

I Nombre de partitions en k parties

I.A Pour former une partition de $[[1, n]]$ en k parties on doit associer à chaque entier de 1 à n l'une des k parties. Il y a donc au maximum k^n partitions.

I.B.1) Il ne peut pas y avoir plus de n parties non vides disjointes pour un ensemble à n éléments donc $S(n, k) = 0$ si $k > n$.

I.B.2) Il n'y a qu'une façon de former une seule partie donc $S(n, 1) = 1$ si $n > 0$.

I.C Dénombrons les partitions de $[[1, n]]$ en k parties.

Premier cas: l'une des parties est $\{n\}$. Il reste à former $k - 1$ parties avec les éléments de $[[1, n - 1]]$ donc $S(n - 1, k - 1)$ possibilités.

Deuxième cas: n est dans une partie qui n'est pas un singleton. Si on supprime n , on obtient une partition de $[[1, n - 1]]$ en k parties. Réciproquement, si on complète une partition de $[[1, n - 1]]$ en k parties en ajoutant n à l'une des parties, on obtient une partition de $[[1, n]]$ en k parties telle que n n'est pas dans un singleton. Comme il y a k possibilités pour le choix de la partie à laquelle on ajoute n , le nombre de partitions de $[[1, n]]$ en k parties telles que n n'est pas dans un singleton est égal à $kS(n - 1, k)$.

On a donc $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$.

I.D.1) def S(n,k):

```

    if n==0 and k==0: return 1
    elif n==0 or k==0: return 0
    else: return S(n-1,k-1)+k*S(n-1,k)

```

I.D.2) Notons $u(n, k)$ le nombre d'opérations pour calculer $S(n, k)$ par cette fonction récursive. Ce nombre vérifie $u(n, k) = u(n - 1, k - 1) + u(n - 1, k) + 2 \geq u(n - 1, k - 1) + u(n - 1, k)$. Comme $u(1, k) = 2 \geq \binom{1}{k}$ on en déduit par récurrence sur n , en utilisant la relation de Pascal, que $u(n, k) \geq \binom{n}{k}$.

II Nombres de Bell

II.A Pour une partition de $[[1, n]]$ le nombre de parties peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n . Le nombre total de partitions de $[[1, n]]$ est donc égal à $\sum_{k=0}^n S(n, k)$ puisque $S(n, 0) = 0$ pour $n \geq 1$.

II.B Pour former une partition de $[[1, n + 1]]$ on peut commencer par choisir la partie contenant $n + 1$. Pour cela on doit compléter $\{n + 1\}$ par une partie de $[[1, n]]$ qui possède k éléments ($0 \leq k \leq n$). k étant fixé il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une telle partie. Ce choix étant fait, il reste à compléter la partie contenant $n + 1$ par une partition des $n - k$ éléments de $[[1, n]]$ qui n'ont pas été choisis: il y a B_{n-k} telles partitions. Pour chaque k entre 0 et n il y a donc $\binom{n}{k} B_{n-k}$ partitions de $[[1, n + 1]]$ telles que $n + 1$ est dans une partie comportant $k + 1$ éléments.

On en déduit que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ en changeant k en $n - k$, puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

II.C Montrons par récurrence forte sur n que $B_n \leq n!$.

C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ puisque $B_0 = B_1 = 1$.

Supposons $B_k \leq k!$ pour $0 \leq k \leq n$. On en déduit avec la formule du II.B:

$$B_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \leq \sum_{k=0}^n n! = (n+1)!$$

La majoration est vraie pour $n + 1$, elle est donc vraie pour tout n .

II.D Puisque la suite $\frac{B_n}{n!} r^n$ est majorée pour $r = 1$ on en déduit que le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$$

est au moins égal à 1.

II.E Pour $x \in]-R, R[$ on peut dériver terme à terme la série entière; on obtient $f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} =$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n \text{ en changeant } n \text{ en } n+1.$$

D'autre part le produit de Cauchy des séries entières de sommes $f(x)$ et e^x donne pour $x \in]-R, R[$:

$$e^x f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k = \frac{B_{n+1}}{n!} \text{ en utilisant le II.B.}$$

On a donc bien montré $f'(x) = e^x f(x)$.

II.F On en déduit que $f(x) = \lambda e^{e^x}$ avec de plus $f(0) = 1 = \lambda e$ donc $f(x) = e^{e^x - 1}$.

III Une suite de polynômes

III.A La famille (H_0, \dots, H_n) est libre puisque les polynômes ont des degrés échelonnés. Tous les polynômes sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et ils sont au nombre de $n+1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. La famille est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.B.1) $H_{k+1}(X) = (X-k)H_k(X)$ donc $H_{k+1}(X) + kH_k(X) = XH_k(X)$

III.B.2) Montrons par récurrence sur n que $X^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)H_k(X)$.

C'est vrai pour $n=0$ car $S(0,0) = 1$ et $H_0(X) = 1$.

Supposons la propriété vraie pour n .

$$\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1, k)H_k(X) = \sum_{k=1}^{n+1} (S(n, k-1) + kS(n, k))H_k(X) \text{ en utilisant la relation du I.C.}$$

En posant $k = k' + 1$ on obtient $\sum_{k=1}^{n+1} S(n, k-1)H_k(X) = \sum_{k'=0}^n S(n, k')H_{k'+1}(X)$. D'autre part $S(n, n+1) = 0$.

Par suite $\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1, k)H_k(X) = \sum_{k=0}^n S(n, k)(H_{k+1}(X) + kH_k(X)) = \sum_{k=0}^n S(n, k)XH_k(X)$ en utilisant le III.B.1).

On en déduit avec l'hypothèse de récurrence: $\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1, k)H_k(X) = X^{n+1}$.

III.C.1) $0 \leq S(n, k) \leq B_n \leq n!$ donc $\frac{S(n, k)}{n!}$ est borné et par suite le rayon de convergence de $(\sum \frac{S(n, k)}{n!} x^n)$ est au moins égal à 1. f_k est donc définie sur $] -1, 1[$.

III.C.2) Pour $k \geq 1$ on a: $g'_k(x) = \frac{(e^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!} e^x = \frac{(e^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!} + kg_k(x)$ en posant $e^x = 1 + (e^x - 1)$.

III.C.3) Montrons par récurrence sur k que $f_k(x) = g_k(x)$ pour $x \in] -1, 1[$. C'est vrai pour $k=0$ puisque $g_0(x) = 1 = S(0,0)$ et $S(n,0) = 0$ pour $n \geq 1$.

Supposons l'égalité vraie pour $k-1$. Pour $x \in] -1, 1[$ on a: $f'_k(x) = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n' \geq k-1} S(n'+1, k) \frac{x^{n'}}{n!'}$

en posant $n = n' + 1$.

Avec le I.C on obtient: $f'_k(x) = \sum_{n \geq k-1} (S(n, k-1) + kS(n, k)) \frac{x^n}{n!}$ d'où $f'_k(x) = g_{k-1}(x) + kf_k(x)$ en utilisant

l'hypothèse de récurrence pour $k-1$ (et $S(k-1, k) = 0$).

f_k vérifie donc l'équation différentielle du III.C.2). Comme de plus $f_k(0) = 0 = g_k(0)$ on déduit de l'unicité de la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiant une condition initiale (problème de Cauchy) que $f_k = g_k$ sur $] -1, 1[$.

III.D.1) Le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ donne pour $x \in] -1, 1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha) \frac{x^k}{k!}.$$

III.D.2) $x = e^u - 1 \in] -1, 1[\iff u < \ln 2$. On a alors $e^{u\alpha} = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha) \frac{(e^u - 1)^k}{k!}$.

IV Fonctions génératrices

IV.A Si $G_Y(t) = \sum_{n \geq 0} P(Y = n)t^n$ a un rayon de convergence strictement supérieur à 1 alors on peut dériver m fois au point $t = 1$ et obtenir $G_Y^{(m)}(1) = \sum_{n \geq m} P(Y = n)n(n-1)\dots(n-m+1)$. On en déduit par récurrence sur m que $\sum_{n \geq 0} P(Y = n)n^m$ converge pour tout entier $m \geq 1$.

IV.B.1) $G_Y(t) = \sum_{n \geq 0} P(Y = n)t^n$ ayant un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 on peut dériver m fois pour $t \in]-1, 1[$: $G_Y^{(m)}(t) = \sum_{n \geq m} P(Y = n)n(n-1)\dots(n-m+1)t^{n-m}$. Par hypothèse les séries $(\sum_{n \geq 0} P(Y = n)n^k)$ convergent pour tout $k \geq 0$ donc on obtient que la limite de $G_Y^{(m)}(t)$ quand t tend vers 1 (resp -1) existe: G_Y est donc de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.

IV.B.2) On obtient $G_Y^{(k)}(1) = \sum_{n \geq k} P(Y = n)n(n-1)\dots(n-k+1) = \sum_{n \geq k} P(Y = n)H_k(n)$.

IV.B.3) Donnons un exemple où la fonction génératrice G_Y a un rayon de convergence égal à 1.

Soit $A = \sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n}}$, série convergente puisque $e^{-\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$. $G_Y(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{A} e^{-\sqrt{n}} t^n$ est une fonction génératrice qui a un rayon de convergence égal à 1: en effet pour $t > 1$, $e^{-\sqrt{n}} t^n = e^{-\sqrt{n} + n \ln t}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'autre part, pour tout $m \geq 1$ la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{A} e^{-\sqrt{n}} n^m$ converge puisque $e^{-\sqrt{n}} n^m = o(\frac{1}{n^2})$.

IV.C.1) Pour la loi de Poisson de paramètre 1 on a $P(Y = k) = e^{-1} \frac{1}{k!}$ d'où $G_Y(t) = \sum_{k \geq 0} e^{-1} \frac{t^k}{k!} = e^{t-1}$.

$$\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{k \geq 0} e^{-1} \frac{k^n}{k!} = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^n S(n, j) H_j(k) \text{ en utilisant le III.B.2).}$$

On en déduit en permutant les deux sigma (chacune des séries converge):

$$\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{j=0}^n S(n, j) \sum_{k \geq 0} H_j(k) P(Y = k).$$

Avec le IV.B.2, $\sum_{k \geq 0} H_j(k) P(Y = k) = G_Y^{(j)}(1) = G_Y(1) = 1$. On obtient que $\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{j=0}^n S(n, j) = B_n$.

IV.C.2) Si $Q(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ est un polynôme à coefficients entiers on déduit de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^k}{n!} = e \mathbb{E}(Y^k) = e B_k$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{Q(n)}{n!} = e \sum_{k=0}^d a_k B_k \text{ qui est bien le produit de } e \text{ par un entier.}$$

V Sommes de puissances

V.A La fonction $t \mapsto t^n$ étant croissante sur $[k, k+1]$ on en déduit $k^n \leq \int_k^{k+1} t^n dt \leq (k+1)^n$ d'où en ajoutant les inégalités: $\int_0^p t^n dt \leq U_n(p) \leq \int_0^{p+1} t^n dt$.

On déduit en calculant les intégrales: $\frac{p^{n+1}}{n+1} \leq U_n(p) \leq \frac{(p+1)^{n+1}}{n+1}$.

Comme $(p+1)^{n+1} \sim p^{n+1}$ quand p tend vers $+\infty$ on obtient $U_n(p) \sim \frac{p^{n+1}}{n+1}$ quand p tend vers $+\infty$.

V.B $\Delta_n(H_k) = H_k(X+1) - H_k(X) = (X+1)X\dots(X+2-k) - X(X-1)\dots(X-k+1) = (X+1-X+k-1)H_{k-1} = kH_{k-1}$.
La matrice A a tous ses coefficients nuls sauf $A_{i, i+1} = i$ pour $i \in [[1, n]]$.

V.C En utilisant le III.B.2): $U_n(p) = \sum_{k=0}^p k^n = \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^n S(n, j) H_j(k) = \sum_{j=0}^n S(n, j) \sum_{k=0}^p H_j(k)$ en permutant les sigma.

Avec le V.B on peut écrire $\sum_{k=0}^p H_j(k) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{j+1} (H_{j+1}(k+1) - H_{j+1}(k)) = \frac{1}{j+1} (H_{j+1}(p+1) - H_{j+1}(0))$ par

télescopage. Puisque $H_{j+1}(0) = 0$ on obtient finalement $U_n(p) = \sum_{j=0}^n S(n, j) \frac{1}{j+1} H_{j+1}(p+1)$.

V.D.1) $Q(X) = \frac{X(X+1)}{2}$.

V.D.2) $\Phi(P(X)) = \Delta(P(\frac{1}{2}X(X-1))) = P(\frac{1}{2}X(X+1)) - P(\frac{1}{2}X(X-1))$.

Φ est bien une application linéaire puisque $\Phi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda \Phi(P_1) + \Phi(P_2)$.

Puisque P est dans F , $P(X)$ est combinaison linéaire des X^k avec $1 \leq k \leq n$. $\Phi(X^k) = \frac{1}{2^k} X^k (X+1)^k - \frac{1}{2^k} X^k (X-1)^k = \frac{X^k}{2^k} ((X+1)^k - (X-1)^k) = \frac{X^k}{2^k} 2 \sum_{j \geq 0} \binom{k}{2j+1} X^{k-2j-1} = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{j \geq 0} \binom{k}{2j+1} X^{2(k-j)-1}$.

$\Phi(X^k)$ est donc combinaison linéaire de puissances impaires de X comprises entre X et X^{2n-1} puisque $1 \leq k \leq n$. Par suite Φ va bien de F dans G .

$\Phi(P(X)) = 0$ entraîne que pour tout entier n on a $P(1+2+\dots+n) = P(0) = 0$ ($P \in F$). Le polynôme P ayant une infinité de racines il est nul et par suite $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$: Φ est injective.

Comme de plus F et G ont la même dimension égale à n on en déduit que Φ est un isomorphisme de F sur G .

V.D.3) En utilisant l'isomorphisme précédent et en choisissant $n \geq r+1$ on obtient qu'il existe un unique polynôme P_r appartenant à F tel que $X^{2r+1} = \Phi(P_r(X)) = P_r(\frac{1}{2}X(X+1)) - P_r(\frac{1}{2}X(X-1))$. On en déduit:

$$\sum_{k=1}^p k^{2r+1} = \sum_{k=1}^p \left(P_r \left(\frac{k(k+1)}{2} \right) - P_r \left(\frac{k(k-1)}{2} \right) \right) = P_r \left(\frac{p(p+1)}{2} \right) \text{ par télescopage (avec } P_r(0) = 0 \text{ puisque } P_r \in F).$$

V.E.1) Si $P_r(X)$ a pour terme dominant $a_d X^d$ on en déduit que $P_r \left(\frac{p(p+1)}{2} \right) \sim a_d \left(\frac{p(p+1)}{2} \right)^d$. L'équivalent obtenu au V.A donne $U_{2r+1}(p) \sim \frac{p^{2r+2}}{2r+2}$. Cela entraîne $d = r+1$ et $a_d = \frac{2^r}{r+1}$.

$P_r(X)$ a donc pour terme dominant $\frac{2^r}{r+1} X^{r+1}$.

V.E.2) Puisque P_r est dans F son terme constant est nul.

En dérivant $X^{2r+1} = P_r(\frac{1}{2}X(X+1)) - P_r(\frac{1}{2}X(X-1))$ on obtient $(2r+1)X^{2r} = \frac{(2X+1)}{2} P_r'(\frac{1}{2}X(X+1)) - \frac{(2X-1)}{2} P_r'(\frac{1}{2}X(X-1))$ qui donne en remplaçant X par 0: $0 = P_r'(0)$ (pour $r \geq 1$).

Le coefficient de X dans $P_r(X)$ est donc nul et par suite X^2 divise $P_r(X)$.

V.E.3) Le V.E.1 donne que $P_1(X)$ a pour terme dominant X^2 donc il est égal à X^2 .

Le V.E.1 donne que $P_2(X)$ a pour terme dominant $\frac{4}{3}X^3$ donc il est égal à $\frac{4}{3}X^3 + \lambda X^2$.

Pour $p = 1$ on obtient $P_2(1) = 1$ d'où $\frac{4}{3} + \lambda = 1$, donc $\lambda = -\frac{1}{3}$ et $P_2(X) = \frac{4}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2$.

On ferait de même pour calculer $P_3(X) = 2X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2$.

$P_3(1) = 1$ donne $\lambda + \mu = -1$.

Pour $p = 2$, $P_3(3) = 162 + 27\lambda + 9\mu = 129$ d'où $\lambda = -\frac{4}{3}$ et $\mu = \frac{1}{3}$. On a donc $P_3(X) = 2X^4 - \frac{4}{3}X^3 + \frac{1}{3}X^2$.

Remarque 1: $P_2(X) + P_3(X) = 2X^4$ donc $\sum_{k=1}^p (k^5 + k^7) = \frac{1}{8}(p(p+1))^4$.

Remarque 2: On peut aussi répondre aux questions du V.E en posant $P_r(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ et en écrivant $X^{2r+1} =$

$$P_r(\frac{1}{2}X(X+1)) - P_r(\frac{1}{2}X(X-1)) = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{2^{k-1}} \sum_{j \geq 0} \binom{k}{2j+1} X^{2(k-j)-1} \text{ (en utilisant le calcul fait au V.D.2).}$$