Corrigé de Centrale PC 2015 maths 1

I Première partie

I.A – Si cette droite est stable, alors $f(u) \in \mathrm{Vect}(u)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$, donc u est un vecteur propre de f.

Réciproquement, si u est un vecteur propre de f, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Soit $x \in \mathrm{Vect}(u)$: il s'écrit αu pour un certain scalaire α. Alors $f(x) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha\lambda u \in \mathrm{Vect}(u)$, donc la droite engendrée par u est stable par f.

I.B –

I.B.1) Les sous-espaces $\{0\}$ et E sont évidemment stables par f. Il sont au nombre de deux car E n'est pas réduit au vecteur nul, par hypothèse.

La rotation d'angle $\pi/2$ dans le plan euclidien canonique, de matrice

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique, n'a pas de troisième sous-espace stable. Sinon, ce serait une droite, qui serait donc une droite propre d'après la question précédente. Or $\chi_f = \chi_A = X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle donc f n'a pas de vecteur propre.

I.B.2) On remarque de l'image et le noyau de f sont toujours stable par f. Si ce dernier est non nul et non injectif, son noyau (ou son image) n'est ni E ni $\{0\}$, ce qui donne un troisième sous-espace stable.

Si ce noyau et cette image sont distincts, cela fait quatre sous-espaces stable. C'est nécessairement le cas si n est impair : dans ce cas, on ne peut avoir $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$, sinon la formule du rang donnerait $2\,\mathrm{rg}(f) = n$ impair, ce qui est impossible.

L'endomorphisme f de matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique (e_1, e_2) possède — outre $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$ — un troisième sous-espace stable : la droite $\mathrm{Vect}(e_1)$, qui est à la fois son noyau et son image. Il n'en a pas d'autre : ce serait une droite propre, or zéro est la seule valeur propre de f comme le montre immédiatement la matrice N, donc la seule droite propre de f est son noyau $\mathrm{Vect}(e_1)$.

I.C –

I.C.1) Si F est un sous-espace engendré par une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs propres de f, associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, si $x \in F$, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{k=1}^p \alpha_k x_k$, et alors $f(x) = \sum_{k=1}^p \alpha_k \lambda_k x_k \in F$, donc F est stable par f.

Si E est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ, alors $f_F = \lambda\, \mathrm{id}_F$.

I.C.2) Soit F un sous-espace propre par f de dimension au moins égale à 2. Il existe une infinité de droites contenues dans F : prendre deux vecteurs non colinéaires x_1 et x_2 dans F, et considérer les droites $\mathrm{Vect}(x_1 + \mu x_2)$ pour $\mu \in \mathbb{K}$, qui sont deux à deux distinctes). Ces droites sont stables, car engendrées par des vecteurs propres.

I.C.3) On va démontrer que f est une homothétie. D'après la première question, tous les vecteurs non nuls de E sont des vecteurs propres de f. Pour chaque $x \in E$, on note λ_x l'unique scalaire tel que $f(x) = \lambda_x x$ (l'unicité vient du fait que $x \neq 0$). Soient alors deux vecteurs non nuls x et y de E, et montrons que $\lambda_x = \lambda_y$ en distinguant deux cas.

- Si x et y sont colinéaires, ce que l'on écrit $y = \alpha x$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}$, alors
$$f(y) = \lambda_y y = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y,$$
d'où $\lambda_y = \lambda_x$ car y est non nul.
- Sinon, on considère le vecteur $x + y$ et on pose $\mu = \lambda_{x+y}$:
$$f(x+y) = \mu(x+y) = \mu x + \mu y = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$
d'où $\lambda_x = \mu = \lambda_y$, car la famille (x, y) est libre.

On note λ la valeur commune de tous les scalaires λ_x pour $x \neq 0$. On a donc $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \lambda x$, et cette égalité reste évidemment valable lorsque $x = 0$. On a bien prouvé que f est une homothétie.

I.D –

I.D.1) Soit F un sous-espace de E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E propre pour f (elle existe par hypothèse de diagonalisablité de f). Si $F = \{0\}$, il admet un supplémentaire stable qui est E. Sinon, F possède une base $\mathcal{F}$, qui est une famille libre de E, et le théorème de la base incomplète affirme qu'on peut trouver dans $\mathcal{B}$ des vecteurs $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}$ qui tels que $\mathcal{F} \cup \{e_{i_1}, \dots, e_{i_p}\}$ soit une base de E. On pose

$$G = \mathrm{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Par construction, F et G sont supplémentaires, et G est stable puisqu'il est engendré par une famille de vecteurs propres de f (question I.C.1).

I.D.2) On raisonne par récurrence sur la dimension $n \geqslant 1$ de E. Si $n = 1$, tous les endomorphismes de E sont des homothéties puisque E est une droite, donc ils sont diagonalisables.

Si la propriété est établie pour tous les espaces de dimension $n-1$, considérons un espace vectoriel complexe E de dimension n, et un endomorphisme f de E tel que tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Le théorème de d'Alembert Gauss affirme que χ_f possède au moins une racine, donc que f possède au moins un vecteur propre, noté x. On pose $D = \mathrm{Vect}(x)$, alors D est stable par f, donc possède un supplémentaire stable par f, que l'on note H, et qui est un hyperplan de E.

Montrons que tout sous-espace vectoriel G de H stable par f_H possède un supplémentaire (dans H) stable par f_H. En effet, un tel sous-espace G est *a fortiori* stable par f, donc possède un supplémentaire K (dans E) stable par f, et on constate que

$$K \cap H$$

est un supplémentaire de G *dans l'hyperplan* H, stable par *l'endomorphisme induit* f_H. L'hypothèse de récurrence s'applique donc à f_H, qui est diagonalisable. Il suffit de mettre bout à bout x et une base propre de f_H pour obtenir une base de E qui soit propre pour f, ce qui montre que f est diagonalisable.

Remarque. — Un endomorphisme tel que tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable est dit *semi-simple*. On vient de démontrer que, si $\mathbb{K}$ est le corps des complexes, les endomorphismes semi-simples en dimension finie sont diagonalisables (on avait démontré la réciproque à la question précédente, sans restriction sur le corps de base).

Comme le prouve l'exemple, étudié à la question I.B.1, de la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$, si le corps de base est celui des réels, il existe des endomorphismes semi-simples qui ne sont pas diagonalisables (par manque de valeurs propres).

II Deuxième partie

II.A –

II.A.1) Soit $x \in F$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe $x_i \in F \cap E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$. Alors $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ appartient à $\oplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$, c'est-à-dire à F : ce sous-espace est donc stable par f.

II.A.2) Une des caractérisations de la diagonalisabilité de f est que E soit égal à la somme (toujours directe) de ses sous-espaces propres. L'existence et l'unicité $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ en résulte.

II.A.3) La famille $(x_1, \dots, x_r)$ est génératrice de V_x par définition. Par ailleurs, c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc elle est libre (théorème du cours). C'est donc une base de V_x.

II.A.4) Une récurrence immédiate sur $j \in \mathbb{N}^*$ montre que $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i$: il s'agit d'une combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_r)$, donc ce vecteur appartient à V_x. C'est en particulier vrai pour $j \in [\![1, r]\!]$.

Le calcul ci-dessus montre que la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est la matrice de Vandermonde d'ordre r suivante

$$W := W(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

II.A.5) Comme les λ_i sont deux à deux distincts, le déterminant (de Vandermonde...) de W est non nul (théorème du cours), donc la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

II.A.6) Comme x_i appartient à V_x, et comme $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x, le vecteur x_i est une combinaison linéaire des $f^{j-1}(x)$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$. Comme F est stable par f et $x \in F$, les $f^{j-1}(x)$ appartient à F, donc x_i appartient à F.

On conclut que $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ appartient à $\oplus_{i=1}^{r} (F \cap E_i)$. Finalement, on a prouvé l'inclusion

$$F \subset \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap E_i).$$

L'inclusion inverse étant évidente, on a prouvé l'égalité, ce qui fallait démontrer.

II.B –

II.B.1) Comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $1 \leqslant \dim E_i$ et comme $\sum_{i=1}^{n} \dim E_i = n$, il faut que E_i soit de dimension 1 pour tout i dans $[\![1, n]\!]$: les sous-espaces propres sont des droites.

II.B.2) Une droite stable étant une droite propre, il y a n droites de E stables par f.

II.B.3) Soit F un sous-espace de E stable par f et de dimension k. D'après la partie II.A, on a $F = \oplus_{i=1}^{n}(F \cap E_i)$. Comme les E_i sont des droites, leurs sous-espaces $F \cap E_i$ sont soit nuls, soit égaux à E_i. Enfin, comme $\dim F = k$, il y exactement k indices $i \in [\![1, n]\!]$ tels que $F \cap E_i = E_I$, et les autres vérifient $F \cap E_i = \{0\}$. Un tel F est donc entièrement déterminé par le choix de k indices i parmi n, donc il existe

$$\binom{n}{k}$$

sous-espaces de E de dimension k et stables par f (la question précédente rentre dans ce cadre, d'ailleurs).

II.B.4) Il suffit de les compter selon leur dimension $k \in [\![0, n]\!]$, et on trouve

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

sous-espaces de E stables par f dans ce cas : ce sont les sommes directes $\oplus_{i \in K} E_i$, où K parcourt l'ensemble des parties finies de $[\![1, n]\!]$.

III Troisième partie

III.A –

III.A.1) La dérivation diminue le degré d'une unité pour les polynômes, donc $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D. On notera plutôt D_n l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$. La matrice de D_n dans la base canonique ordonnée par degrés croissants est

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III.A.2) a) On note $N \geqslant 1$ la dimension finie non nulle de F. Alors F possède une base $(P_1, \ldots, P_N)$. On pose

$$n = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} (\deg P_i).$$

Les règles de calcul des degrés montrent que tout polynôme $P \in F$, qui est une combinaison linéaire des P_i, est de degré au plus n, donc

$$F \subset \mathbb{K}_n[X].$$

Par ailleurs, il existe $i_0 \in [\![1, N]\!]$ tel que $\deg(P_{i_0}) = n$, donc $R = P_{i_0}$ convient.

b) La famille $(D^i(R))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est formée de polynôme de degrés échelonnés, donc elle est libre.

c) La question III.A.2.b montre que $\dim(F) \geqslant n+1$, et comme F est contenu dans $\mathbb{K}_n[X]$, le théorème d'égalité des dimensions montre que

$$F = \mathbb{K}_n[X].$$

III.A.3) Les questions I.B.1 et III.A.2 montrent que les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D sont $\{0\}$, $\mathbb{K}[X]$, et tous les sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$.

III.B –

III.B.1) On va montrer que l'ensemble des vecteurs u de E tels que la famille $\mathcal{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base de E est

$$E \setminus \operatorname{Ker}(f^{n-1}).$$

D'une part, si $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base, ses vecteurs sont non nuls, en particulier $f^{n-1}(u) \neq 0$, donc $u \in E \setminus \operatorname{Ker}(f^{n-1})$.
D'autre part, si $u \in E \setminus \operatorname{Ker}(f^{n-1})$ et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n-i} f^{n-i}(u) = 0,$$

on applique f^{n-1} à cette égalité, et il ne reste que $\lambda_n f^{n-1}(u) = 0$, donc $\lambda_n = 0$. On applique alors f^{n-2}, ce qui donne $\lambda_{n-1} = 0$ *etc* (on peut rédiger une démonstration par récurrence si on le souhaite). Finalement, la famille $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre, et comme elle comporte $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est une base de E.

III.B.2) Dans le cas où $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E, la matrice de f dans $\mathcal{B}_{f,u}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III.B.3) Toute famille $\mathcal{C} = (a_i f^{n-i}(u))_{1\leqslant i\leqslant n}$, déduite de la base $\mathcal{B}_{f,u}$ en multipliant les vecteurs de cette dernière par des scalaires supposés non nuls a_i, est encore une base de E. La matrice de f dans $\mathcal{C}$ sera A_{n-1} si et seulement si

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad f(a_i f^{n-i}(u)) = (i-1)a_{i-1}f^{n-(i-1)}(u),$$

ou encore si et seulement si

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad a_i = (i-1)a_{i-1}.$$

On choisit alors $a_1 = 1$ et cela entraîne que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = (i-1)!$. En conclusion, la matrice de f sur la base suivante vaut A_{n-1} :

$$\mathcal{C} = \big((i-1)! f^{n-i}(u)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

III.B.4) D'après la question III.A.3, les sous-espaces de E stables par f sont alors $\{0\}$ et tous ceux de la forme $\mathrm{Vect}((i-1)! f^{n-i}(u))_{1\leqslant i\leqslant r}$ pour $1 \leqslant r \leqslant n$ (le dernier d'entre eux valant E). Il y en a $n+1$. On remarque qu'ils peuvent se décrire plus simplement sous la forme suivante :

$$\{0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}\big((f^{n-i}(u))_{1\leqslant i\leqslant r}\big) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant r \leqslant n.$$

On va démontrer que

$$\mathrm{Vect}\big((f^{n-i}(u))_{1\leqslant i\leqslant r}\big) = \mathrm{Ker}(f^r).$$

Il suffit pour cela d'élever A_{n-1} à la puissance r (la diagonale partielle de 1 se trouve alors à la r-ième surdiagonale) et le noyau de A^r apparaît de manière évidente.

IV Quatrième partie

IV.A – La matrice de f dans $\mathcal{B}_n$ est M.

IV.B – Si n est impair, alors χ_f est un polynôme unitaire de degré impair à coefficients réels. Sa fonction polynomiale associée (encore notée χ_f) possède donc les limites $-\infty$ en $-\infty$, et $+\infty$ en $+\infty$. Le théorème de valeurs intermédiaires (χ_f est polynomiale donc continue) assure que χ_f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que f admet au moins une valeur propre réelle.

IV.C –

IV.C.1) Les composantes de X et Y sont respectivement les parties réelles et imaginaires des z_i : ce sont des réels, donc X et Y appartiennent à E.

Avant d'entamer la démonstration de la liberté de la famille (X,Y), faisons deux remarques.

- Il est impossible que Z soit réel (c'est-à-dire que Y sont nul), sinon, en choisissant une de ses composantes non nulles notée z_k, on déduirait de la relation $MZ = \lambda Z$ que
$$\lambda = \frac{1}{z_k}\sum_{j=1}^{n} m_{k,j}z_j,$$
donc λ serait réel.
- Il est impossible que Z soit imaginaire pur (c'est-à-dire que X soit nul), sinon on pourrait l'écrire iU avec $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, et la relation $MZ = \lambda Z$ donnerait $MU = \lambda U$: le raisonnement du cas précédent fournirait alors une contradiction.

On suppose maintenant que la famille (X,Y) est liée. Grâce aux remarques, on peut traduire cette hypothèse par l'existence de $k \in \mathbb{R}$ tel que $Y = kX$. La relation $MZ = \lambda Z$ s'écrit alors $M(1+ik)X = \lambda(1+ik)X$, d'où l'on tire $MX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, et on obtient la même contradiction qu'à la première remarque ci-dessus.

IV.C.2) De l'égalité $MZ = \lambda Z$, comme M est à coefficients réels, on tire $M\overline{Z} = \overline{\lambda}\,\overline{Z}$. Par ailleurs, les définitions même X et Y donnent $Z = X+iY$ et $\overline{Z} = X-iY$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
MX &= \frac{1}{2}(MZ + M\overline{Z}) = \frac{1}{2}(\lambda Z + \overline{\lambda}\,\overline{Z}) = \frac{1}{2}\left(\lambda[X+iY] + \overline{\lambda}[X-iY]\right),\\
&= \frac{\lambda+\overline{\lambda}}{2}X - \frac{\lambda-\overline{\lambda}}{2i}Y = \alpha X - \beta Y,\\
MY &= \frac{1}{2i}(MZ - M\overline{Z}) = \frac{1}{2i}\left(\lambda Z - \overline{\lambda}\,\overline{Z}\right) = \frac{1}{2i}\left(\lambda[X+iY] - \overline{\lambda}[X-iY]\right),\\
&= \frac{\lambda-\overline{\lambda}}{2i}X + \frac{\lambda+\overline{\lambda}}{2}Y = \beta X + \alpha Y.
\end{aligned}$$

Comme MX et MY appartient à $F = \mathrm{Vect}(X,Y)$, ce plan est stable par f, et on lit dans les calculs ci-dessus que la matrice de f_F dans la base (X,Y) vaut

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

IV.D – L'affirmation est vraie car, si un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie n'admet une droite stable, c'est qu'il n'admet pas de valeur propre réelle (question I.A). Comme il admet, dans ce cas au moins une valeur propre complexe non réelle (théorème de d'Alembert-Gauss), la question IV.C montre qu'il possède un plan stable.

Remarque. — La question IV.B n'est pas nécessaire pour résoudre cette question.

IV.E – La réponse est oui, et voici un exemple : l'endomorphisme

$$\varphi\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto XP$$

n'a aucun sous-espace stable de dimension finie, à l'exception de $\{0\}$ bien sûr. En effet, si F est un sous-espace stable par φ et non réduit à $\{0\}$, il contient un polynôme non nul P_0, donc contient tous les itérés $\varphi^k(P_0)$ par stabilité. Or $\deg(\varphi(P)) = \deg(P) + 1$ pour tout polynôme P non nul, donc la famille $(\varphi^k(P_0))_{k\in\mathbb{N}}$ est à degrés échelonnés, donc libre, donc la dimension de F ne peut pas être finie. En particulier, φ ne possède ni droite ni plan stable.

Remarque. — En revanche, φ possède des sous-espaces stables non triviaux de dimension infinie. On peut démontrer, que ce sont exactement les idéaux de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire les ensembles des multiples d'un polynôme P donné : $\{P \times Q,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

IV.F –

IV.F.1) On calcule

$$\begin{aligned}\chi_A = \det(XI_n - A) &= \begin{vmatrix} X-1 & 4 & 0 \\ -1 & X+2 & 1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix}, \\ &= (X-1)(X+2)X - 4 + 4X + X - 1 = X^3 + X^2 + 3X - 5, \\ &= (X-1)(X^2+2X+5) = (X-1)(X-[-1+2i])(X-[-1-2i]).\end{aligned}$$

On en déduit que le spectre complexe de A est $\{1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ avec $\lambda = -1+2i$. On commence par résoudre $AX = X$, avec $X = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -4x_2 &=& 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &=& 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_2 &=& 0, \\ x_1 &=& x_3. \end{array}\right.$$

Par conséquent, $E_1(A) = \mathrm{Vect}(U_0)$, où l'on a posé $U_0 = {}^t(1,0,1)$). On vient de trouver la troisième colonne de P ainsi que la valeur de γ : c'est 1.

On suit enfin la démarche de la question IV.C, en cherchant un vecteur $Z = {}^t(z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $AZ = \lambda Z$. La transformation élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + (1-2i)L_2$ permet de passer du deuxième au troisième système :

$$\begin{aligned} AZ = \lambda Z &\iff \left\{\begin{array}{rcl} z_1 - 4z_2 &=& (-1+2i)z_1, \\ z_1 - 2z_2 - z_3 &=& (-1+2i)z_2, \\ z_1 + z_2 &=& (-1+2i)z_3 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2(1-i)z_1 - 4z_2 &=& 0, \\ z_1 - (1+2i)z_2 - z_3 &=& 0, \\ z_1 + z_2 + (1-2i)z_3 &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2(1-i)z_1 - 4z_2 &=& 0, \\ z_1 - (1+2i)z_2 - z_3 &=& 0, \\ 2(1-i)z_1 - 4z_2 &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2(1-i)z_1 - 4z_2 &=& 0, \\ z_1 - (1+2i)z_2 - z_3 &=& 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

On choisit $z_1 = 2$, ce qui montre que le vecteur $Z_0 = {}^t(2, 1-i, -1-i)$ est un vecteur propre (complexe non réel) de A pour la valeur propre λ. Les deux premières colonnes de T sont les vecteurs $X_0 = {}^t(2,1,-1)$ et $Y_0 = {}^t(0,-1,-1)$, et on a $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) = -1$, $\beta = \mathrm{Im}(\lambda) = 2$, donc

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le plan et la droite

$$F = \mathrm{Vect}((2,1,0),(0,-1,-1)) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,0,1))$$

sont stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, et ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Ce sont respectivement le seul plan stable et la seule droite stable.

IV.F.2) Si $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, on pose $Y = P^{-1}X$, et on note α l'unique réel tel que $U = \alpha U_0 = \alpha\,{}^t(1,0,1)$. Alors le problème de Cauchy P_U est équivalent au problème de Cauchy suivant, qu'on résout dans la foulée (on a posé $z =$

$y_1 + iy_2$) :

$$\left\{\begin{array}{l} P^{-1}X' = (P^{-1}AP)P^{-1}X \\ P^{-1}X(0) = P^{-1}U_0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} Y' = TY \\ Y(0) = (0,0,\alpha). \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& -y_1 + 2y_2, \\ y_2' &=& -2y_1 - y_2, \\ y_3' &=& y_3 \\ Y(0) &=& (0,0,\alpha). \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} z' &=& -y_1 + 2y_2 - 2iy_1 - iy_2 = (-1-2i)(y_1+iy_2) = \overline{\lambda}z, \\ y_3' &=& y_3 \\ z(0) &=& 0, \\ y_3(0) &=& \alpha. \end{array}\right.$$

On obtient $z = 0$ identiquement et $y_3 \colon t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha e^t$, c'est-à-dire

$$Y \colon t \in \mathbb{R} \mapsto {}^t(0,0,\alpha e^t) \quad \text{donc} \quad X \colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^t U.$$

IV.F.3) On obtient $x'(0) = -x(0)+2y(0) = -a+2b$ et $y'(0) = 2x(0)-y(0) = -2a-b$. En dérivant la première équation et en utilisant la seconde, on trouve $x'' = -x' + 2y' = -x' - 4x - 2y = -x' + 4x - (x + x') = -2x' - 5x$, donc

$$x'' + 2x' + 5x = 0.$$

On montre de la même façon que $y'' + 2x' + 5x = 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont $\lambda = -1+2i$ et son conjugué $\overline{\lambda}$. Il existe donc $(u,v,w,h) \in \mathbb{C}^4$ tel que

$$\begin{aligned} x &\colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t}[u\cos(2t) + v\sin(2t)], \\ y &\colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t}[w\cos(2t) + h\sin(2t)], \\ \text{donc} \quad x' &\colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t}[(2v-u)\cos(2t) - (v+2u)\sin(2t)], \\ \text{et} \quad y' &\colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t}[(2h-w)\cos(2t) - (h+2w)\sin(2t)]. \end{aligned}$$

Les conditions initiales permettent de calculer $u = a$, $w = b$, puis $v = b$ et $h = -a$. Par conséquent,

$$\varphi \colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t}\left(a\cos(2t) + b\sin(2t), b\cos(2t) - a\sin(2t)\right).$$

IV.F.4) Ma réponse à cette question est trop compliquée et maladroite. Le corrigé de M. Icheha sur `http://concours-maths-cpge.fr/` est bien meilleur.

On interprète les termes *rectiligne* et *plane* au sens strict, c'est-à-dire signifiant *non ponctuelle* et *non rectiligne* respectivement. On commence par remarquer que, comme la matrice A est fixe, toute solution de $X' = AX$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (montrer par récurrence sur n que X est de classe $\mathcal{C}^n$).

Trajectoires rectilignes. Un arc paramétré $(\mathbb{R}, Y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ rectiligne et non ponctuel est de la forme

$$Y \colon t \in \mathbb{R} \mapsto V + \alpha(t)W,$$

où V et W sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, le second étant non nul, et où $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une fonction non constante. Un tel arc est une trajectoire du système $X' = AX$ si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha'(t)W = AV + \alpha(t)AW. \tag{1}$$

Comme Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction α aussi. En dérivant la relation ci-dessus, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha''(t)W = \alpha'(t)AW$. Comme α n'est pas constante, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha'(t_0) \neq 0$ et, en posant $\lambda = \alpha''(t_0)/\alpha'(t_0)$, on en déduit que

$$AW = \lambda W.$$

Comme $W \neq 0$, c'est donc un vecteur propre (réel) de A, donc $\lambda = 1$ (c'est la seule valeur propre réelle de A) et W est colinéaire à $U_0 = {}^t(1,0,1)$. Quitte à faire porter la constante de colinéarité par la fonction α, on peut supposer que $W = U_0$. La relation (1) s'écrit alors $\alpha' U_0 = AV + \alpha U_0$, ou encore

$$(\alpha' - \alpha)U_0 = AV.$$

Comme α est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut dériver cette relation pour obtenir $(\alpha'' - \alpha')U_0 = 0$ et, comme $U_0 \neq 0$, on en déduit que $\alpha'' = \alpha'$, puis qu'il existe $(k,\ell) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha(t) = ke^t + \ell,$$

avec k non nul pour que α ne soit pas constante. La relation $(\alpha' - \alpha)U_0 = AV$ s'écrit alors $-\ell U_0 = AV$, et comme A est inversible (son spectre ne contient pas zéro), on en déduit que $V = -\ell A^{-1}U_0 = -\ell U_0$, puisque $AU_0 = U_0$. Finalement, si X est une trajectoire rectiligne non ponctuelle, alors il existe $(k,\ell) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = -\ell U_0 + (ke^t + \ell)U_0$, ou encore

$$\exists k \in \mathbb{R}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = ke^t\, U_0,$$

et il est clair que toutes ces fonctions conviennent.

Remarque. — On a montré que les trajectoires rectilignes portées par des droites *a priori affines* de $\mathbb{R}^3$ sont nécessairement portées par des droites *vectorielles*. Si on admet ce résultat, la formule ci-dessus découle de manière directe de la question IV.F.2.

Trajectoires planes. Un arc paramétré $(\mathbb{R}, Y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ et plan est de la forme

$$Y : t \in \mathbb{R} \mapsto R + x(t)S + y(t)T,$$

où R, S et T sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, les deux derniers formant une famille libre, et où x et y sont des éléments de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On laisse à la lectrice et au lecteur le soin de démontrer qu'un tel arc est non rectiligne si et seulement s'il possède deux vecteurs vitesses non colinéaires, c'est-à-dire, en utilisant le déterminant sur la base (S, T) de ces deux vecteurs vitesses :

$$\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta := \begin{vmatrix} x'(t_1) & x'(t_2) \\ y'(t_1) & y'(t_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Un tel arc est une trajectoire du système $X' = AX$ si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t)S + y'(t)T = AR + x(t)AS + y(t)AT. \tag{2}$$

Comme Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, les fonctions x et y aussi. En dérivant la relation ci-dessus, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}$, $x''(t)S + y''(t)T = x'(t)AS + y'(t)AT$. En substituant t par t_1 et t_2, on obtient un système dont on considère que les inconnues (vectorielles) sont AS et AT :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t_1)AS + y'(t_1)AT &=& x''(t_1)S + y''(t_1)T, \\ x'(t_2)AS + y'(t_2)AT &=& x''(t_2)S + y''(t_2)T. \end{array} \right.$$

Le déterminant Δ de ce système étant non nul, on obtient AS et AT comme combinaisons linéaires — qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter — de S et T par les formules de Cramer. Ceci prouve que le plan $\mathrm{Vect}(S, T)$ est stable par A. En anticipant sur la question V.C, ce plan est nécessairement F, donc on peut choisir $S = X_0$ et $T = Y_0$ (voir leurs valeurs à la question IV.F.1). La relation (2) montre alors que AR appartient aussi au plan $F = \mathrm{Vect}(X_0, Y_0)$, et on peut donc écrire (2) sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t)X_0 + y'(t)Y_0 = \alpha X_0 + \beta Y_0 + x(t)[-X_0 - 2Y_0] + y(t)[2X_0 - Y_0],$$

où α et β sont deux constantes réelles. Comme la famille (X_0, Y_0) est libre, cela équivaut encore au système différentiel linéaire avec second membre

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) - [-x(t) + 2y(t)] &=& \alpha, \\ y'(t) - [-2x(t) - y(t)] &=& \beta. \end{array} \right.$$

Le système homogène associé est celui qui a été résolu à la question IV.F.3. Comme la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible, il existe une solution particulière constante (γ, δ) qu'on explicitera pas. Finalement, si Y est une trajectoire non rectiligne contenue dans un plan, alors il existe $(a, b, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &Y(t) \\ &= \left[e^{-t}(a\cos(2t) + b\sin(2t)) + \gamma\right] X_0 + \left[e^{-t}(b\cos(2t) + a\sin(2t)) + \delta\right] Y_0, \\ &= \underbrace{e^{-t}(a\cos(2t) + b\sin(2t))X_0 + e^{-t}(b\cos(2t) + a\sin(2t))Y_0}_{:=Z(t)} + \underbrace{\gamma X_0 + \delta Y_0}_{:=Z_0}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si Y est une telle fonction, comme $Z' = AZ$ d'après la question IV.F.3 et comme $Y' = Z'$, on a $Y' = AY$ si et seulement si $AZ_0 = 0$. Comme A est inversible, cela équivaut encore à $Z_0 = 0$, et comme (X_0, Y_0) est libre, cela équivaut à $\gamma = \delta = 0$. En conclusion, les trajectoires planes de $X' = AX$ sont les fonctions Y telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = e^{-t}(a\cos(2t) + b\sin(2t))X_0 + e^{-t}(b\cos(2t) + a\sin(2t))Y_0.$$

V Cinquième partie

V.A –

V.A.1) On anticipe la notation du (futur) produit scalaire.

Un produit scalaire étant une application bilinéaire de E^2 dans $\mathbb{R}$, il est déterminé de manière unique par la valeur des nombres $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$. Il suffit donc de montrer que l'unique forme bilinéaire définie par

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{i,j}$$

est bien un produit scalaire. Or l'expression d'une telle forme est (développement par bilinéarité) :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

où les x_i et les y_i désignent les composantes de x et y dans $\mathcal{B}$. On reconnaît alors l'expression d'un produit scalaire (c'est un résultat du cours).

V.A.2) La relation demandée est

$$\langle u, v\rangle = u \cdot v = {}^t\!UV.$$

V.B – L'hyperplan H est stable par f si et seulement pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t\!UX = 0$, on a ${}^t\!U(AX) = 0$, ou encore

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXU = 0 \Longrightarrow {}^tX\,{}^tAU = 0.$$

L'énoncé ci-dessus est équivalent à la proposition suivante : le vecteur ${}^tAU$ est orthogonal à $\tilde{H}$, qui est l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ formé des colonnes de composantes dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de H. Comme $\tilde{H}$ est un hyperplan et que U dirige la droite $\tilde{D} = (\tilde{H})^{\perp}$, dire que ${}^tAU$ est orthogonal à $\tilde{H}$, c'est dire que ${}^tAU$ est colinéaire à U, autrement dit que U est un vecteur propre de la transposée de A.

V.C – On sait déjà que le plan F de la question IV.F.1 est stable par A. On va montrer qu'il n'en existe pas d'autre, en suivant la démarche proposée à la question V.B.
Si $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique, si P est un plan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont U est un vecteur normal, P est stable par A si et seulement si U est un vecteur propre de ${}^tA$. Or ${}^tA$ possède le même polynôme caractéristique que A, donc l'unique valeur propre de ${}^tA$ vaut 1. On résout donc ${}^tAX = X$, où $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned}
{}^tAX = X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 &=& 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 &=& 0, \\ -x_2 - x_3 &=& 0, \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 &=& 0, \\ x_1 + x_2 &=& 0. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le sous-espace propre $E_1({}^tA)$ est une droite, engendrée par $U = {}^t(1, -1, 1)$, donc l'unique plan stable de A a pour équation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ dans la base canonique. On retrouve bien le plan F.

V.D –

V.D.1) Comme l'endomorphisme f est diagonalisable, il possède une base propre $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Les n sous-espaces vectoriels

$$H_j = \mathrm{Vect}(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n,\, i \neq j} \quad \text{pour} \quad j \in [\![1, n]\!],$$

sont des hyperplans (car $\mathcal{B}$ est libre) stables par f (d'après la question I.C.1, car ils sont engendrés par une famille de vecteurs propres de f) et d'intersection nulle (car un vecteur de H_j est un vecteur dont la composante selon ε_j est nulle : s'il est dans $\cap_{i=1}^n H_i$, toutes ses composantes sont nulles).

V.D.2) La réponse est oui.
On munit E d'un produit scalaire, et on note A la matrice de f dans une base orthonormale pour ce produit scalaire. Soient $H_1, \ldots, H_n$ des hyperplans de E stables par f et d'intersection réduite au vecteur nul. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs normaux à $H_1, \ldots, H_n$ respectivement. On pose $V = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$. Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in V^{\perp} \iff \forall x \in [\![1, n]\!],\ \langle x, u_i\rangle = 0 \iff \forall x \in [\![1, n]\!],\ x_i \in H_i \iff x \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i.$$

On en déduit que $V^{\perp} = \{0\}$, donc que $V = (V^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$, donc que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E, donc est une base de E. Or cette famille est, d'après la question V.B, composée de vecteurs propres de ${}^tA$. La matrice ${}^tA$ possède donc une base propre, c'est-à-dire est diagonalisable, donc A l'est aussi (si $D = P^{-1}\,{}^tAP$ est diagonale, alors ${}^tPA\,{}^tP^{-1} = {}^tD = D$ aussi), donc f est diagonalisable.