

UPS

avril 2017

## Corrigé de l'épreuve de mathématiques du concours X-ESPCI-ENS

**Question 1.a.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $C > 0$ .

On fait l'hypothèse  $\|M\| \leq C$ , c'est-à-dire  $\sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$ .

Pour tout  $x$  non nul de  $\mathbb{C}^n$ , on a donc la majoration  $\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$ . On multiplie par  $\|x\|_1$ , qui est positif, ce qui donne  $\|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$ .

Cette inégalité est également valable si  $x$  est nul.

Réciproquement, on fait l'hypothèse  $\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$ .

Pour tout vecteur  $x$  non nul de  $\mathbb{C}^n$ , on en déduit l'inégalité  $\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$  car  $\|x\|_1 > 0$ , donc  $\|M\| \leq C$ .

On a prouvé l'équivalence  $\|M\| \leq C \iff \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$ .

Au final, remarquons qu'on a prouvé en particulier l'inégalité  $\|Mx\|_1 \leq \|M\| \times \|x\|_1$  et qu'on possède une méthode pour majorer  $\|M\|$  dans le cas général. Ces deux points serviront fréquemment dans ce qui suit.

**Question 1.b.** [1] Déjà, la fonction  $M \mapsto \|M\|$  est à valeurs réelles positives.

[2] Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que  $\|M\| = 0$ . À la question précédente, on n'a pas utilisé le caractère strict de l'inégalité  $C > 0$ . On peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq 0.$$

Par positivité de la norme, on obtient donc  $\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 = 0$ , c'est-à-dire  $\forall x \in \mathbb{C}^n : Mx = 0$ . Les colonnes de la matrice  $M$  sont les produits  $Me_i$ , où  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . Ainsi, les colonnes de  $M$  sont nulles donc  $M$  est la matrice nulle.

[3] Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{C}^n$ . Exploitions l'homogénéité de la norme  $\|\cdot\|_1$ .

$$\|\lambda Mx\|_1 = |\lambda| \times \|Mx\|_1 \leq |\lambda| \times \|M\| \times \|x\|_1.$$

On en déduit la majoration  $\|\lambda M\| \leq |\lambda| \times \|M\|$  d'après 1.a.

Si  $\lambda = 0$ , on obtient  $\|\lambda M\| \leq 0$  donc  $\|\lambda M\| = 0 = |\lambda| \times \|M\|$ .

Si  $\lambda \neq 0$ , on effectue la substitution  $(M, \lambda) \leftarrow (\lambda M, 1/\lambda)$  dans l'inégalité  $\|\lambda M\| \leq |\lambda| \times \|M\|$ , pour obtenir  $\|M\| \leq \|\lambda M\|/|\lambda|$ , c'est-à-dire  $\|\lambda M\| \geq |\lambda| \times \|M\|$ .

On obtient donc  $\|\lambda M\| = |\lambda| \times \|M\|$  dans tous les cas.

**Remarque.** Ce raisonnement est encore valable si on prend  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ . Ce n'est pas requis par la définition d'une norme mais cette extension est utile plus loin (à la question 8).

[4] Soient  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . L'inégalité triangulaire pour la norme  $\|\cdot\|_1$  donne

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|(M+N)x\|_1 \leq \|Mx\|_1 + \|Nx\|_1 \leq \|M\| \times \|x\|_1 + \|N\| \times \|x\|_1.$$

On en déduit l'inégalité  $\|M + N\| \leq \|M\| + \|N\|$  par application de 1.a.

On a montré que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Question 2.** Soient A et B dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . En appliquant 1.a dans le sens  $\Rightarrow$ , on obtient

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \| (AB)x \|_1 \leq \|A\| \times \|Bx\|_1 \leq \|A\| \times \|B\| \times \|x\|_1.$$

En appliquant 1.a dans le sens  $\Leftarrow$ , on en déduit l'inégalité  $\|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|$ .

**Question 3.** Posons  $S(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$  et notons  $j_0$  un indice qui réalise ce maximum.

En notant de nouveau  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , on observe l'égalité

$$Ae_{j_0} = \begin{pmatrix} a_{1,j_0} \\ \vdots \\ a_{n,j_0} \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad S(A) = \|Ae_{j_0}\|_1.$$

L'égalité  $\|e_{j_0}\|_1 = 1$  donne alors  $S(A) = \frac{\|Ae_{j_0}\|_1}{\|e_{j_0}\|_1} \leq \|A\|$ .

Pour l'inégalité réciproque, prenons  $x$  quelconque dans  $\mathbb{C}^n$ .

$$Ax = A \times \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n x_j \times Ae_j.$$

L'inégalité triangulaire de la norme  $\|\cdot\|_1$  donne alors

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \times \|Ae_j\|_1.$$

Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on observe les relations

$$\|Ae_j\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq S(A)$$

donc

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \times S(A) = S(A) \times \|x\|_1.$$

D'après 1.a, on en déduit la majoration  $\|A\| \leq S(A)$ .

Par double inégalité, on a prouvé l'égalité  $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$ .

**Question 4.** C'est éternant : on nous demande de prouver une propriété du cours.

**[1]** On commence par supposer que la suite  $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice B. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on remarque l'encadrement

$$0 \leq \|A^{(k)} - B\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}|.$$

Chaque terme du membre de droite tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$  donc, par le théorème des gendarmes, on voit que  $\|A^{(k)} - B\|$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

2 Réciproquement, on suppose que  $\|A^{(k)} - B\|$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ . Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on observe l'encadrement

$$0 \leq |a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}| \leq \sum_{s=1}^n |a_{s,j}^{(k)} - b_{s,j}| \leq \|A^{(k)} - B\|.$$

On en déduit que  $a_{i,j}^{(k)}$  tend vers  $b_{i,j}$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi, la suite  $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice  $B$ .

**Question 5.a.** Le calcul donne

$$P_b^{-1}AP_b = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ba_{1,2} & b^2a_{1,3} & \cdots & b^{n-1}a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & ba_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b^2a_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & ba_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $P_b^{-1}AP_b$  tend vers la matrice  $\text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$  quand  $b$  tend vers 0.

**Question 5.b.** La norme  $\|\cdot\|$  est une fonction continue de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{R}$  (car elle est 1-lipschitzienne). On en déduit que  $\|P_b^{-1}AP_b\|$  tend vers  $\|\text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})\|$  quand  $b$  tend vers 0. Cette limite, notée  $\ell$ , est égale à  $\max(|a_{j,j}|; 1 \leq j \leq n)$ .

Cette limite est strictement inférieure à 1 par hypothèse. Notons  $r = (1 + \ell)/2$ , ce qui est dans  $] \ell, 1[$ .

D'après la définition de la limite, il existe  $b_0 > 0$  tel que pour tout  $b$  dans  $]0, b_0]$ , le nombre  $\|P_b^{-1}AP_b\|$  soit majoré par  $r$ . On obtient donc en particulier l'inégalité  $\|P_{b_0}^{-1}AP_{b_0}\| < 1$ .

**Question 5.c.** Gardons la notation  $b$  de la question précédente. Une itération de l'inégalité de la question 2 donne

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \|(P_b^{-1}AP_b)^k\| \leq \|P_b^{-1}AP_b\|^k.$$

L'inégalité  $\|P_b^{-1}AP_b\| < 1$  donne que  $\|P_b^{-1}AP_b\|^k$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

Rappelons l'identité  $(P_b^{-1}AP_b)^k = P_b^{-1}A^kP_b$ . L'inégalité de la question 2 donne maintenant

$$0 \leq \|A^k\| \leq \|P_b\| \times \|(P_b^{-1}AP_b)^k\| \times \|P_b^{-1}\|,$$

si bien que  $\|A^k\|$  tend également vers 0.

La suite de matrices  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers la matrice nulle.

**Question 6.** Pour la matrice  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_1) = \{0; 1\}$  donc  $\rho(A_1) = 1$ .

Pour la matrice  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_2) = \{0\}$  donc  $\rho(A_2) = 0$ .

Pour la matrice  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_3) = \{0; 1\}$  donc  $\rho(A_3) = 1$ .

Pour la matrice  $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_4) = \{i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}\}$  donc  $\rho(A_4) = \sqrt{2}$ .

Pour la matrice  $A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_5) = \{1; 4\}$  donc  $\rho(A_5) = 4$ .

**Question 7.** La propriété (i) est vraie en raison de l'égalité

$$\text{Sp}(\mu A) = \{\mu x ; x \in \text{Sp}(A)\}.$$

Pour prouver cette égalité, on remarque pour commencer l'égalité  $\text{Sp}(0 \times A) = \{0\}$  puis, si  $\mu \neq 0$ , on remarque l'égalité

$$\text{Ker}(\mu A - \mu x I_n) = \text{Ker}(A - x I_n), \quad \text{qui donne} \quad \mu x \in \text{Sp}(\mu A) \iff x \in \text{Sp}(A).$$

La propriété (ii) est fausse. On peut prendre  $A = A_2$  et  $B = {}^t A_2$ , ce qui donne  $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dans ce cas, on a donc  $\rho(A + B) = 1$  et  $\rho(A) + \rho(B) = 0$  donc  $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$ .

La propriété (iii) est fausse. On peut prendre  $A = A_2$  et  $B = {}^t A_2$ , ce qui donne  $AB = A_1$ .

Dans ce cas, on a donc  $\rho(AB) = 1$  et  $\rho(A)\rho(B) = 0$  donc  $\rho(AB) > \rho(A)\rho(B)$ .

Les propriétés (iv) et (v) sont vraies car les matrices  $P^{-1}AP$  et  ${}^t A$  ont le même spectre que  $A$ .

**Question 8.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  telle que  $|\lambda| = \rho(A)$ . Soit  $x$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Les relations  $Ax = \lambda x$  et  $x \neq 0$  donnent

$$|\lambda| = \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$

donc  $\boxed{\rho(A) \leq \|A\|}$ .

**Question 9.** On fait l'hypothèse  $\rho(A) < 1$ . La matrice  $A$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (car son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{C}$ ) donc il existe une matrice  $P$  de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que la matrice  $T = P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de  $T$  sont les valeurs propres de  $A$  donc leurs modules sont strictement inférieurs à 1.

La matrice  $T$  vérifie donc les hypothèses de la question 5, si bien que la suite de matrices  $(T^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers la matrice nulle.

Par le même raisonnement qu'en 5.c, on en déduit que  $\boxed{\text{la suite } (A^k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers la matrice nulle.}}$

**Question 10.a.** On reprend le raisonnement de la question 8 : soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  telle que  $|\lambda| = \rho(A)$ . Soit  $x$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On trouve

$$A^k x = A^{k-1} \lambda x = A^{k-2} \lambda^2 x = \dots = \lambda^k x$$

puis, le vecteur  $x$  étant non nul, on obtient  $|\lambda^k| = \|A^k x\|_1 / \|x\|_1$  donc  $\rho(A)^k \leq \|A^k\|$ .

**Question 10.b.**  $\boxed{1}$  Soit  $\alpha \in ]0, \rho(A)]$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on observe alors l'inégalité

$$\left\| \left( \frac{A}{\alpha} \right)^k \right\| = \frac{\|A\|^k}{\alpha^k} \geq \left( \frac{\rho(A)}{\alpha} \right)^k \geq 1$$

d'après 10.a.

On en déduit que  $\|(A/\alpha)^k\|$  ne tend vers pas 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$  donc  $\alpha$  n'est pas dans  $E_A$ .

$\boxed{2}$  Soit  $\alpha \in ]\rho(A), +\infty[$ . L'identité 7.i donne  $\rho(A/\alpha) = \rho(A)/\alpha < 1$  donc la suite  $((A/\alpha)^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers la matrice nulle d'après le résultat de la question 9, si bien que  $\alpha$  est dans  $E_A$ .

$\boxed{\text{On a prouvé l'égalité } E_A = ]\rho(A), +\infty[.}$

**Question 11.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on connaît l'inégalité  $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$ , qui découle de 10.a.

Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après 10.b, la suite de matrices de terme général  $\left(\frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}\right)^k$  tend vers la matrice nulle. Il existe donc un entier  $k_\varepsilon \geq 1$  tel que

$$\forall k \geq k_\varepsilon, \quad \left\| \frac{A^k}{(\rho(A) + \varepsilon)^k} \right\| \leq 1,$$

ce qui donne ensuite  $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$ .

Récapitulons :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geq k_\varepsilon, \quad \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

On a prouvé que la suite  $(\|A^k\|^{1/k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\rho(A)$ .

**Question 12.** Introduisons les coefficients des matrices en présence

$$A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{et} \quad A_+^k = (b_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ , notons  $I_k$  l'énoncé

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad |a_{i,j}^{(k)}| \leq b_{i,j}^{(k)}.$$

L'énoncé  $I_1$  est vrai par définition des  $b_{i,j}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que l'énoncé  $I_k$  est vrai. Soit  $(i, j)$  un couple d'indices entre 1 et  $n$ . La formule du produit matriciel donne

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} a_{\ell,j}^{(k)}.$$

On applique l'inégalité triangulaire puis on utilise l'hypothèse  $I_k$ .

$$|a_{i,j}^{(k+1)}| \leq \sum_{\ell=1}^n \underbrace{|a_{i,\ell}|}_{=b_{i,\ell}} \underbrace{|a_{\ell,j}^{(k)}|}_{\leq b_{\ell,j}^{(k)}} \leq \sum_{\ell=1}^n b_{i,\ell} b_{\ell,j}^{(k)} = b_{i,j}^{(k+1)}.$$

L'énoncé  $I_{k+1}$  est prouvé.

Par récurrence, l'énoncé  $I_k$  est vrai pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Prenons maintenant  $k$  quelconque dans  $\mathbb{N}^*$  et considérons un indice  $j$  tel que  $\|A^k\| = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}^{(k)}|$ . L'énoncé  $I_k$  donne

$$\|A^k\| \leq \sum_{i=1}^n b_{i,j}^{(k)} \leq \|A_+^k\| \quad \text{puis} \quad \|A^k\|^{1/k} \leq \|A_+^k\|^{1/k}.$$

En faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , on obtient l'inégalité  $\rho(A) \leq \rho(A_+)$ .

**Question 13.** Encore un raisonnement par récurrence. Pour tout entier  $k \geq 2$ , notons  $J_k$  l'énoncé « Pour tout  $(z_1, \dots, z_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  qui vérifie l'égalité  $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$ , le vecteur  $(z_1, \dots, z_n)$  est colinéaire à  $(|z_1|, \dots, |z_n|)$ . »

Soit  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ . Notons  $r_1 = |z_1|$  et  $r_2 = |z_2|$  et introduisons  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans  $\mathbb{R}$  tels que

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{et} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Le calcul donne  $|z_1 + z_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$  et  $(|z_1| + |z_2|)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2$ . On en déduit que le produit  $r_1r_2(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)) = 0$  est nul.

Si  $r_1 = 0$ , on a alors  $(z_1, z_2) = e^{i\theta_2}(|z_1|, |z_2|)$ .

Si  $r_2 = 0$ , on a alors  $(z_1, z_2) = e^{i\theta_1}(|z_1|, |z_2|)$ .

Si  $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$ , alors  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont congrus modulo  $2\pi$  donc  $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$  donc  $(z_1, z_2) = e^{i\theta_1}(|z_1|, |z_2|)$ .

L'énoncé  $J_2$  est prouvé.

Soit  $k \geq 2$  pour lequel  $J_k$  est vrai. Prenons  $(z_1, \dots, z_{k+1})$  tel que  $|z_1 + \dots + z_{k+1}| = |z_1| + \dots + |z_{k+1}|$ .

Supposons dans un premier temps que  $z_{k+1}$  est nul, ce qui donne  $|z_1 + \dots + z_k| = |z_1| + \dots + |z_k|$ . L'hypothèse  $J_k$  donne alors l'existence de  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $(z_1, \dots, z_k) = \lambda(|z_1|, \dots, |z_k|)$ . La nullité de  $z_{k+1}$  donne alors  $(z_1, \dots, z_{k+1}) = \lambda(|z_1|, \dots, |z_{k+1}|)$ .

Ce raisonnement se généralise au cas où au moins un des  $z_i$  est nul.

Supposons maintenant que tous les  $z_i$  sont non nuls.

L'inégalité triangulaire donne

$$|z_1 + \dots + z_k + z_{k+1}| \leq |z_1 + \dots + z_k| + |z_{k+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_k| + |z_{k+1}|.$$

Ces trois nombres sont donc égaux, ce qui donne en particulier

$$|z_1 + \dots + z_k| + |z_{k+1}| = |z_1| + \dots + |z_k| + |z_{k+1}| \quad \text{donc} \quad |z_1 + \dots + z_k| = |z_1| + \dots + |z_k|.$$

L'hypothèse  $J_k$  permet d'en déduire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $(z_1, \dots, z_k) = \lambda(|z_1|, \dots, |z_k|)$ .

On peut aussi organiser l'inégalité triangulaire sous la forme

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_{k+1}| \leq |z_1| + |z_2 + \dots + z_{k+1}| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_{k+1}|$$

et en déduire l'égalité  $|z_2 + \dots + z_{k+1}| = |z_2| + \dots + |z_{k+1}|$ . L'hypothèse  $J_k$  permet d'en déduire qu'il existe un  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $(z_2, \dots, z_{k+1}) = \mu(|z_2|, \dots, |z_{k+1}|)$ .

Le fait que  $z_2$  soit non nul donne  $\lambda = z_2/|z_2| = \mu$  donc finalement  $(z_1, \dots, z_{k+1}) = \lambda(|z_1|, \dots, |z_{k+1}|)$ .

L'énoncé  $J_{k+1}$  est prouvé. Par récurrence, l'énoncé  $J_k$  est vrai pour tout entier  $k \geq 2$ .

**Question 14.** Le produit  ${}^t y A x$  s'écrit de deux manières

$${}^t y A x = {}^t y \lambda x = \lambda {}^t y x \quad \text{et} \quad {}^t y A x = {}^t ({}^t A y) x = {}^t (\mu y) x = \mu {}^t y x.$$

On en tire l'égalité  $(\lambda - \mu) {}^t y x = 0$  puis  ${}^t y x = 0$  car  $\lambda \neq \mu$ . On remarque enfin l'égalité  ${}^t y x = {}^t x y$ , qui donne finalement  $\boxed{{}^t x y = 0.}$

**Question 15.a.** La récurrence est déjà initialisée par l'hypothèse  $A w \geq \mu w$ .

Remarquons pour plus tard que le produit de deux matrices positives est une matrice positive. Idem avec une somme.

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^k w \geq \mu^k w$ . La colonne  $A^k w - \mu^k w$  est positive et la matrice  $A$  est positive donc la colonne  $A^{k+1} w - \mu^k A w$  est positive. De même, la colonne  $\mu^k (A w - \mu w)$  est positive.

Par somme, la colonne  $A^{k+1} w - \mu^{k+1} w$  est positive, ce qui donne  $A^{k+1} w \geq \mu^{k+1} w$ .

$\boxed{\text{Par récurrence, l'inégalité } A^k w \geq \mu^k w \text{ est valable pour tout } k \in \mathbb{N}^* .}$

Les vecteurs en présence sont à coefficients positifs. On en déduit l'inégalité  $\|A^k w\|_1 \geq \mu^k \|w\|_1$  puis

$$\frac{\|A^k w\|_1}{\|w\|_1} \geq \mu^k \quad \text{puis} \quad \|A^k\| \geq \mu^k \quad \text{et} \quad \|A^k\|^{1/k} \geq \mu,$$

ce qui donne  $\rho(A) \geq \mu$  en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$  (question 11).

**Question 15.b.** L'hypothèse  $Aw > \mu w$  s'écrit

$$(Aw)_1 > \mu w_1 \quad \dots \quad (Aw)_n > \mu w_n.$$

Notons  $\lambda$  le plus petit des nombres  $(Aw)_i/w_i$  où  $i$  décrit l'ensemble (non vide) des indices tels que  $w_i > 0$ . On a alors  $Aw \geq \lambda w$  et  $\lambda > \mu$ .

Le résultat de la question précédente donne  $\rho(A) \geq \lambda$  donc  $\rho(A) > \mu$ .

**Question 15.c.** Soit un indice  $\ell$  distinct de  $k$ . Le calcul donne

$$(Aw')_\ell - \mu w'_\ell = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{\ell,j} w_j - \mu w_\ell}_{\geq 0} + \underbrace{a_{\ell,k} \varepsilon}_{> 0} > 0.$$

Il reste un coefficient de  $Aw' - \mu w'$  à étudier

$$(Aw')_k - \mu w'_k = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{k,j} w_j - \mu w_k}_{\text{noté } x_k} - (\mu - a_{k,k}) \varepsilon.$$

Le nombre  $x_k$  vaut  $(Aw)_k - w_k$ . Il est donc strictement positif, ce qui permet de choisir  $\varepsilon > 0$  de sorte que  $x_k - (\mu - a_{k,k}) \varepsilon > 0$ , comme précisé ci-dessous.

Si  $\mu - a_{k,k} \leq 0$ , il suffit de prendre  $\varepsilon = 1$ .

Si  $\mu - a_{k,k} > 0$ , il suffit de prendre  $\varepsilon = x_k / (2(\mu - a_{k,k}))$ .

Pour un tel choix de  $\varepsilon$ , on a alors  $Aw' > \mu w'$  et  $w'$  est un vecteur positif non nul donc  $\rho(A) > \mu$  d'après 15.b.

**Question 16.a.** Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . L'égalité  $(Ax)_i = \lambda x_i$  s'écrit

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

On applique l'inégalité triangulaire

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \geq |\lambda| \times |x_i| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} (v_0)_j \geq \rho(A) (v_0)_i.$$

C'est vrai pour tout indice  $i$  donc  $Av_0 \geq \rho(A)v_0$ .

Si on suppose que cette inégalité n'est pas une égalité alors on est dans le cadre des hypothèses de la question 15.c avec  $\mu = \rho(A)$  et  $w = v_0$  donc  $\rho(A) > \rho(A)$ , ce qui est absurde.

Cette absurdité prouve l'égalité  $Av_0 = \rho(A)v_0$ .

**Question 16.b.** Soit  $k$  un indice tel que  $x_k \neq 0$ . On obtient alors les relations

$$\rho(A) = \frac{(Av_0)_k}{(v_0)_k} = \frac{1}{|x_k|} \sum_{j=1}^n a_{k,j} |x_j| \geq a_{k,k} > 0.$$

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a alors

$$(v_0)_i = \frac{(Av_0)_i}{\rho(A)} = \frac{1}{\rho(A)} \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \geq \frac{1}{\rho(A)} a_{i,k} |x_k| > 0.$$

Toutes les coordonnées de  $v_0$  sont strictement positives.

**Question 16.c.** L'inégalité triangulaire écrite à la question 16.a est finalement une égalité. En particulier, on a

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{1,j} x_j|.$$

Le cas d'égalité de la question 13 donne donc l'existence de  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que

$$(a_{1,1}x_1, \dots, a_{1,n}x_n) = \mu(a_{1,1}|x_1|, \dots, a_{1,n}|x_n|).$$

Les  $a_{1,j}$  étant tous non nuls, il vient

$$(x_1, \dots, x_n) = \mu(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Ainsi, le vecteur  $x$  est colinéaire à  $v_0$ . Ces vecteurs sont donc associés à la même valeur propre. Cela prouve l'égalité  $\lambda = \rho(A)$ .

**Question 17.a.** Soit  $x \in F$ . Le calcul donne

$${}^t(Ax)w_0 = {}^t x {}^t A w_0 = \rho(A) {}^t x w_0 = 0$$

donc  $Ax$  appartient à  $F$ . Le sous-espace  $F$  est donc stable par  $\varphi_A$ .

Un autre calcul donne  ${}^t v_0 w_0 = \sum_{i=1}^n (v_0)_i (w_0)_i > 0$  donc  $v_0$  n'est pas dans  $F$ . La droite  $\mathbb{C}v_0$  et  $F$  sont donc en somme directe.

Le sous-espace  $F$  est le noyau de  $\varphi : x \mapsto {}^t x w_0$ , application linéaire de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}$ . Ce n'est pas l'application nulle donc son rang vaut au moins 1 ; son image est incluse dans  $\mathbb{C}$  et de dimension au moins 1 donc son image est  $\mathbb{C}$ . La formule du rang donne donc  $\dim(F) = n - 1$ .

On en déduit l'égalité  $\dim(F) + \dim(\mathbb{C}v_0) = \dim(\mathbb{C}^n)$ . La somme de  $F$  et  $\mathbb{C}v_0$  étant directe, on en déduit que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans  $\mathbb{C}^n$ .

**Question 17.b.** Soit  $\mu$  une valeur propre de  $A$  telle que  $\mu \neq \rho(A)$ . Soit  $v$  un vecteur propre associé.

Le résultat de la question 14 donne  ${}^t v w_0 = 0$  donc  $v \in F$ .

Supposons que  $v$  ait tous ses coefficients réels et positifs (l'un d'entre eux au moins est alors strictement positif). On obtient alors  ${}^t v w_0 > 0$ , ce qui est contradictoire.

Un tel vecteur propre ne peut donc être associé qu'à la valeur propre  $\rho(A)$  : l'énoncé (iii) est démontré.

**Question 18.a.** Soit  $(v_2, \dots, v_n)$  une base de  $F$ . La famille  $\mathcal{V} = (v_0, v_2, \dots, v_n)$  est alors une base de  $\mathbb{C}^n$  car  $\mathbb{C}v_0$  et  $F$  sont supplémentaires. La matrice de  $\varphi_A$  relativement à cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où  $B$  est la matrice de  $\psi$  relativement à la base  $(v_2, \dots, v_n)$  de  $F$ , d'où la factorisation  $\chi_A = (X - \rho(A))\chi_\psi$ .

Aucun élément de  $F$  n'est à coordonnées strictement positives donc  $\rho(A)$  n'est pas une valeur propre de  $\psi$ . Or les autres valeurs propres de  $A$  ont un module strictement inférieur à  $\rho(A)$  donc les racines de  $\chi_\psi$  ont un module strictement inférieur à  $\rho(A)$ .

On en déduit que  $\rho(A)$  est une racine de multiplicité 1 de  $\chi_A$ .

On connaît l'encadrement  $1 \leq \dim(\text{Ker}(A - \rho(A)I_n)) \leq \text{mult}(\rho(A), A) = 1$ . On en déduit que l'espace propre de  $A$  relatif à la valeur propre  $\rho(A)$  est de dimension 1 : c'est la droite dirigée par  $v_0$ .

**Question 18.b.** Le raisonnement de la question précédente donne  $\rho(\psi) < \rho(A)$  donc  $\rho(\psi/\rho(A)) < 1$  en exploitant 7.i.

Le résultat de la question 9 permet d'en déduire que la suite de terme général  $(\psi/\rho(A))^k$  converge vers l'endomorphisme nul de  $F$ .

Soit  $x \in F$ . L'application linéaire  $f \mapsto f(x)$ , définie de  $\mathcal{L}(F)$  vers  $F$ , est continue donc la suite de vecteurs de terme général  $(\psi/\rho(A))^k(x)$  converge vers le vecteur nul de  $F$ .

En d'autres termes, la suite de vecteurs  $(A^k x / \rho(A)^k)_{k \geq 1}$  converge vers le vecteur nul.

**Question 18.c.** Le vecteur  $x$  admet une décomposition (unique) sous la forme

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in F, \quad x_2 \in \mathbb{C}v_0.$$

Notons  $\alpha$  le nombre complexe tel que  $x_2 = \lambda v_0$ . On obtient alors

$${}^t x w_0 = \underbrace{{}^t x_1 w_0}_{=0} + \lambda \underbrace{{}^t v_0 w_0}_{>0} \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0}.$$

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le calcul donne

$$\frac{A^k x}{\rho(A)^k} = \frac{A^k x_1}{\rho(A)^k} + \frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} v_0.$$

Quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , on obtient pour limite le vecteur  $\frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} v_0$ , qui est le projeté de  $x$  sur  $\mathbb{C}v_0$  parallèlement à  $F$ .

Le fait que  $x$  soit positif et non nul donne  $\frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} > 0$ , ce qui achève de démontrer (iv).