Corrigé de centrale 2008 Math2 -PSI

Proposé par Abdelaziz KHOUTAIBI
professeur de maths en PSI au lycée Ibnou Taimia à Marrakech

Partie I

I.A $A \in O_3(\mathbb{R})$, donc ${}^tAA = I_3$ et $\|A\| = \sqrt{Tr(I_3)} = \sqrt{3}$

I.B $\forall A \in O_3(\mathbb{R}), \|A\| = \sqrt{3}$, donc $O_3(\mathbb{R})$ est inclus dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $\sqrt{3}$ pour la norme $\|.\|$ et par suite il est borné .
D'autre part, $O_3(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_3\})$ où $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tMM$ qui est continue comme composée de l'application linéaire $M \mapsto (M, M)$ et l'application bilinéaire $(A, B) \mapsto {}^tAB$, toutes les deux continues car $M_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie,

Comme $\{I_3\}$ est un fermé de $M_3(\mathbb{R})$ alors, d'aprés le cours, $O_3(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_3(\mathbb{R})$.

I.C $\forall\, (M, N) \in (M_3(\mathbb{R}))^2, |\|M\| - \|N\|| \leq \|M - N\|$, donc $M \mapsto \|M\|$ est 1-lipshitzienne et par suite elle est continue sur $M_3(\mathbb{R})$.

I.D L'application $M \mapsto \|A - M\|$ est continue de $M_3(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$,et $O_3(\mathbb{R})$ est un compact, donc d'aprés un thérème du cours (evn), elle y est bornée et atteint ses bornes, en particulier:
$\exists U \in O_3(\mathbb{R}), d(A, O_3(\mathbb{R})) = \inf\limits_{M \in O_3(\mathbb{R})} \|A - M\| = \|A - U\|$

I.E

I.E.1) Soit $M, N \in M_3(\mathbb{R})$ et $U \in O_3(\mathbb{R})$, alors :$d(M, O_3(\mathbb{R})) \leq \|M - U\| \leq \|M - N\| + \|N - U\|$
Donc :$\forall\, U \in O_3(\mathbb{R}), d(M, O_3(R)) - \|M - N\| \leq \|N - U\|$ et par suite:
$d(N, O_3(\mathbb{R})) = \inf\limits_{U \in O_3(\mathbb{R})} \|N - U\| \geq d(M, O_3(\mathbb{R})) - \|M - N\|$

I.E.2 D'aprés [I.E.1] on a $\forall\, (M, N) \in (M_3(\mathbb{R}))^2, d(M, O_(\mathbb{R})) - d(N, O_3(\mathbb{R}) \leq \|N - M\|$ et
$d(N, O_(\mathbb{R})) - d(M, O_3(\mathbb{R}) \leq \|M - N\| = \|N - M\|$, d'où:
$\forall\, (M, N) \in (M_3(\mathbb{R}))^2, |d(M, O_3(\mathbb{R})) - d(N, O_3(\mathbb{R})| \leq \|N - M\|$, ainsi Φ est 1-lipshitzienne donc elle est continue.

I.F

I.F.1 Posons $\alpha = d(P, O_3(R))$ et soit $P_0 = \{M \in P / \Phi(M) \leq \Phi(0)\}$ alors $\alpha = \inf\limits_{M \in P_0} \Phi(M)$.

Soit $M \in P_0$, d'apré ID, il existe $U \in O_3(\mathbb{R})$ tel que :$\Phi(M) = \|M - U\|$

donc $\|M\| \leq \Phi(M) + \|U\| = \Phi(M) + \sqrt{3} \leq \Phi(0) + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$(car d'aprés I.A $\Phi(0) = \sqrt{3}$)

Posons $r = 2\sqrt{3}$, on a donc :$P_0 \subset P \cap B_r$

Donc :$\alpha \geq \inf\limits_{M \in P \cap B_r} \Phi(M) \geq \inf\limits_{M \in P} \Phi(M) = \alpha$

D'où $\alpha = \inf\limits_{M \in P \cap B_r} \Phi(M) = d(P \cap B_r, O_3(\mathbb{R}))$

I.F.2 D'aprés I.F.1) il existe $r \geq 0$ tel que $d(P, O_3(\mathbb{R})) = d(M_3(\mathbb{R}) \cap B_r, O_3(\mathbb{R})) = \inf\limits_{M \in P \cap B_r} \Phi(M)$, or $P \cap B_r$ est fermé comme intersection des des deux fermés P(car sev de $M_3(\mathbb{R})$) et B_r (boule fermée)
$P \cap B_r$ est bornée car partie de la boule fermée B_r qui est bornée, donc $P \cap B_r$ est un compact de $M_3(R)$.
Φ étant continue, elle atteint sa borne inférieuer sur $P \cap B_r$, d'où l'existence de $A \in P \cap B_r$ tel que $d(P, O_3(\mathbb{R})) = \Phi(A) = d(A, O_3(\mathbb{R}))$

Partie II

II.A
- ${}^t({}^tMM) = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM$, donc ${}^tMM \in S_3(\mathbb{R})$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ${}^tMM$, alors il existe $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et ${}^tMMX = \lambda X$, donc ${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \lambda{}^tXX$,or ${}^t(MX)MX = \|MX\|_2^2 \geq 0$ (où $\|.\|_2$ est la norme euclidienne usuelle de $M_{3,1}(\mathbb{R})$), d'où $\lambda = \dfrac{\|MX\|_2^2}{\|X\|_2^2} \geq 0$

II.B ${}^tMM$ est symétrique réelle, donc d'aprés un théorème du cours, elle est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale ,ainsi $\exists P \in O_3(\mathbb{R})$ et $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ telles que ${}^tMM = P\Delta{}^tP$,et comme, $\lambda_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$, alors ${}^tMM = S^2$, où $S = PD{}^tP$ et $D = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$

II.C M inversible donc $\lambda_i > 0, 1 \leq i \leq 3$, donc S aussi inversible, on pose $U = MS^{-1}$,
On a: ${}^tMM = S{}^tUUS = S^2$, donc ${}^tUU = I_3$ et parsuite $U \in O_3(\mathbb{R})$

II.D On obtient directement : ${}^tMM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ Le polynome caractéristique de ${}^tMM$ est $(1-X)^2(4-X)$,

$E_1 = vect(e_1, e_2)$, $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, \sqrt{2})$.
$E_4 = vect(e_3)$ où $e_3 = (0, -\sqrt{2}, 1)$.

$E_1 \perp E_4$ et les vecteurs e_2 et e_3 sont orthogonaux, on constuit une b.o.n de vecteurs propres de ${}^tMM$ en posant $\varepsilon_i = \dfrac{e_i}{\|e_i\|}$,$i = 1, 2, 3$, ce qui donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

On alors $S = Pdiag(1, 1, 2){}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$U = MPD^{-1t}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Partie III

III.A

III.A.1) $\|UA\|^2 = Tr({}^t(UA)UA) = Tr({}^tA{}^tUUA) = Tr({}^tAA) = \|A\|^2$,donc $\|UA\| = \|A\|$
de même on a $\|AU\| = \|A\|$
D'aprés $I.D$, il exsiste $\Omega \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $d(A, O_3(\mathbb{R}) = \|A - \Omega\|$ et d'aprés II.C, il existe $U \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $A = US$, ainsi $\forall\, \Omega \in O_3(\mathbb{R})$:
$\|A - \Omega\| = \|US - \Omega\| = \|U(S - U^{-1}\Omega)\| = \|S - U^{-1}\Omega\| = \|PDP^{-1} - U^{-1}\Omega\|$
$= \|P(D - P^{-1}U^{-1}\Omega P)P^{-1}\| = \|D - P^{-1}U^{-1}\Omega P\|$
Or $O_3(\mathbb{R})$ est un groupe pour la mutiplication , donc $P-1U^{-1}\Omega P$ décrit $O_3(\mathbb{R})$ tout entier lorsque Ω décrit $O_3(\mathbb{R})$ et par suite :
$d(A, O_3(\mathbb{R})) = \inf\limits_{\Omega \in O_3(\mathbb{R})} \|A - \Omega\| = \inf\limits_{\Omega \in O_3(\mathbb{R})} \|D - P^{-1}U^{-1}\Omega P\| = d(D, O_3(\mathbb{R}))$

III.A.2) D'aprés I.F.2, il existe $A \in V$ telle que :$d(V, O_3(\mathbb{R})) = d(A, O_3(\mathbb{R}))$.

Soit U et P les matrices associées à A de la question III.A.1 et $W = \{P^{-1}U^{-1}MP/M \in V\}$,alors

- $W = \Psi(V)$ où $\Psi : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R}), M \mapsto P^{-1}U^{-1}MP$ qui est linéaire et injective (facile), donc c'est un autotmorphisme de $M_3(\mathbb{R})$ et par suite W est un sev de $M_3(\mathbb{R})$ isomorphe à V, donc $\dim(W) = \dim(V)$
- $D = P^{-1}U^{-1}AP \in W$
- Soit $N \in W$,$d(N, O_3(\mathbb{R})) = \inf\limits_{\Omega \in O_3(\mathbb{R}))} \|N - \Omega\|$

  Or $N \in W$, donc $\exists M \in V, N = \Psi(M)$,

  Donc $\|N - \Omega\| = \|\Psi(M) - \Omega\| = \|P^{-1}U^{-1}MP - \Omega\|$

  Or d'apré la qustion III.A..1$\|\Psi(M) - \Omega\| = \|M - \Psi^{-1}(\Omega)\|$ et

  $\Psi^{-1}(O_3(\mathbb{R})) = \{UP\Omega P^{-1}/\Omega \in O_3(\mathbb{R})\} = O_3(\mathbb{R})$, car $P, U, P^{-1} \in O_3(\mathbb{R})$ et $(O_3(\mathbb{R}), \times)$ groupe.

  Ainsi $\inf\limits_{\Omega \in O_3(\mathbb{R})} \|N - \Omega\| = \inf\limits_{\Omega \in O_3(\mathbb{R})} \|M - \Psi^{-1}(\Omega)\|$, c.à.d :$d(N, O_3(\mathbb{R})) = d(M, O_3(\mathbb{R}))$

  Et $\inf\limits_{N \in W} d(N, O_3(\mathbb{R})) = \inf\limits_{M \in V} d(M, O_3(\mathbb{R}))$

  D'où $d(W, O_3(\mathbb{R})) = d(V, O_3(\mathbb{R}))$
- $d(W, O_3(\mathbb{R})) = d(A, O_3(\mathbb{R})) = d(D, O_3(\mathbb{R}))$d'aprés III.A.1

III.B

III.B.1) $\|D - U\|^2 = \|D\|^2 - 2 < U, D > + \|U\|^2$

Or $\|D\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i^2$, $\|U\|^2 = 3$, car $U \in O_3(\mathbb{R})$, d'où :$\|D - U\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - 2 < U, D > +3$

III.B.2) Posons $U = (u_{ij})$, alors $< U, D >= \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i u_{ii}$,

Or $U \in O_3(\mathbb{R})$, donne $|u_{ii}| \leq 1$ et comme $\lambda_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$, alors:

$< U, D > \leq \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i$

III.B.3) Comme $I_3 \in O_3(\mathbb{R})$, alors $d(D, O_3(\mathbb{R})) \leq \|D - I_3\|$

D'autre part:$\forall\, U \in O_3(\mathbb{R}), \|D - U\|^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - 2 \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i + 3 = \|D - I_3\|^2$,

donc $\forall\, U \in O_3(\mathbb{R}), \|D - U\| \geq \|D - I_3\|$

Et par suite $d(D, O_3(\mathbb{R})) \geq \|D - I_3\|$.

D'où $d(D, O_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|$

III.C D'aprés $III.A$,on a $d(M, O_3(\mathbb{R})) = d(D, O_(\mathbb{R})$ où $D = diag(1, 1, 2)$ a été calculée dans la question II.D

Et d'aprés la qustion III.B.3), $d(D, O_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\| = 1$

Conclusion:$d(M, O_3(\mathbb{R})) = 1$

Partie III

IV.A

IV.A) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$,

On écrit la décomposition polaire de A: $A = US$, avec $S = PD^tP$, $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et ${}^tAA = S^2$

$S^2 =^t AA \Rightarrow (det(S))^2 = \det({}^tAA) = (det(A))^2 = 0$,

donc $\det(S) = 0$ et par suite l'un des λ_i est nul, par exemple $\lambda_3 = 0$, alors

$\|D - I_3\|^2 = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + 1 \geq 1$.

d'où $d(V, O_3(\mathbb{R})) = \|I_3 - D\| \geq 1$

IV.A.2 Soit $A \in V$ alors $\|A - I_3\|^2 = (a-1)^2 + (d-1)^2 + c^2 + e^2 + b^2 + f^2 + 1 \geq 1$, et pour $a = d = 1, b = c = e = f = 0$ on on obtient $\|A - I_3\| = 1$, d'où $d(I_3, V) = 1$.
Or $d(V, O_3(R)) = \inf\limits_{U \in O_3(\mathbb{R})} d(U, V) \leq d(I_3, V) = 1$
Conclusion :$d(V, O_3(\mathbb{R})) = 1$

IV.B On va montrer que $V \subset (D - I_3)^\perp$

Première méthode:
On a $\|D - I_3\| = d(V, O_3(\mathbb{R})) \geq d(V, I_3) \geq \|D - I_3\|$ (Car $D \in V$)

De $d(I_3, V) = \|D - I_3\|$ et $D \in V$, on conclut que D est la projecton orthogonale de I_3 sur V, donc $D - I_3 \in V^\perp$

D'où $V \subset (D - I_3)^\perp$
Deuxième méthode:
Soit $A \in V$, alors $\forall\, t \in \mathbb{R}, \|tA - (D - I_3)\|^2 - \|D - I_3\|^2 = t^2\|A\|^2 - 2t < A, D - I_3 >$

Or $tA - D \in V$, donne, $\|tA - (D - I_3)\|^2 - \|D - I_3\|^2 \geq 0$,

donc $\forall\, t \in \mathbb{R}, t^2\|A\|^2 - 2t < A, D - I_3 > \geq 0$ et par suite $< A, D - I_3 >= 0$,

D'où $A \in (D - I_3)^\perp$ et $V \subset (D - I_3)^\perp$

IV.C Pour dériver les fonctions $R_i, 1 \leq i \leq 3$, on dérive chaque composante , on obtient alors:
$R_1'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_2'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R_3'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Il alors immédiat que $(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0))$ est libre et que $< R_i'(0), (D - I_3) >= 0$ pour $1 \leq i \leq 3$

On pose $W = vect(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0))$

On a $V \subset (D - I_3)^\perp$ et $W \subset (D - I_3F)^\perp$ (Car $R_i'(0) \perp (D - I_3)$ pour $i = 1, 2, 3$).

Si $V \cap W = \{0\}$,alors $V \oplus W \subset (D - I_3)^\perp$, et on alors:

$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) = 6 + 3 \leq \dim(D - I_3)^\perp = 8$ (Car c'est un hyperplan de $M_3(\mathbb{R})$), absurde.

IV.D f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc admet un développement limité en 0 à tout ordre, en particulier elle admet un DL à l'ordre 2 en 0 donné par la formule de Taylor young:
$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + t^2\varepsilon(t)$ où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$, et:
$f(0) = R_1(0)R_2(0)R_3(0) = I_3$, $A = f'0) = aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_2'(0) \in V$,
$f''(0) = a^2R_1''(0) + b^2R_2''(0) + c^2R_3''(0) + 2abR_1'(0)R_2'(0) + 2acR_1'(0)R_3'(0) + 2bcR_2'(0)R_3'(0)$,

Donc $\frac{1}{2}f''(0) = B + C$ où:

$C = \frac{1}{2}(a^2R_1''(0) + b^2R_2''(0) + c^2R_3''(0)) = \frac{1}{2}diag(-a^2 - b^2, -a^2 - c^2, -b^2 - c^2)$, et

$B = abR_1'(0)R_2'(0) + acR_1'(0)R_3'(0) + bcR_2'(0)R_3'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -bc & ac \\ 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien orthogonale à $I_3 - D$

IV.E On a $R_1(at), R_2(bt)$ et $R_3(ct)$ sont dans $O_3(\mathbb{R})$ qui est un groupe pour la multiplication, donc $f(t) \in O_3(\mathbb{R})$ et,

$D, A \in V$ et V sev de $M_3(\mathbb{R})$, donc $D + tA \in V$ et par suite:
$\|f(t) - tA - D\| \geq d(V, f(t)) \geq d(V, O_3(R)) = d(D, O_3(\mathbb{R})) = \|I_3 - D\|$

IV.F $\|I_3 + t^2(B + C + \varepsilon(t)) - D\|^2 = \|I_3 - D\|^2 + 2t^2 < I_3 - D, (B + C + \varepsilon(t) > +t^4\|B + C + \varepsilon(t)\|^2$
Or $< I_3 - D, B >= 0$ d'où:
$\|I_3+t^2(B+C+\varepsilon(t))-D\|^2 = \|I_3-D\|^2+2t^2 < I_3-D, C > +t^2\left(2 < I_3 - D, \varepsilon(t) > +t^2(\|B + C + \varepsilon(t)\|^2\right)$
On pose alors :$\varepsilon_2(t) = 2 < I_3 - D, \varepsilon(t) > +t^2(\|B + C + \varepsilon(t)\|^2)$, la continuité de la norme et du produit scalaire donne: $\varepsilon_2(t) \to 0$ lorsque t tend vers 0.
$\forall\, t \in \mathbb{R}^*, \dfrac{1}{t^2}(\|I_3 + t^2(B + C + \varepsilon(t)) - D\|^2 - \|I_3 - D\|^2) = 2 < I_3 - D, C > +\varepsilon_2(t) \geq 0$
On fait tendre t vers 0 on obtient $< I_3 - D, C >\geq 0$

IV.G D'aprés IV.F $< I_3 - D, C >= \dfrac{-1}{2}(a^2(2 - x - y) + b^2(2 - x - z) + c^2(2 - y - z)) \geq 0$, donc $a^2(2 - x - y) + b^2(2 - x - z) + c^2(2 - y - z) \leq 0$, comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors l'un au mois des réels $2 - x - y, 2 - y - z, 2 - x - y$ est négatif ou nul.

IV.H On a $D \in V \subset (I_3 - D)^{\perp}$, donc $< D, I_3 - D >= 0$, ce qui donne $x(1 - x) + y(1 - y) + z(1 - z) = 0$, c.à.d: $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$

IV.I
- E est la sphére de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- F est un plan affine de direction le plan vectoriel $\pi : x + y = 0$ et passant par le point $(1, 1, 0)$
- G est le demi-espace fermé de frontiére le plan F et ne contenat pas l'origine
  $d(\Omega, F) = \dfrac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < R$, donc $E \cap F$ est un cercle de rayon r et de centre ω projection orthogonale de Ω sur F, ($w(1, 1, \frac{1}{2})$), et de la relation $r^2 + w\Omega^2 = R^2$, on tire que $r = \sqrt{R^2 - w\Omega^2} = \dfrac{1}{2}$

On va montrer que le diamètre de $E \cap G$ est le même que celui du cercle $E \cap F$ c'est à dire $2r = 1$:
Pour cela on choisit un repère orthonormé (Ω, e_1, e_2, e_3) d'origine Ω tel que $\overrightarrow{\omega\Omega} = -de_3$, où $d = \|\overrightarrow{\omega\Omega}\|$

On note $u(\theta) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$

Soit A et B deux point de $E \cap F$, alors :

$\overrightarrow{\Omega A} = r_1u(\theta_1) + z_1e_3$ et $\overrightarrow{\Omega B} = r_1u(\theta_2) + z_2e_3$ avec $z_i \leq -d$ et $r_i^2 + z_i^2 = R^2$ pour $i = 1, 2$.

Donc

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{AB}\|^2 &= \|r_2u(\theta_2) - r_1u(\theta_1) + (z_2 - z_1)e_3\|^2 \\
&= \|r_2u(\theta_2) - r_1u(\theta_1) + (z_2 - z_1)e_3\|^2 \\
&= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(u(\theta_1)/u(\theta_2)) + (z_2 - z_1)^2 \\
&= 2R^2 - 2z_1z - 2r_1r_2(u(\theta_1)/u(\theta_2)) \\
&\leq 2R^2 - 2d^2 + 2r_1r_2.
\end{aligned}$$

D'autre part: $r_1r_2 = \sqrt{R^2 - z_1^2}\sqrt{R^2 - z_2^2} \leq R^2 - d^2$

Donc $\|\overrightarrow{AB}\|^2 \leq 2R^2 - 2d^2 + 2(R^2 - d^2) = 4(R^2 - d^2)$

Finalement: $\|\overrightarrow{AB}\| \leq 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2r$

Avec égalité pour $A = \omega + re_1$ et $B = \omega - re_1$

IV.J $d(V, O_3(\mathbb{R}))^2 = \|I_3 - D\|^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2 = \|\overrightarrow{NM}\|_2^2$, où $M(x,y,z)$ et $N(1,1,1)$, D'autre part, d'aprés IV.G et IV.H, $M \in E \cap G$, de même $N \in E \cap G$, donc:

$\|\overrightarrow{MN}\|_2 \leq diam(E \cap G) = 1$, donc $d(V, O_3(\mathbb{R})) \leq 1$.