Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES II **Filière** PSI

Notations et définitions

• *On désigne la matrice* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ *par la notation* $diag(a,b,c)$. *Ainsi* $diag(1,1,1)$ *est la matrice identité* I_3.

• *L'espace vectoriel des matrices réelles* 3×3, *noté* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *est muni du produit scalaire usuel* $\langle A,B\rangle = Tr\big(({}^tA)B\big) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}b_{i,j}$.

• *On note* $\|\ \|$ *la norme associée :* $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle$.

• *On note* $O_3(\mathbb{R})$ *le groupe des matrices orthogonales,* $S_3(\mathbb{R})$ *l'espace des matrices symétriques, et* $S_3^+(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices symétriques positives de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *c'est-à-dire des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.*

• *Si* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *et* P *est une partie non vide de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *la distance de* A *à* P *est, par définition :*

$$d(A,P) = \inf_{B\in P} \|A-B\|$$

• *Si* P *et* Q *sont deux parties non vides de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *la distance entre* P *et* Q *est :*

$$d(P,Q) = \inf_{A\in P,\ B\in Q} \|A-B\|$$

On a aussi (et on l'admettra) $d(P,Q) = \inf_{A\in P} d(A,Q)$.

Partie I - Généralités sur les distances

I.A - Si $A \in O_3(\mathbb{R})$, calculer $\|A\|$.

I.B - Démontrer que $O_3(\mathbb{R})$ est une partie bornée. En déduire que $O_3(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.C - Démontrer que l'application $M \mapsto \|M\|$, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est continue.

I.D - Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe

$$U \in O_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } d\big(A, O_3(\mathbb{R})\big) = \|A-U\|.$$

I.E - Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(M) = d(M, O_3(\mathbb{R}))$.

I.E.1) Soient $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Démontrer que :

$$\forall U \in O_3(\mathbb{R}),\ d\big(M, O_3(\mathbb{R})\big) \leqslant \|N-U\| + \|N-M\|,$$

puis que :

$$d\big(M, O_3(\mathbb{R})\big) \leqslant d\big(N, O_3(\mathbb{R})\big) + \|N-M\|.$$

I.E.2) En déduire que Φ est continue.

I.F - Soit P un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $r \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$B_r = \big\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ \big|\ \|M\| \leqslant r\big\}.$$

I.F.1) Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que $d\big(P, O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(P\cap B_r, O_3(\mathbb{R})\big)$.

I.F.2) Démontrer qu'il existe $A \in P$ telle que $d\big(P, O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(A, O_3(\mathbb{R})\big)$.

Partie II - Décomposition polaire

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

II.A - Démontrer que ${}^tMM$ est symétrique à valeurs propres positives.

II.B - Démontrer qu'il existe $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives telle que ${}^tMM = S^2$.

II.C - Démontrer que si M est inversible, il existe $U \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $M = US$.

On admettra que le résultat reste vrai si M *est non inversible, c'est-à-dire : « Si* $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *il existe* $U \in O_3(\mathbb{R})$ *et* $S \in S_3^+(\mathbb{R})$, *telles que* $M = US$ *(décomposition polaire) ».*

II.D - Étude d'un exemple

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

En appliquant la méthode décrite ci-dessus déterminer $U \in O_3(\mathbb{R})$ et $S \in S_3^+(\mathbb{R})$ telles que $M = US$.

- version du 19 février 2008 17h4

Partie III - Distance à $O_3(\mathbb{R})$

III.A -

III.A.1) Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $U \in O_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.
En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe une matrice D diagonale à coefficients positifs telle que :

$$d\big(A, O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(D, O_3(\mathbb{R})\big).$$

III.A.2) En déduire que si $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe $\mathcal{W}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant :

- $\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V})$
- $d\big(\mathcal{W}, O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big)$
- Il existe $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{W}$ où les λ_i sont dans $\mathbb{R}^+$, telle que $d\big(\mathcal{W}, O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(D, O_3(\mathbb{R})\big)$.

III.B - Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, où les λ_i sont dans $\mathbb{R}^+$.

III.B.1) Si $U \in O_3(\mathbb{R})$, montrer que $\|D - U\|^2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2\right) - 2\langle U, D\rangle + 3$.

III.B.2) Si $U \in O_3(\mathbb{R})$, montrer que $\langle U, D\rangle \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i$.

III.B.3) En déduire que $d\big(D, O_3(\mathbb{R})\big) = \|D - I_3\|$.

III.C - Étude d'un exemple

Pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ définie dans la question **II.D**, calculer la distance $d\big(M, O_3(\mathbb{R})\big)$.

Partie IV - Cas d'un sous-espace de dimension 6

IV.A - Dans cette question seulement, $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\}$.

IV.A.1) Soit $A \in \mathcal{V}$. En considérant les valeurs propres de ${}^tAA$, démontrer l'inégalité : $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \geqslant 1$.

IV.A.2) Calculer $d(I_3, \mathcal{V})$, puis en déduire la valeur de $d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big)$.

Dans toute la suite du problème $\mathcal{V}$ désigne un sous-espace vectoriel de dimension 6 quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose de démontrer que $d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big) \leqslant 1$.

À l'aide de la partie III, on se ramène au cas où $d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big) = \|D - I_3\|$, avec $D = diag(x, y, z) \in \mathcal{V}$, et $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.
On suppose $D \neq I_3$, sinon, $d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big) = 0$, et l'inégalité est vraie.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $R_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$,
et $R_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

IV.B - Comparer $(D - I_3)^\perp$ et $\mathcal{V}$.

IV.C - Vérifier que $\big(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0)\big)$ est une famille libre formée de matrices orthogonales à $I_3 - D$.
Démontrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) \in \mathcal{V}$.

a, b, c sont ainsi fixés pour la suite, et on pose $f : t \in \mathbb{R} \mapsto R_1(at)R_2(bt)R_3(ct)$.

IV.D - Démontrer que f a un développement limité du type :
$f(t) = I_3 + tA + t^2(B + C) + t^2\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ où $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient :

- $A \in \mathcal{V}$
- B orthogonale à $I_3 - D$
- $C = \dfrac{1}{2} diag(-a^2 - b^2, -a^2 - c^2, -b^2 - c^2)$.

Dans la suite, ε est la fonction apparaissant dans ce développement limité de f.

IV.E - Justifier que : $\big\|I_3 + t^2\big(B + C + \varepsilon(t)\big) - D\big\| \geqslant \|I_3 - D\|$.

IV.F - Établir que :

$$\left\| I_3 + t^2\big(B + C + \varepsilon(t)\big) - D \right\|^2 = \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle I_3 - D, C\rangle + t^2\varepsilon_2(t)$$

avec $\varepsilon_2(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Qu'en déduire sur $\langle I_3 - D, C\rangle$?

IV.G - Démontrer que l'un au moins des trois réels $2-x-y$, $2-y-z$, $2-x-z$ est négatif ou nul.

On suppose pour la suite, ce qui ne change rien, que $2-x-y \leqslant 0$.

IV.H - Démontrer que $x^2+y^2+z^2 = x+y+z$.

IV.I - Identifier géométriquement les ensembles suivants :

- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 = x+y+z\right\}$,
- $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y = 2\right\}$,
- $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y \geqslant 2\right\}$.

Justifier que $E \cap F$ est un cercle dont on déterminera le rayon.
Quel est le diamètre de $E \cap G$ (c'est-à-dire la distance maximum entre deux de ses points) ?

IV.J - Démontrer que $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \leqslant 1$.

• • • FIN • • •
