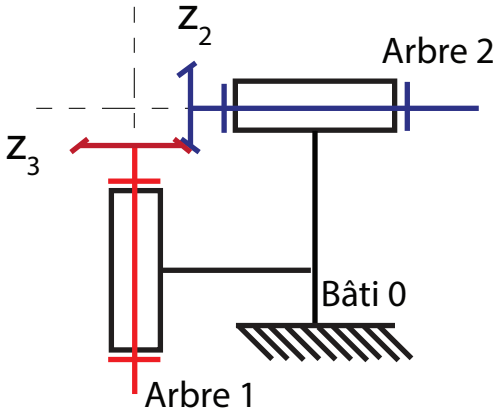
Les **engrenages coniques** à denture hélicoïdale ou droite permettent de transmettre des mouvement entre deux arbres à axes concourants généralement perpendiculaires.



Pignons coniques à dentures hélicoïdales



Pignons coniques à dentures droites



La détermination du rapport de réduction est la même que précédemment et dépend du rapport des nombres de dents :

$$\boxed{r = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} = \pm\frac{Z_3}{Z_2}} \tag{13}$$

- ☺ Solution simple d'un point de vue de la conception.
- ☹ les arbres sont en porte à faux;
- ☹ les sommets des cônes doivent coïncider.

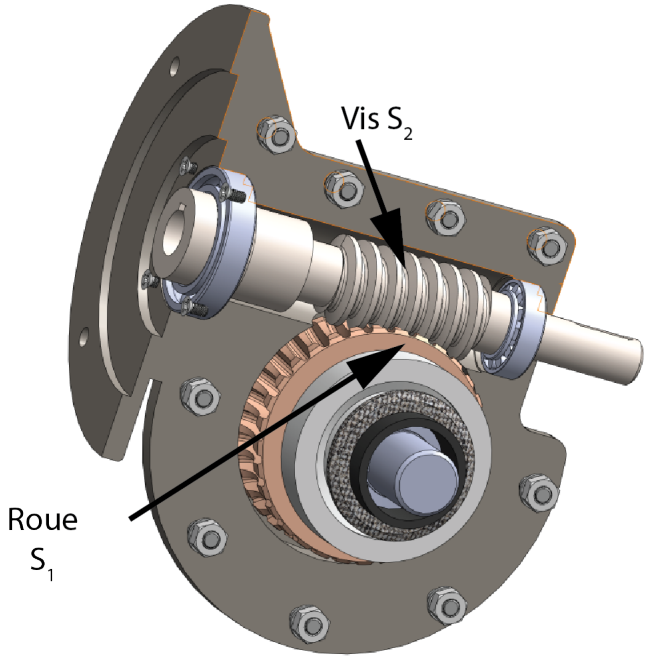
Remarque 7 :

- Dans tous ces cas on peut calculer les rapports de réduction en faisant le rapport entre les nombres de dents des pignons concernés. Ce qui n'est pas le cas de la transmission par roue et vis sans fin.
- Généralement un réducteur est une combinaison de trains d'engrenages présentés précédemment. Pour obtenir le rapport de réduction global il faut alors combiner les différentes relations obtenues pour chaque train d'engrenage simple. On peut éventuellement utiliser la formule de Willis :

$$\boxed{r = \frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{\text{roues menantes}}}{\prod Z_{\text{roues menées}}}} \tag{14}$$

Définition 12 : *Transmission par roue et vis sans fin*

Les engrenages à **roue et vis sans fin** transmettent un mouvement entre deux arbres à **axes non concourants**.



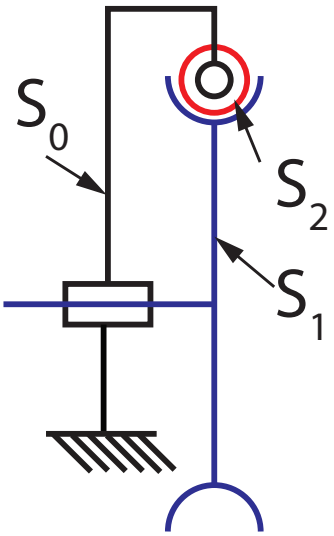


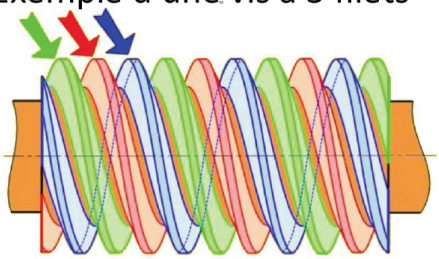
Schéma cinématique

Le rapport de réduction s'écrit ici :

$$r = \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{2/0}} = \frac{\omega_{roue/0}}{\omega_{vis/0}} = \frac{Z_{vis}}{Z_{roue}} \quad (15)$$

- Z_{vis} est le nombre de **filets** de vis ;
- Z_{roue} est le nombre de **dents** de la roue.

Exemple d'une vis à 3 filets

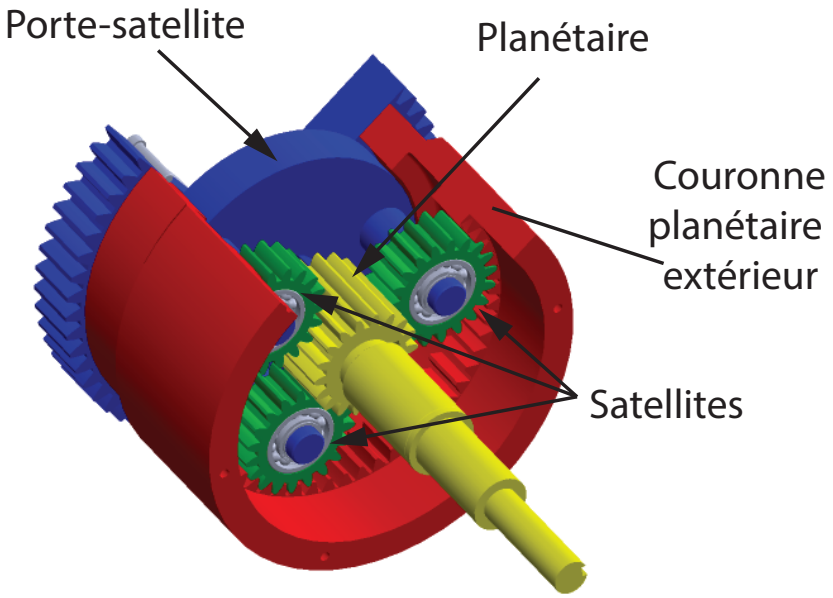


- ☺ Irréversibilité possible : sécurité anti-retour utile quand le récepteur peut devenir moteur (appareil de levage) ;
- ☺ grand rapport de réduction ;
- ☹ engrènement avec beaucoup de glissement et donc beaucoup d'usure et rendement faible ;
- ☹ la vis subit un effort axial important.

Définition 13 : *Train épicycloïdal*

Un train épicycloïdal est un réducteur composé de roue denté dont les axes de rotation ne sont pas fixes les uns par rapport aux autre. La figure ci-dessous donne la représentation d'un train épicycloïdal qui est constitué :

- d'un planétaire 1 ;
- de satellites 3 ;
- d'un porte-satellite 4 (solide par rapport auquel tous les axes sont fixes) ;
- d'un planétaire extérieur ou couronne 5.



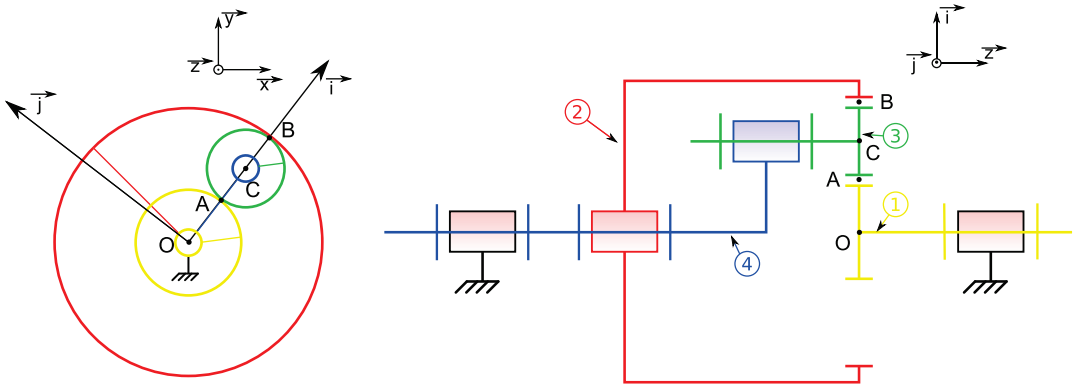
- Pour étudier cinématiquement ce système on choisira toujours le **référentiel lié au porte satellite 4** comme référentiel d'observation car tous les axes sont fixes par rapport à lui.
- Ce dispositif permet d'obtenir des rapports de **réduction assez élevés** avec un encombrement réduit.
- Si tous les composants du système sont laissés libre en rotation, le dispositif présente **deux mobilités** ce qui laisse beaucoup de possibilités de réglage.

Exemple 2 : *Paramétrage et rapport de réduction d'un train épicycloïdal*

Les liaisons $L_{1/0}$, $L_{4/0}$, $L_{2/4}$ et $L_{3/4}$ sont des liaisons pivots d'axe $\vec{z}$.
On pose $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_1 \vec{z}$, $\vec{\Omega}(2/0) = \omega_2 \vec{z}$ et $\vec{\Omega}(4/0) = \omega_4 \vec{z}$.
Les rotations sont toutes suivant le même axe $\vec{z}$, ainsi on note ω_{ij} la norme de la rotation relative entre le solide i et le solide j suivant $\vec{z}$

$$\omega_{ij} = \vec{\Omega}(i/0) \cdot \vec{z} - \vec{\Omega}(j/0) \cdot \vec{z}$$

Le satellite 3 de centre C roule sans glisser en A sur 1 et en B sur 2. Soit le repère $R_i \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z}\right)$ le repère tel que $\vec{i}$ ait même direction et même sens que OC.
On appelle Z_1, Z_2 et Z_3 les nombres de dents des roues 1, 2 et 3 et m leur module.



Questions

1. Donner l'expression de $\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}}$.

$$\boxed{\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = -\frac{Z_1}{Z_3}.}$$

2. Donner l'expression de $\frac{\omega_{24}}{\omega_{34}}$.

$$\boxed{\frac{\omega_{24}}{\omega_{34}} = \frac{Z_3}{Z_2}.}$$

3. Déterminer une relation entre ω_1, ω_2 et ω_4.

En combinant les résultats des deux questions précédentes, nous obtenons,

$$\boxed{\frac{\omega_2 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = -\frac{Z_1}{Z_2}.}$$

4 Autres transformation de mouvement

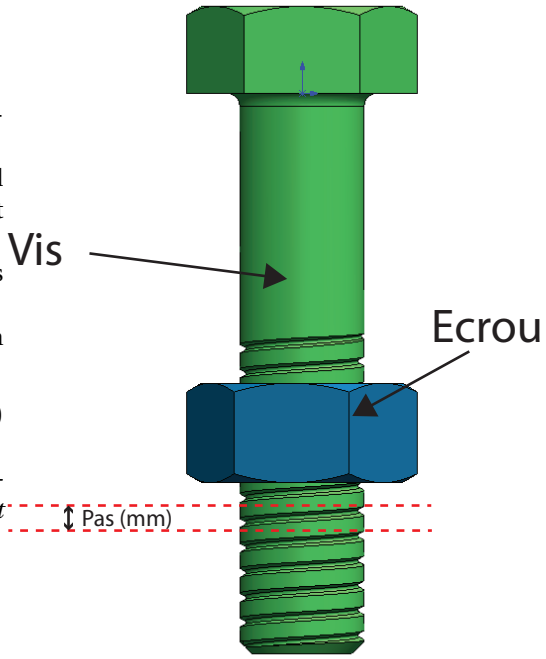
a) Vis-écrou

Définition 14 : *Vis-écrou*

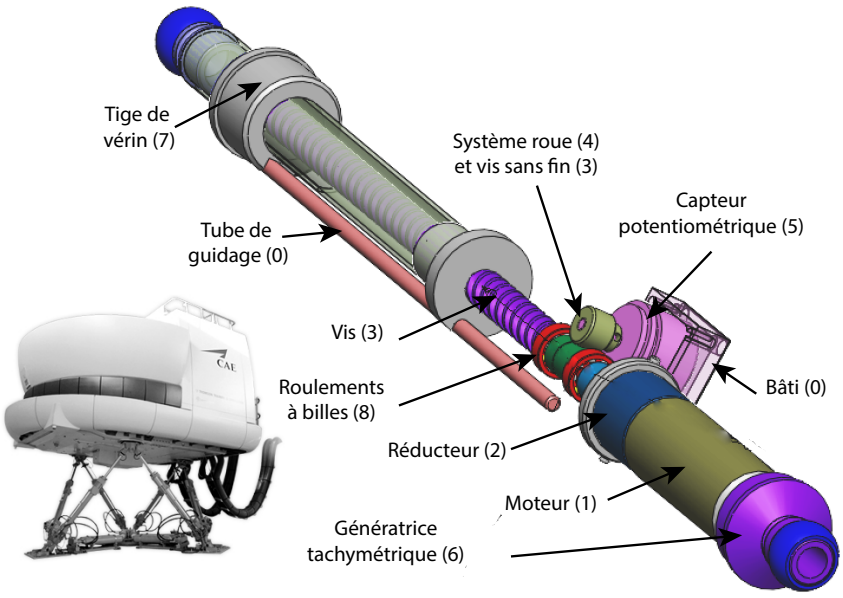
- **Type de transformation :** rotation continue en translation continue
- **Réversibilité :** généralement mais dépend du coefficient de frottement entre la vis et l'écrou
- **Applications technologiques :** Vérins électriques, chariot de machines outils
- **Caractéristiques :** pas de vis défini en $m/tour$

$$\lambda = \frac{pas}{2\pi}\theta \qquad (16)$$

Un tour de vis par rapport à l'écrou correspond à une translation du pas par rapport à l'écrou.



Exemple 3 : *Application technologique des systèmes vis-écrou*



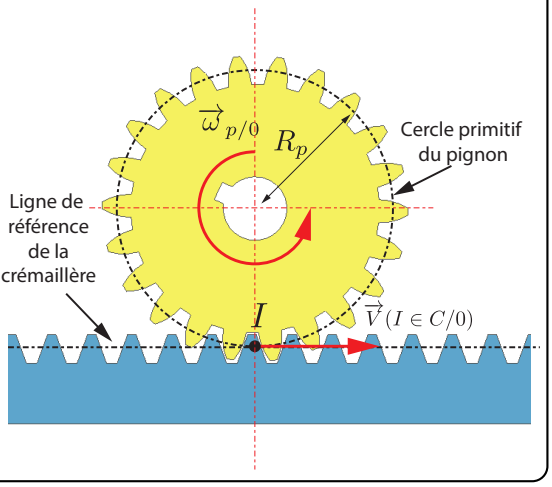
Vérin électrique de la plate-forme de simulateur 6 axes

b) Pignon-crémaillère

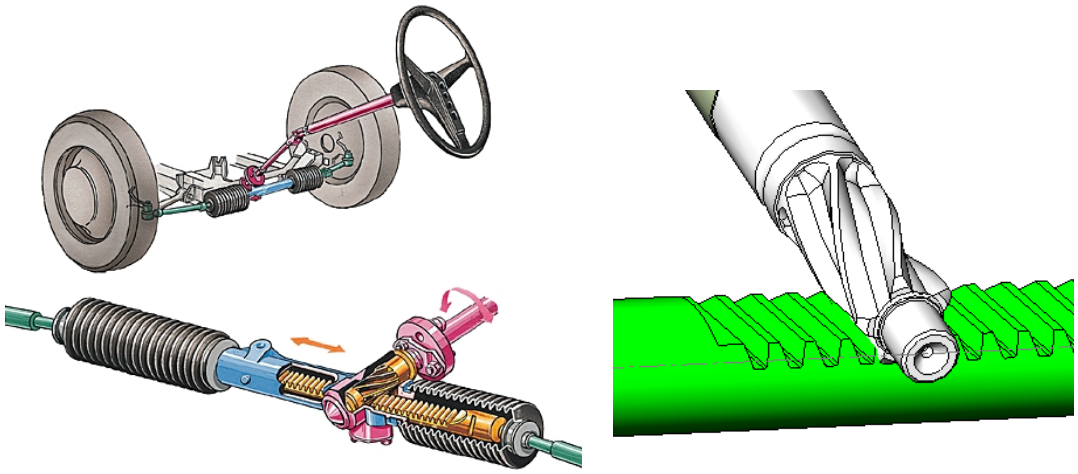
Définition 15 : *Pignon-crémaillère*

- **Type de transformation :** rotation continue en translation continue
- **Réversibilité :** oui
- **Applications technologiques :** Porte de train, porte de garage, direction de voiture
- **Caractéristiques :** Rayon primitif du pignon : R_p

$$\|\overrightarrow{V}(I \in C/0)\| = R_p \cdot \omega_{p/0} \quad (17)$$



Exemple 4 : *Application technologique des systèmes pignons-crémaillère*

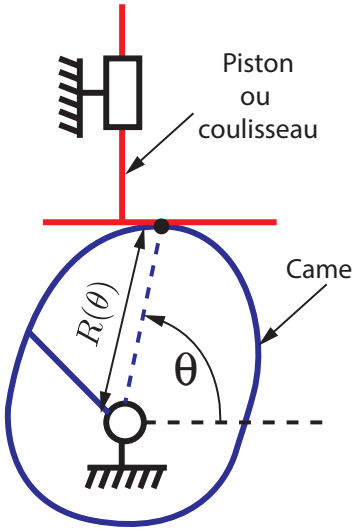


Système de direction d'une automobile

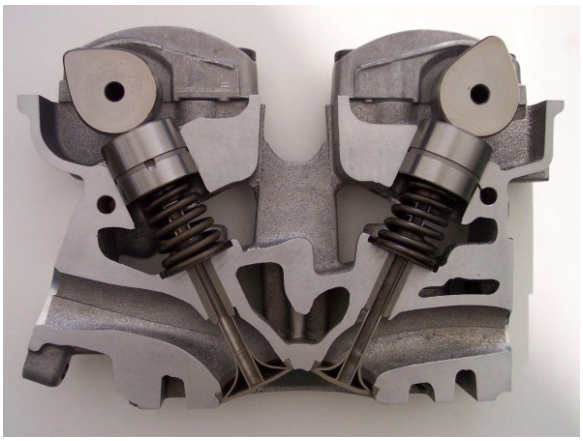
c) Transmission par came

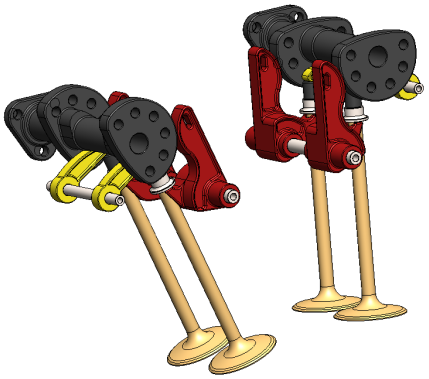
Définition 16 : ***Transmission par came***

- **Type de transformation :** rotation continue en translation alternative
- **Réversibilité :** non
- **Applications technologiques :** Pompe hydraulique, arbre à came
- **Caractéristiques :** La rotation continue de la came dont le rayon $R(\theta)$ est défini en coordonnées polaires est transformée en rotation alternative



Exemple 5 : ***Application technologique des systèmes de transmission par came***



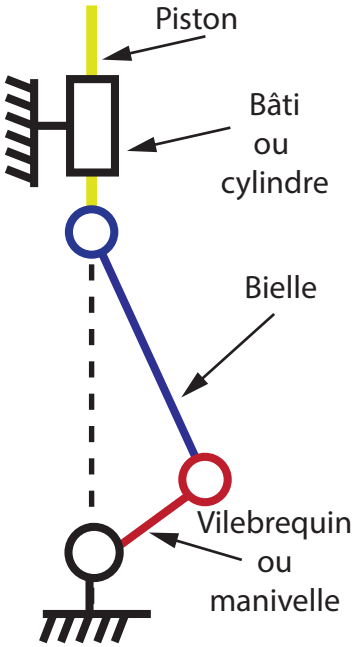


Soupapes de moteurs à explosions actionnées par des cames

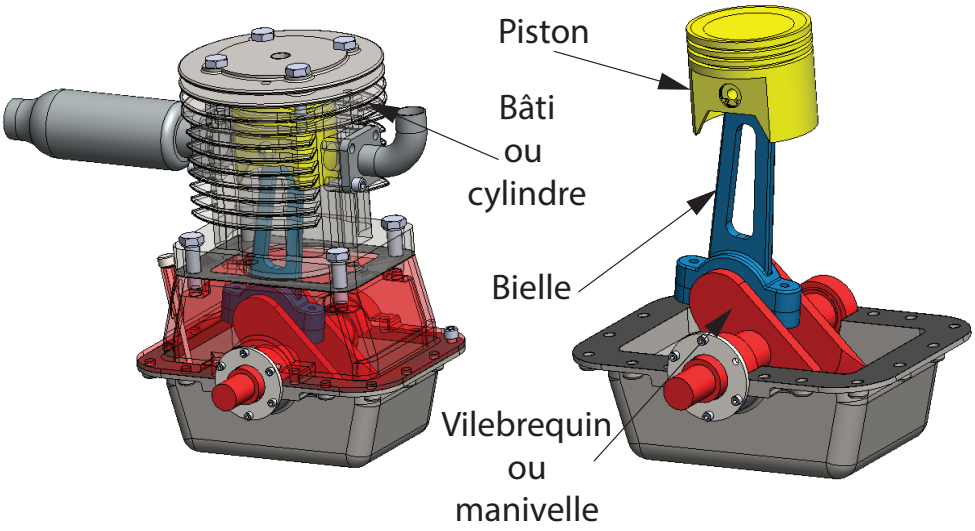
d) Transmission par bielle-manivelle

Définition 17 : *Transmission par bielle-manivelle*

- **Type de transformation :** translation alternative en rotation continu
- **Réversibilité :** oui
- **Applications technologiques :** Moteurs thermiques, compresseurs, pompes et moteurs hydrauliques
- **Caractéristiques :** *La relation entre la rotation de la manivelle et la translation du piston dépend de la longueur de l'excentration sur la manivelle (ou vilebrequin) et la longueur de la bielle.*



Exemple 6 : *Application technologique des systèmes de transmission par bielle-manivelle*

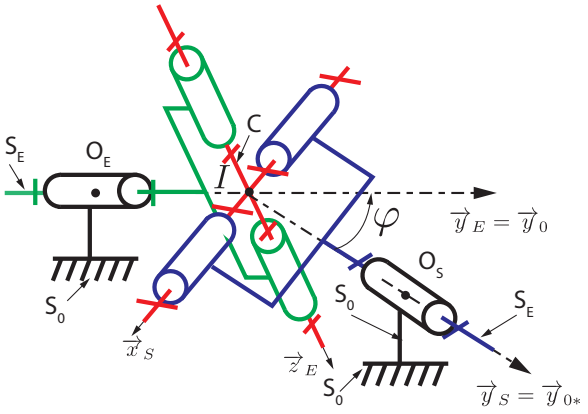


Moteur à explosion

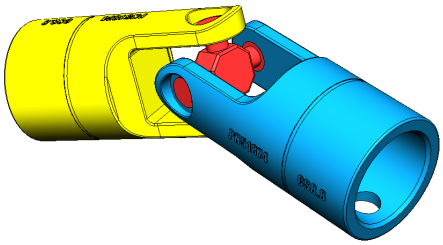
e) Joints de transmission

Définition 18 : ***Joints de transmission ou accouplement mécaniques***

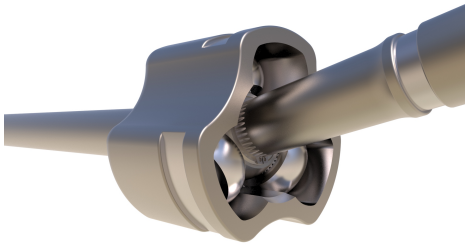
- **Type de transformation :** Rotation autour d'un axe vers une rotation autour d'un autre axe non colinéaire mais concourant.
- **Réversibilité :** oui
- **Applications technologiques :** Transmission automobile.
- **Caractéristiques :** Transmission pas systématiquement homocinétique.



Exemple 7 : ***Application technologique des joints de transmission***



Joint Cardan



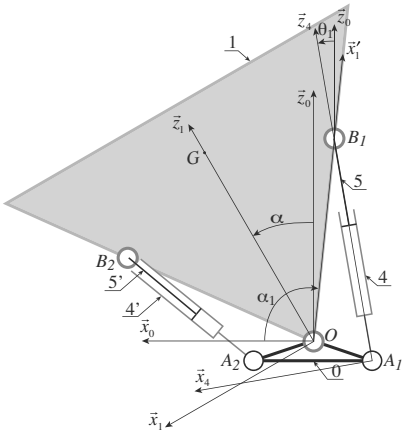
Joint tripode

III. Résolution numérique et cinématique

La méthode géométrique pour déterminer les lois entrées-sorties pour les systèmes mécaniques possédants des boucles fermées revient à résoudre des équations du type

$$f(x) = 0$$

. Cette partie du chapitre permet de présenter différentes méthodes permettant de résoudre ces problèmes.



$\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$
$\alpha_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1')$
$\theta_1 = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$
$\overrightarrow{OA_1} = -a\vec{x}_0 - b\vec{z}_0$
$\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda_1\vec{z}_4$
$\overrightarrow{OB_1} = L\vec{x}_1'$

1 Méthode de dichotomie

a) Principe de la méthode

On suppose que f est continue.

- On part de a et b ($a < b$) tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires. Le TVI assure alors qu'il y a un point d'annulation de f entre a et b.
- On calcule $m = \frac{1}{2}(a+b)$.
- On itère en repartant de a et m ou de m et b en fonction du signe de $f(m)$.

Pour savoir si on repart de a et m ou de m et b :

- On considère le signe de $f(a)f(m)$.
- Si $f(a)f(m) \leq 0$: $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes opposés, f s'annule donc sur le segment $[a,m]$. On itère donc sur $[a,m]$.
- Sinon, $f(a)f(m) > 0$: $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, donc $f(m)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, f s'annule donc sur le segment $[m,b]$. On itère donc sur $[m,b]$.

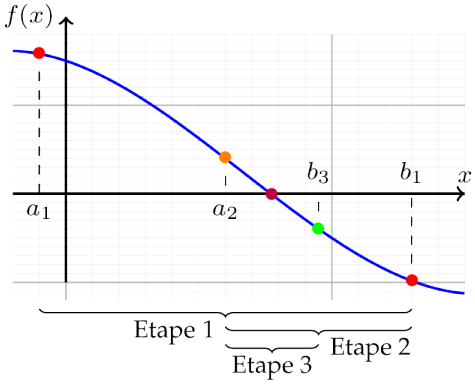


FIGURE 3 – Illustration de la recherche de zéro d'une fonction par dichotomie : source : https://cpge.frama.io/fiches-cpge/

Remarque 8 :

Si $f(a)f(m) = 0$, $f(a)$ ou $f(m)$ est nul, on repart de a et m (on pourrait renvoyer directement a ou m, mais, d'une part, dans la pratique, on ne tombe jamais exactement sur un point d'annulation et, d'autre part, à cause des erreurs de manipulations des flottants, un flottant n'est jamais vraiment égal à 0).

b) Implémentation

Algorithme 1 :

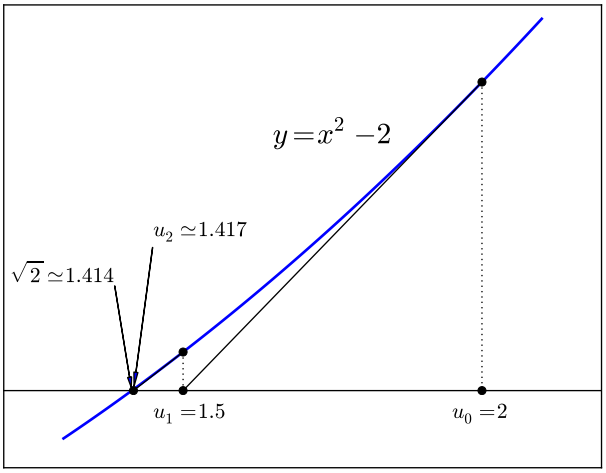
```
def dichotomie(f, a, b, epsilon):
    """Zéro de f sur [a,b] àepsilon près, par dichotomie
       Préconditions : f(a) * f(b) <= 0
                       f continue sur [a,b]
                       epsilon > 0"""
    c, d = a, b
    fc, fd = f(c), f(d)
    while d - c > 2 * epsilon:
        m = (c + d) / 2.
        fm = f(m)
        if fc * fm <= 0:
            d, fd = m, fm
        else:
            c, fc = m, fm
    return (c + d) / 2.
```

Remarque 9 :

- On a pris soin ici de réaliser le moins possible d'appels à la fonction f.
- Comme on connait le nombre exact d'itérations, on aurait aussi pu écrire une boucle `for`. La fonction en perdrait alors en lisibilité.
  Le nombre de tours de boucle est
  $$\left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right\rceil - 1.$$
  Ainsi, pour avoir p bits significatifs, $\Theta(p)$ tours de boucle sont effectués.

2 Méthode de Newton

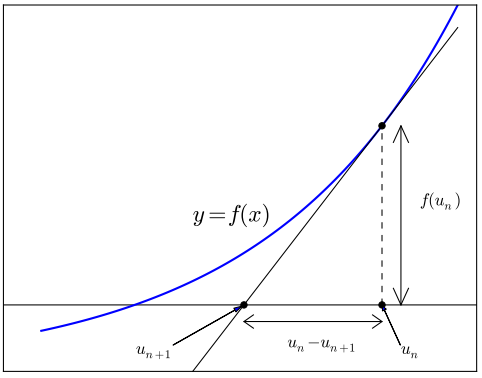
Voyons-en graphiquement le principe sur l'exemple de $f : x \mapsto x^2 - 2$.



a) Définition

Cette méthode est *itérative* : on construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- u_0 est une approximation d'un zéro de f, souvent grossière.
- On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, où $F : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
  Ainsi, le point $(u_{n+1}, 0)$ est le point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe de f en u_n.



b) Implémentation

Algorithme 2 :

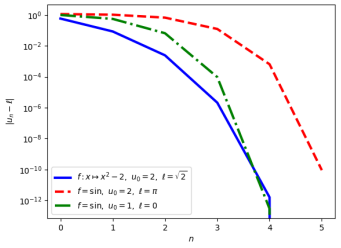
```
def newton(f, fp, x0, epsilon):
    """Zéro de f par la méthode de Newton
       départ : x0, f' = fp, critère d'arrêt epsilon"""
    u = x0
    v = u - f(u)/fp(u)
    while abs(v-u) > epsilon:
        u, v = v, v - f(v)/fp(v)
    return u
```

Remarque 10 :

La convergence de l'algorithme n'est pas tout le temps assuré. Plusieurs problèmes peuvent se poser, notamment :

- point singulier au point d'annulation (exemple : $x \mapsto \sqrt{|x|}$, réalisez le calcul à la main) ;
- point initial éloigné du zéro.

Lorsque la convergence est assurée, on peut montrer que la vitesse de convergence est en 2^{-2^n}.



3 Calcul approché de la dérivée

Pour effectuer la méthode de Newton, on a besoin de connaître f'.
Un moyen de la calculer numériquement est d'utiliser l'approximation suivante :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx f'(x_0) \quad \text{(pour } h \text{ petit).}$$

L'erreur commise est $\frac{h}{2}f''(x_0)+o(h)$ (si f est de classe $\mathscr{C}^2$).

En voici une approximation plus précise (et pas plus dure à calculer) :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)+\frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_0)+o(h^2)$$

```
def deriv(L,T):
    n=len(L)
    S=[0]
    for i in range(1,n-1):
        S.append((L[i+1]-L[i-1])/(T[i+1]-T[i-1]))
    S.append(S[-1])
    return(S)
```

4 Méthode de la sécante

Si l'on ne connaît pas la dérivée de f, et que l'on ne souhaite pas l'approcher (dans le cas d'une fonction peu régulière, par exemple), on peut remplacer la tangente à la courbe de f par la corde à la courbe de f entre deux points.

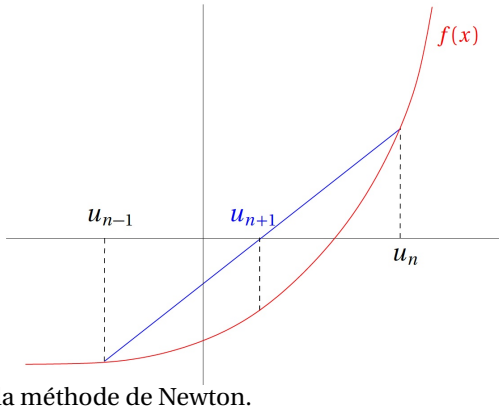
On choisit deux approximations initiales u_0 et u_1 et on calcule l'intersection de la corde à la courbe de f entre les points d'abscisses u_0 et u_1 avec l'axe des abscisses. On note u_2 l'abscisse de ce point d'intersection, et on itère avec u_1 et u_2...

La corde à la courbe de f entre les points d'abscisses u_n et u_{n-1} a pour pente $\dfrac{f(u_n)-f(u_{n-1})}{u_n-u_{n-1}}$ et a donc pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f(u_n)+(x-u_n)\frac{f(u_n)-f(u_{n-1})}{u_n-u_{n-1}} \\ &= f(u_{n-1})+(x-u_{n-1})\frac{f(u_n)-f(u_{n-1})}{u_n-u_{n-1}}. \end{aligned}$$

On considère donc la suite définie par récurrence par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_{n+1}=u_n-f(u_n)\frac{u_n-u_{n-1}}{f(u_n)-f(u_{n-1})}.$$



En Python, cela donne une fonction très proche de celle écrite pour la méthode de Newton.

```
def secante(f,u0,u1,eps):
    """Zéro de f par la méthode de la sécante
    u0,u1 : deux premiers points
    eps : critère d'arrêt"""
    u,v = u0,u1
    while abs(u-v) > eps :
        p = (f(u)-f(v)) / (u-v)
        u,v = v,u - f(u)/p
    return u
```

On peut montrer que si u_0 et u_1 sont suffisamment proches du zéro cherché et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, il existe $C>0$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_n-x_0|\leq C2^{-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n}.$$

Voir la figure 4 pour une illustration.

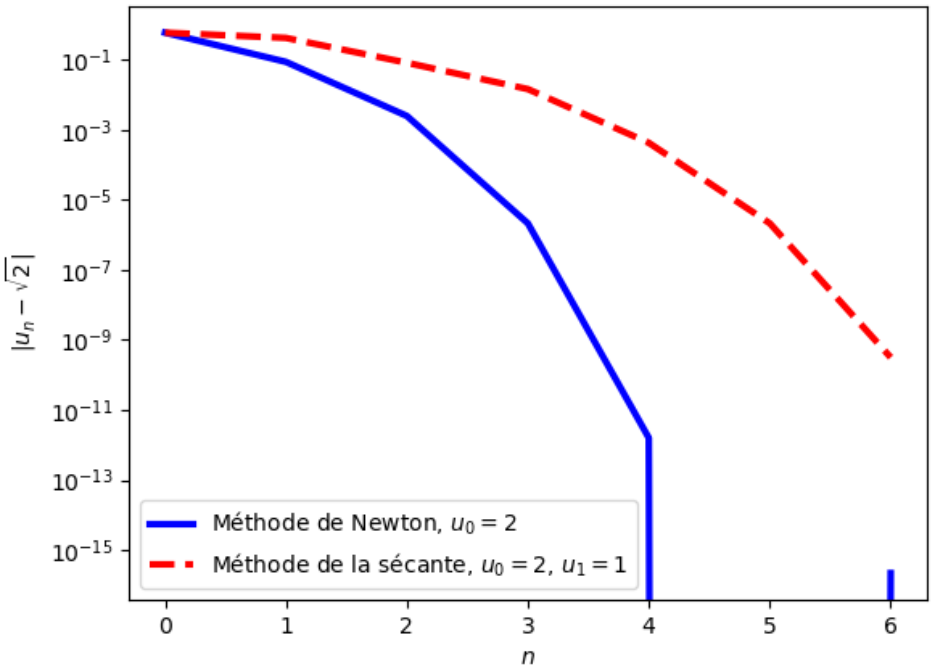


FIGURE 4 – Erreurs d'approximation du zéro de $x\mapsto x^2-2$ par la méthode de Newton et la méthode de la sécante. Échelle semi-logarithmique.

IV. Lois d'entrée-sortie en statique

1 Équilibre et PFS

Définition 19 : *Équilibre et Principe Fondamental de la statique*

- Considérons un ensemble matériel (E). On dit que (E) est en **équilibre** si au cours du temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport à un repère R .
- Dans un référentiel R **galiléen**, si un ensemble matériel (E) est en équilibre par rapport à R , alors le torseur des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur (E) est nul :

$$\boxed{(E) \text{ à l'équilibre} \quad \Rightarrow \quad \sum \left\{ \mathcal{T}_{\left(\bar{E}\to E\right)} \right\} = \{0\}} \tag{18}$$

(où $(\bar{E})$ désigne l'extérieur de (E).)

2 Théorèmes généraux

Théorème 1 : *généraux*

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un référentiel galiléen :

- **Théorème de la résultante statique :**

$$\boxed{\overrightarrow{R_{(\bar{E}\to E)}} = \vec{0}} \tag{19}$$

- **Théorème du moment statique**

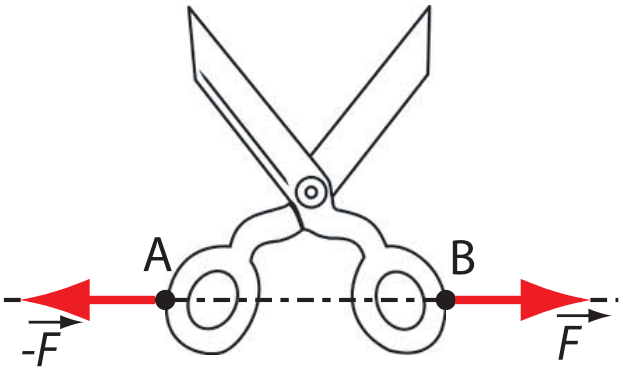
$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(\bar{E}\to E)}} = \vec{0} \; \forall A} \tag{20}$$

- **Théorème des actions réciproques** : Soient (E_1) et (E_2) deux sous-ensembles matériels de (E), en équilibre par rapport à un repère galiléen, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. Alors :

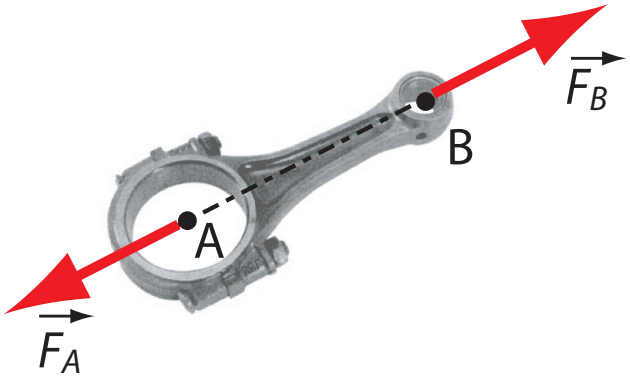
$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(E_1\to E_2)}\right\} = -\left\{\mathcal{T}_{(E_2\to E_1)}\right\}} \tag{21}$$

Remarque 11 :

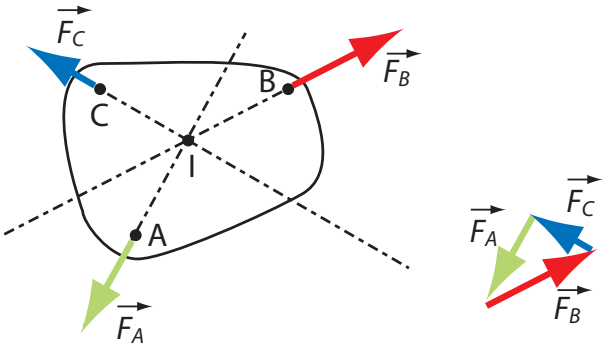
- La réciproque du principe fondamental de la statique et des théorèmes généraux ne s'appliquent pas, comme le montre l'exemple suivant.
- Soit un solide (E) soumis à deux glisseurs, alors la résultante des deux efforts associés à ces deux actions mécaniques sont directement opposées : $\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B}$ et elles sont dirigées par la droites (AB) : droite joignant les deux points d'applications d'effort.
- Soit un solide (E) soumis à trois glisseurs, alors les efforts associés aux trois actions mécaniques ont leurs :
  - trois directions concourantes ;
  - vecteurs associés formant le triangle des efforts.



Réciproque du PFS



Solide soumis à deux AM de type glisseurs



Solide soumis à trois AM de type glisseurs

3 Méthodologie de résolution

On considérera dans cette partie des ensembles (E) correspondant à des systèmes mécaniques composés de plusieurs solides (N_S solides) liés entre eux par des liaisons mécaniques. L'objectif d'une résolution statique est pour la plupart du temps de calculer les actions mécaniques au niveau des liaisons dans le but de les dimensionner et/ou de vérifier leur tenue vis-à-vis d'une sollicitation extérieure.

Propriété 2 :

La démarche pour résoudre un problème de statique doit être rigoureusement respectée pour éviter toute erreur d'interprétation physique.

1. Isolement d'un système (E) composé d'un ensemble de N_S solides (sans le bâti) dans un référentiel galiléen.
2. Construction du graphe de structure du système considéré.
3. Ordonnancement des isolements : on commencera par isoler les solides soumis à 2 actions mécaniques de type glisseur, puis les solides soumis à 3, etc...
4. Bilan des Actions mécaniques pour chaque isolement.
5. Construction du système d'équations avec $6 \times N_S$ **équations** pour un problème *"3D"* et $3 \times N_S$ **équations** pour un problème *"2D"*.

Remarque 12 :
- Parfois il peut s'avérer intéressant d'isoler des groupements de solides.
- On discutera de la possibilité ou non de résoudre ce système dans le chapitre suivant et dans un premier temps on ne considèrera que des problèmes solvables.

4 Résolution numérique

a) Problème à résoudre

Résoudre un problème de statique revient à résoudre un problème du type $A \cdot X = B$, avec,
- $X = (x_i)$ le vecteur inconnus contenant toutes les inconnues d'actions mécaniques.
- $A = (a_{i,j})$ la matrice construite à partir du système d'équations possédant autant de lignes que d'équations et autant de colonne que d'inconnues.
- $B = (b_i)$ le vecteur second membre contenant toutes les constantes ne dépendant pas des inconnues.

Cette équation se voit naturellement comme le système linéaire suivant.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,j}x_j & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + & \dots & + & a_{i,j}x_j & + & \dots & & a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,j}x_j & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{22}$$

b) Méthode de résolution

On peut utiliser pour cela la méthode du pivot de Gauss (ou de Gauss Jordan).

On suppose que le système (*i.e.* A) est carré ainsi qu'inversible. On se ramène au cas triangulaire : pour cela on va effectuer des opérations sur les lignes du système $Ax = B$. Ces opérations sont
- des échanges de lignes,
- des ajouts à une ligne de combinaisons linéaires d'autres lignes.

A et B sont des matrices, données sous forme d'un tableau bidimensionnel (type `array` de `numpy`). La structure `array` a plusieurs avantages :
- les opérations d'ajout de lignes et de multiplication d'une ligne par un scalaire sont déjà disponibles (sinon, il faut les programmer) ;
- les extractions de lignes sont faciles (on obtient alors un tableau unidimensionnel).

Remarque 13 :
Il existe aussi un type `matrix`. Adapté pour des manipulations de matrices mais pas très pratique pour l'extraction de lignes

On commence bien sûr par charger la bibliothèque `numpy`

```
from numpy import array, zeros
```

Pour chercher un pivot sur la colonne `i`, on effectue une recherche de maximum classique.

```
def cherche_pivot(A, j):
    """Cherche et renvoie un i tel que abs(A[i,j]) est maximal, avec i<=j"""
    n = len(A)
    best = j
    for i in range(j+1, n):
        # Inv : pour tout k <= i, abs(A[best,j]) >= abs(A[k,j])
        if abs(A[i,j]) > abs(A[best,j]):
```

```
            best = i
    return best
```

On réalise facilement l'échange de deux lignes.

```
def echange_lignes(A, i, j):
    """Échange les lignes i et j de la matrice A"""
    A[i,:],A[j,:] = A[j,:].copy(), A[i,:].copy()
    return None
```

Attention, la copie est nécessaire ici, sans quoi il y a une erreur due aux alias (les objets de type `array` sont mutables).

On peut réaliser la phase de descente.

```
def descente(A,b):
    """Phase de descente de la méthode du pivot pour résoudre Ax = b.
    Préconditions : A et b sont de type array,
                    A est inversible,
                    b a même nombre de lignes que A.
    Attention: cette fonction modifie A et b."""
    n = len(A)
    for j in range(n-1):
        ip = cherche_pivot(A, j)
        # on met en place la ligne du pivot :
        echange_lignes(A, j, ip)
        echange_lignes(b, j, ip)
        p = A[j, j] # le pivot
        for i in range(j+1, n):
            alpha = - A[i,j] / p # Coefficient multiplicateur
            b[i,:] = b[i,:] + alpha * b[j,:]
            A[i,:] = A[i,:] + alpha * A[j,:]
    return None
```

La phase de remontée se fait explicitement.

```
def remontee(U,B):
    """Résout le système UX = b.
    Préconditions: U triangulaire supérieure
                   b a autant de lignes que U."""
    n, m = B.shape
    X = zeros((n, m))
    for k in range(n):
        i = n-1-k
        # Invariant X[i+1:] est correct
        s = U[i, i+1:].dot(X[i+1:])
        X[i] = (B[i] - s) / U[i, i]
    return X
```

Il n'y a plus qu'effectuer tout cela d'affilée.

```
def resout(A,b):
    """Applique la méthode du pivot pour résoudre Ax = b.
    Renvoie la solution x trouvée.
    Préconditions : A et b sont de type array,
                    A est inversible,
                    b a même nombre de lignes que A."""
    n = len(A)
    # On copie A et b
    A_, b_ = A.copy(), b.copy()
    descente(A_,b_)
    return remontee(A_,b_)
```

Remarque 14 :
L'algorithme du pivot s'effectue en $\Theta(n^3)$ opérations et est donc relativement coûteux. Il s'agit donc d'une complexité cubique. Il est ici du même ordre que le produit (naïf) de deux matrices ($\Theta(n^3)$).

On peut utiliser la méthode de résolution directement implémentée dans Numpy. Il faudra avoir au préalable défini les matrice A et B avec le module `numpy` et la fonction `array`.

```
from numpy.linalg import solve
X = solve(A,B)
X
```