Corrigé Centrale PSI Maths II 2008 par Christophe Hénocq

I.A Si $A \in O_3(\mathbf{R})$ on a ${}^tA\,A = \sqrt{Tr({}^tA\,A)} = \sqrt{3}$.

I.B $O_3(\mathbf{R})$ est borné car il est inclus dans la sphère de centre 0 de rayon $\sqrt{3}$. Par ailleurs l'application $M \longmapsto {}^tM\,M$ est continue sur $M_3(\mathbf{R})$. Donc $O_3(\mathbf{R})$ qui est l'image réciproque du fermé $\{I_3\}$ est fermé. On en déduit que $O_3(\mathbf{R})$ est compact.

I.C L'application $M \longmapsto \|M\|$ est continue car elle est 1-lipschitzienne ($|\,\|M\| - \|N\|\,| \leq \|M - N\|$).

I.D L'application $M \longmapsto \|A - M\|$ est continue car elle est 1-lipschitzienne. Elle transforme donc le compact $O_3(\mathbf{R})$ en une partie compacte de $\mathbf{R}$. En particulier, elle atteint sa borne inférieure sur $O_3(\mathbf{R})$. Donc il existe une matrice U orthogonale telle que $\|A - U\| = d(A, O_3(\mathbf{R}))$.

I.E.1) On a $d(M, O_3(\mathbf{R})) \leq \|M - U\| \leq \|M - N\| + \|N - U\|$. Donc, pour tout $U \in O_3(\mathbf{R})$, on a $d(M, O_3(\mathbf{R})) - \|M - N\| \leq \|N - U\|$. Par définition de la borne inférieure (le plus grand des majorants), on a $d(M, O_3(\mathbf{R})) - \|M - N\| \leq d(N, O_3(\mathbf{R}))$ donc $d(M, O_3(\mathbf{R})) - d(N, O_3(\mathbf{R})) \leq \|M - N\|$.

I.E.2) Les rôles de M et N étant interchangeables on a $\|\Phi(M) - \Phi(N)\| \leq \|M - N\|$. Φ est 1-lipschitzienne donc continue.

I.F.1) Soit p la projection orthogonale sur P. p est linéaire donc continue. L'application $M \longmapsto \|p(M)\|$ est continue comme composée d'applications continue. Sa restriction au compact $O_3(\mathbf{R})$ atteint donc un maximum. On peut choisir r tel que $\forall U \in O_3(\mathbf{R}),\ \|p(U)\| < r$.
Montrons que $d(P, O_3(\mathbf{R})) = d(P \cap B_r, O_3(\mathbf{R}))$.
• L'inégalité $d(P, O_3(\mathbf{R})) \leq d(P \cap B_r, O_3(\mathbf{R}))$ résulte de l'inclusion $P \cap B_r \subset P$.
• Soit $\varepsilon > 0$, il existe $M \in P$ telle que $d(M, O_3(\mathbf{R})) - \varepsilon < d(P, O_3(\mathbf{R}))$. Or, pour tout $U \in O_3(\mathbf{R})$ on a $\|U - M\| \geq \|U - p(U)\| \geq d(O_3(\mathbf{R}), P \cap B_r)$. Il en résulte $d(M, O_3(\mathbf{R})) \geq d(O_3(\mathbf{R}), P \cap B_r)$ donc $d(P, O_3(\mathbf{R})) + \varepsilon > d(P \cap B_r, O_3(\mathbf{R}))$. Comme ε est quelconque on a $d(P, O_3(\mathbf{R})) = d(P \cap B_r, O_3(\mathbf{R}))$.

I.F.2) $P \cap B_r$ est fermée comme intersection de deux fermés et bornée donc compacte. Φ atteint un maximum sur $P \cap B_r$. Donc il existe $A \in P \cap B_r$ telle que $\Phi(A) = d(P, O_3(\mathbf{R}))$.
<u>Remarque</u> On aurait pu considérer aussi la matrice $U \in O_3(\mathbf{R})$ rendant $\|U - p(U)\|$ minimum.

II.A ${}^tM\,M$ est symétrique car ${}^t({}^tM\,M) = {}^t M\,M$. De plus si $\lambda \in Sp({}^M M)$, il existe X non nul tel que ${}^tM\,MX = \lambda X$. On a $\lambda = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

II.B ${}^tM\,M$ est diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe une matrice de passage Ω orthogonale telle que ${}^tM\,M = \Omega\,D\,{}^t\Omega$ avec $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres positives de ${}^tM\,M$. Soient $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$ et $S = \Omega\,\Delta\,{}^t\Omega$. On a $S \in S_3^+(\mathbf{R})$ et $S^2 = {}^t M\,M$.

II.C Si M est inversible, ${}^tM\,M$ l'est aussi. Ses valeurs propres sont strictement positives. Il en va de même de celles de S. Posons $U = M\,S^{-1}$. Montrons que U est orthogonale. S etant symétrique S^{-1} l'est aussi donc ${}^tU\,U = S^{-1}\,{}^tM\,M\,S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_3$.

II.D $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. On a ${}^tM\,M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont 1 (double) et 4.

La matrice de passage est : $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. On a $S = \Omega\,diag(1,1,2){}^t\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ et

$U = MS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

III.A.1) On a $\|UA\|^2 = Tr({}^tA\,{}^tU\,U\,A) = Tr({}^tA\,A) = \|A\|^2$

et $\|AU\|^2 = Tr({}^tU\,{}^tA\,A\,U) = Tr({}^tA\,A\,U\,{}^tU) = \|A\|^2$. Si $A \in M_3(\mathbf{R})$, on utilise sa décomposition polaire $A = US$. On diagonalise S dans une base orthonormale : $S = \Omega D\,{}^t\Omega$ où Ω est orthogonale et $S \in S_3^+(\mathbf{R})$. Alors, pour tout $V \in O_3(\mathbf{R})$, on a $\|A-V\| = \|U\,\Omega\,D\,{}^t\Omega - V\| = \|U\,\Omega(D - {}^t\Omega\,{}^tU\,V\,\Omega)\,{}^t\Omega\| = \|D - {}^t\Omega\,{}^tU\,V\,\Omega\|$. L'application $V \longmapsto^t \Omega\,{}^tU\,V\,\Omega$ étant une bijection de $O_3(\mathbf{R})$ sur lui-même, on peut conclure $d(A, O_3(\mathbf{R})) = d(D, O_3(\mathbf{R}))$.

III.A2) On utilise I.F : on considère $A \in V$ telle que $d(A, O_3(\mathbf{R})) = d(V, O_3(\mathbf{R}))$ puis on écrit sa décomposition polaire $A = US$. On diagonalise S dans une base orthonormale : $S = \Omega D\,{}^t\Omega$ où Ω est orthogonale et $S \in S_3^+(\mathbf{R})$. On a vu $d(A, O_3(\mathbf{R})) = d(D, O_3(\mathbf{R}))$. On a $D =^t U\,{}^t\Omega\,A\,\Omega$. L'application $\Psi : M \longmapsto^t U\,{}^t\Omega\,M\,\Omega$ est un automorphisme de $M_3(\mathbf{R})$. Elle transforme donc V en un sous-espace W de même dimension. On a $D \in W$. Il reste à prouver $d(V, O_3(\mathbf{R})) = d(W, O_3(\mathbf{R}))$.
On a, pour tout $M \in V$ $d(M, O_3(\mathbf{R})) = d(\Psi(M), O_3(\mathbf{R})) \geq d(W, O_3(\mathbf{R})$ donc $d(V, O_3(\mathbf{R})) \geq d(W, O_3(\mathbf{R}))$. Inversement, si $N \in W$,$d(N, O_3(\mathbf{R})) = d(\Psi^{-1}(N), O_3(\mathbf{R})) \geq d(V, O_3(\mathbf{R})$ donc $d(W, O_3(\mathbf{R})) \geq d(V, O_3(\mathbf{R}))$.

III.B.1) $\|D-U\|^2 = \|D\|^2 - 2\langle D, U\rangle + 3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - 2\langle D, U\rangle + 3$.

III.B.2) En posant $U = (u_{i,j})$, on trouve $\langle D, U\rangle = Tr(DU) = \lambda_1 u_{1,1} + \lambda_2 u_{2,2} + \lambda_3 u_{3,3} \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i$ car U est orthogonale.

III.B.3) On a $\|D - I_3\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - 2\sum_{i=1}^{3} \lambda_i + 3$. Ainsi on a $\forall U \in O_3(\mathbf{R}),\ \ \|D-U\| \geq \|D - I_3\|$. Comme $I_3 \in O_3(\mathbf{R})$, on peut conclure $d(D, O_3(\mathbf{R})) = \|D - I_3\|$.

III.C On a vu que dans ce cas particulier $D = diag(1,1,2)$. On a donc $d(M, O_3(\mathbf{R})) = \|D - I_3\| = 1$.

IV.A.1) 0 est valeur propre de A donc de ${}^tA\,A$. Notons λ_1 et λ_2 les deux autres.
D'après III, $d(A, O_3(\mathbf{R})) = 1 + (\sqrt{\lambda_1} - 1)^2 + (\sqrt{\lambda_2} - 1)^2 \geq 1$. On a donc prouvé $d(V, O_3(\mathbf{R})) \geq 1$.

IV.A.2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \in V$. On a $\|A - I_3\|^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 + (d-1)^2 + e^2 + f^2 + 1$. Cette norme est minimale pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et vaut alors 1. Donc $d(I_3, V) = 1$. On en déduit $d(V, O_3(\mathbf{R})) \leq 1$, car $I_3 \in O_3(\mathbf{R}))$. Finalement $d(V, O_3(\mathbf{R})) = 1$.

IV.B On a $\|D - I_3\| = d(V, O_3(\mathbf{R})) = d(I_3, V)$. On en déduit que D est le projeté orthogonal de I_3 sur V. Donc $D - I_3 \in V^\perp$. Donc $V \subset [Vect(D - I_3)]^\perp$. l'inclusion est stricte car $dim(V) = 6$ alors que $dim\left([Vect(D - I_3)]^\perp\right) = 8$.

IV.C On calcule $R_1'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $R_2'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R_3'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que la famille $(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0))$ est libre.
Par ailleurs, on calcule les produits scalaires $\langle D - I_3, R_i'(0)\rangle = Tr((D - I_3)R_i'(0)) = 0$. Ces matrices sont donc orthogonales à $I_3 - D$.
Plaçons-nous dans le sous-espace $Vect(D - I_3)]^\perp$ qui est de dimension 8. Nous en étudions deus sous-espaces vectoriels : V qui est de dimension 6 et $Vect(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0))$ qui est de dimension 3. Leur intersection est donc un sous-espace de dimension ≥ 1. Il existe donc $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tel que $aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) \in V$.

IV.D On utilise la formule de Taylor-Young en 0 : $f(t) = f(0) + tf'(0) + \dfrac{t^2}{2} f''(0) + t^2\varepsilon(t)$ où $\varepsilon(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow 0$. On calcule ensuite $f(0) = I_3$; $f'(0) = aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) \in V$ (notée A) et
$f''(0) = a^2R_1''(0) + abR_1'(0)R_2'(0) + acR_1'(0)R_3'(0) + b^2R_2''(0) + abR_1'(0)R_2'(0) + bcR_2'(0)R_3'(0) + c^2R_3''(0) + acR_1'(0)R_3'(0) + bcR_2'(0)R_3'(0) = 2(B + C)$

avec $B = \begin{pmatrix} 0 & -bc & ac \\ 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{2} diag(-b^2 - a^2, -a^2 - c^2, -b^2 - c^2)$. On a bien $\langle I_3 - D, B\rangle = 0$.

IV.E On a $\|I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t)\| = \|f(t) - (tA + D)\| \geq d(O_3(\mathbf{R}, V)) = \|I_3 - D\|$ car $f(t) \in O_3(\mathbf{R})$ et $tA + D \in V$.

IV.E On développe le carré scalaire suivant en sachant que $\langle B, I_3 - D\rangle = 0$

$$\|I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t)\|^2 = \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle D - I_3, C\rangle + 2t^2\langle D - I_3, \varepsilon(t)\rangle + t^4\|B + C + \varepsilon(t)\|^2$$

On a la formule souhaitée avec $\varepsilon_2(t) = 2\langle D - I_3, \varepsilon(t)\rangle + t^2\|B + C + \varepsilon(t)\|^2$.
Mais, d'après IV.E, $\|I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t)\|^2 \geq \|I_3 - D\|^2$. On en déduit $\langle I_3 - D, C\rangle \geq 0$.

IV.G On calcule $\langle I_3 - D, C\rangle = Tr[(I_3 - D)C] = -\frac{1}{2}[a^2(2 - x - y) + b^2(2 - x - z) + c^2(2 - y - z)]$. L'un au moins des nombres $2 - x - y$, $2 - x - z$ ou $2 - y - z$ est négatif.

IV.H On a $D \in V$ et $D - I_3 \perp V$ donc $\langle D, D - I_3\rangle = 0$. D'où $\|D\|^2 = \langle D, I_3\rangle$, ce qui donne $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

IV.I E est la sphère de centre $O' \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$. F est un plan. G est le demi-espace supérieur délimité par F. $E \cap F$ est un cercle (ou $\emptyset$). Pour cela on calcule la distance de O' à F : $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En utilisant le théorème de Pythagore, on en déduit le rayon du cercle $\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. $E \cap G$ est une coupole dont le diamètre est le diamètre du cercle de base : 1.

IV.J $d(V, O_3(\mathbf{R}) = \|D - I_3\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$. Soit $K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $K \in E \cap F$. La distance maximale de K à un point de $F \cap G$ est 1. Donc $\|D - I_3\| \leq 1$

Fin. Il y a peut-être des fautes...