Analyse et géométrie

I Suites numériques, fonctions de variable réelle

Exercice 1 *(ccp 2017) Montrer que l'équation* $x^n + x\sqrt{n} = 1$ *admet une unique solution* x_n *dans* $[0,1]$. *Etudier le sens de variation de la suite* (x_n). *Montrer que la suite* (x_n) *converge et déterminer la limite de la suite* (x_n). *Déterminer la nature de la série* $\sum x_n$.

Exercice 2 *(CCP 2016) On s'intéresse à la suite définie par* $u_0 \in]0, \pi/2[$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a) Établir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.
b) En considérant $u_{n+1} - u_n$ montrer que la série $\sum u_n^3$ converge.
c) En considérant $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ montrer que la série $\sum u_n^2$ diverge.

Exercice 3 *(Ensam) Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *l'équation* $nx = \cos(x)$ *admet une et une seule solution dans* $[0,1]$ *que l'on notera* x_n. *Etudier la convergence et la monotonie de la suite* (x_n). *Démontrer que* $x_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$. *Donner un équivalent de* $x_n - \frac{1}{n}$ *(on posera* $u_n = \frac{1}{n} + v_n$*) Donner un développement asymptotique à 3 termes de* x_n.

Exercice 4 *(ccem 2015) Déterminer la limite de la suite de terme général* $S_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{n+k}$. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. *Déterminer la limite de* $\left(\sum_{k=1}^n \sin\left(\dfrac{1}{n+k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 *(Ccp) Soit* (u_n) *une suite réelle définie par* $u_0 \in]0,1[$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + u_n^2\right)$.*Etudier la suite* (u_n). *On pose* $p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)$. *Montrer que la suite* (p_n) *converge. En déduire que la suite* $(2^n u_n)$ *converge.*

Exercice 6 *(Navale 2017) Montrer que toute fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *lipschitzienne de rapport* $k < 1$ *admet un point fixe.*

Exercice 7 *(Centrale Psi 2015) Résoudre l'équation* $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 8 *(Ccp) Soit* f *une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\forall (x,y)$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$. *On commence par supposer que* $f(0) = f(1) = 0$. *Montrer que* f *est impaire et 2-périodique. En déduire que* f *est bornée. Montrer que* $f(2x) = 2f(x)$. *En déduire la nullité de* f. *Déterminer* f *dans le cas général.*

Exercice 9 *(Ccp 2006) Donner un développement limité de la fonction arctangente à l'ordre* 2 *en* $x = 1$. *Donner l'asymptote en* $+\infty$ *de la courbe représentant la fonction définie par* $f(x) = x\arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ *et préciser la position par rapport à cette asymptote en* $+\infty$ *(on pourra écrire* $f(x)$ *sous forme* $ax + b + \frac{c}{x} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$*)*

Exercice 10 *Ccp: Montrer que la fonction de la variable réelle définie par* $f(x) = \dfrac{sh(x) - x}{x^3}$ *admet un prolongement de classe* C^∞.

Exercice 11 *(ccem 2015) Déterminer les fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

II Séries numériques

Exercice 12 *(ccp 2016) Pour quelle valeur du couple* (a,b) *la série de terme général* $u_n = e^{\frac{1}{n}} + a\cos\left(\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$ *est-elle convergente?*

Exercice 13 *(centrale) Etudier, suivant la valeur du couple* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *la nature de* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$.

Exercice 14 *(Ccp): Justifier la convergence et calculer la somme de la série* $\sum \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$.

Exercice 15 *(Ccp) Soit* $\alpha > 1$. *On pose* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. *A quelle condition la série de terme général* R_n *est-elle convergente?*

Exercice 16 *(Centrale): Soit* $a_0 > 0$. *On définit la suite* (a_n) *par les relations* $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Etudier la suite* (a_n). *Etudier la nature des séries* $\sum (-1)^n a_n$, $\sum a_n^2$, $\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ *et* $\sum a_n$..

Exercice 17 *(Mines Psi 2015) Calculer* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 18 *(Ensea): Soit* c_n *le nombre de chiffres dans l'écriture de* n *en base* 10. *Montrer que la série de terme général* $\frac{c_n}{n(n+1)}$ *est convergente et calculer sa somme.*

Exercice 19 *(Télecom: 2015) Etudier la convergence de la série* $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

III Intégration

Exercice 20 *(Ccp 2016) Déterminer la limite en* 0 *de* $x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos(3t)}{t} dt$.

Exercice 21 *(Tpe 2017)*

1. *Montrer que l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \arctan(t)}{(1+t^2)^2} dt$ *est convergente.*
2. *On pose, pour* $x > 0$, $F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{t \arctan(t)}{(1+t^2)^2} dt$. *Montrer que la fonction* F *est de classe* C^∞ *et déterminer* F'.
3. *En déduire la valeur de* I.

Exercice 22 *Mines Psi 2011: Soit* f *une fonction continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{C}$ *vérifiant* $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = f(a+b-x)$. *Montrer que* $\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\,dx$. *Calculer* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x e^{ix}}{1+\cos^2(x)} dx$.

Exercice 23 *(Ccp) Déterminer la limite de la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

Exercice 24 *(Ccp): Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$. *Montrer que la fonction* f *est définie et de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$. *Etudier le sens de variation de* f. *Montrer que* f *admet un prolongement de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$. *Etudier les branches infinies de la courbe* C_f.

Exercice 25 *(Mines 2018) Soit* a, b, α *des réels,* $a < b$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Etudier la convergence de* $I = \int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt$ *et en cas de convergence, calculer sa valeur.*

Exercice 26 *(Ccp 2018): Soit* $F : \lambda \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} dx$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* F.
2. *Montrer que* F *est de classe* C^1 *sur tout intervalle* $[a, +\infty[$. *Calculer* F', *puis* F.
3. *En déduire, pour* $a, b > 0$, *la valeur de* $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

Exercice 27 *(IMT 2017): Nature des intégrales généralisées* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t} dt$ *et* $\int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 28 *(Ccp 2018) Résoudre l'équation* $sh(x) = 1$. *Trouver la limite de la suite de terme général* $I_n = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} sh^n(t)\,dt$. *Montrer que* $\forall t \in \mathbb{R}$, $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$. *Montrer que si* $n \geq 2$, *alors* $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$. *A l'aide d'un encadrement, donner équivalent de* I_n.

Exercice 29 *(Ccp) Montrer que la fonction définie pour* $x > 0$ *par* $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,e^{-xt}dt$ *est de classe* C^1. *Montrer qu'il existe une constante c telle que* $f(x) = \dfrac{c - \ln(x)}{x}$.

Exercice 30 *Ccp 2007: Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n + 2t^{2n}}{1 + t^n + t^{2n}}dt$. *Montrer la suite* (u_n) *converge vers 0. Montrer que la série* $\sum u_n$ *diverge et déterminer la limite de la suite* $(n \times u_n)$.

Exercice 31 *(IMT.2016) On note, x étant un réel,* $I(x) = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^x)dt$. *a) Montrer que I est définie sur* $\mathbb{R}_+^*$. *b) Montrer que I est une fonction décroissante. c) Calculer , pour tout* $a > 0$, $\int_0^1 t^a \ln(t)dt$. *d) En déduire une expression de I comme somme de série.*

Exercice 32 *(Ccp psi 2015) Pour* $x > 0$, *on pose* $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}dt$. *Montrer que F est de classe* C^1. *Déterminer* $F(x)$ *sachant que* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 33 *(Ccp): Existence et calcul de* $\int_0^{+\infty} xe^{-\lfloor x\rfloor}dx$. *(*$\lfloor x\rfloor$ *est la partie entière de x).*

Exercice 34 *(ccp 2015) Soit f une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* C^∞. *On pose* $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ *pour* $x \neq 0$ *et* $g(0) = f'(0)$. *Montrer que pour tout x réel* $g(x) = \int_0^1 f'(xt)\,dt$. *En déduire que g est de classe* C^∞.

Exercice 35 *(Ensam Psi 2015) Soit* $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On suppose que f et f' sont de carrés intégrables sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que f est de limite nulle en* $+\infty$ *et* $-\infty$*..On suppose que f et f'' sont de carré intégrables sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que f' est de carré intégrable et* $\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 \times \int_{\mathbb{R}} (f'')^2$.

Exercice 36 *Ccp: Etudier la convergence et déterminer la limite de la suite* (u_n) *définie pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(nt)}{nt + t^2}dt$.

IV Suites et séries de fonctions

Exercice 37 *(Tpe 2017) Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$. *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions* (f_n). *Montrer que* (f_n) *converge uniformément sur tout intervalle de la forme* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$.

Exercice 38 *(Mines 2015) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions* (f_n) *définie par* $f_n(x) = 0$ *si* $|x| > \frac{1}{n}$ *et* $f_n(x) = n - n^2|x|$ *si* $|x| \leq \frac{1}{n}$. *Etudier la limite de la suite de terme général* $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,g(x)\,dx$ *ou g est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 39 *(Mines 2016) Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in [0,1]$, *on pose* $f_n(x) = 3^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$. *Etudier la convergence de la suite de fonctions* (f_n) *sur* $[0,1]$. *Comparer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$ *et* $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} (f_n(t))\,dt$. *Que peut on en déduire?*

Exercice 40 *Ensam: On pose, pour x réel,* $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^x}{1+t^2}dt$. *Etudier l'ensemble de définition, la continuité et la parité de F. Etudier la dérivabilité de F. Déterminer les limites au bornes de l'ensemble de définition de F. Montrer que* $F(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x + t^{-x}}{1+t^2}dt$ *et donner un équivalent simple de F aux bornes de son ensemble de définition.*

Exercice 41 *(IMT 2018) Soit* $x > 0$. *Montrer que la série* $\sum \dfrac{1}{ch(nx)}$ *est convergente. On pose* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{ch(nx)}$. *Montrer que la fonction f est continue. Montrer que la fonction* $x^2 f(x)$ *admet une limite en 0 et déterminer cette limite.*

Exercice 42 *(ccp 2018) Soit pour* $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt$.

1. *Déterminer la limite de la suite* (I_n).
2. *Soit* $L = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$. *Justifier l'existence de* L *et justifier que* $I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{L}{n}$.
3. *Justifer que* $L = \frac{\pi^2}{12}$ *(on admet que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$*).*

Exercice 43 *(Ccp 2018) On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \geq 0$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$.

1. *Etudier la convergence simple de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Déterminer la limite quand* n *tend vers* $+\infty$ *de* $\int_0^1 f_n(t)\, dt$.
2. *Etudier la convergence simple de la série de fonctions* $\sum f_n$. *Soit* S *sa somme. Donner, pour* $x > 0$, *une relation entre* $S(x)$ *et* $S\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. *Etudier la continuité de* S *sur* $[0, +\infty[$. *Etudier la limite de* S *en* $+\infty$.

Exercice 44 *(Mines 2017): Soit* f *une application continue de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$. *On définit la suite de fonctions* (f_n) *de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f_0 = f$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$. *Etudier la convergence de la série de fonctions* $\sum f_n$ *et déterminer sa somme à l'aide d'une équation différentielle:*

Exercice 45 *(Ccp 2017): Soit* $I = \int_0^1 \frac{t(\ln(t))^2}{2(1-t)^2} dt$. *Montrer que l'intégrale* I *converge. Développer en série entrière* $\frac{1}{(1-x)^2}$. *En déduire que* $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 46 *(Ccp 2017) Pour* $n \geq 2$, *on pose, pour* $x > 0$, $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$. *Déterminer l'ensemble de définiton* $\mathcal{D}$ *de la série de fonctions* $\sum u_n$. *Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur* $\mathcal{D}$. *On note* $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)$. *Montrer que* $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$. *Montrer que la somme* S *de cette série de fonctions est continue. La fonction* S *est-elle intégrable?*

Exercice 47 *(Ccp 2017) . On pose, pour* $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt$. *Etudier la convergence de la série* $\sum u_n$. *Montrer que* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 48 *(Ccp 2018)*

1. *Montrer la convergence de l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt$.
2. *Montrer que* $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2}$.

Exercice 49 *(Ccp 2017): Soit* $a > 0$, $I = [-a, a]$ *et* $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. *On suppose qu'il existe* $C > 0$ *tel que* $\forall x \in I$, $|\varphi(x)| \leq |Cx|$. *Le but de l'exercice est de déterminer les fonction* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ *vérifiant* $f(0) = 0$ *et* $\forall x \in I$, $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$. *Montrer que l'application* $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ *est définie et continue sur* I. *Montrer que* g *est solution du problème. En déduire l'ensemble des fonctions solutions. Montrer que si* φ *est de classe* C^1 *alors* g *est dérivable.*

Exercice 50 *(Ccp 2011): Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $f_n(x) = \frac{1}{1+e^{nx}}$. *Etudier la convergence simple de la série de fonctions* $\sum f_n$. *Montrer la continuité de* $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *La fonction* S *est-elle de classe* C^1 *?*

Exercice 51 *(Mines Psi 2015) Donner le domaine de convergence de* $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+x^2}$. *Démontrer que la fonction* f *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exercice 52 *(Ccp psi 2015) On pose* $u_n(x)=\dfrac{\ln\left(1+n^2x^2\right)}{n^2\ln(1+n)}$. *Donner le domaine de convergence de* $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$. *Démontrer que la fonction* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$.

Exercice 53 *(Ccp 2011) Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum 2^{n\times(-1)^n}x^n$.

Exercice 54 *(Ccp) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum\limits_{n\geq 0}(3n+1)^2 x$

Exercice 55 *(Mines 2012) Etudier le rayon de convergence de la série entière* $\sum\ln(n)\,x^n$. *On pose* $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. *Montrer que* $\ln(n)\sim_{n\to+\infty}H_n$. *Donner un équivalent de* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln(n)\,x^n$ *au voisinage de* $x=1$.

Exercice 56 *(Ccp 2016) Soit* $a\in\mathbb{R}$, *avec* $|a|<1$ *et* $f:x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sin(a^nx)$. *Montrer que* f *est définie et de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que pour tout* $k\in\mathbb{N}^*$, *pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $\left|f^{(k)}(x)\right|\leq\dfrac{1}{1-|a|}$. *Montrer que* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 57 *En utilisant le développement en série entière de la fonction arctangente, montrer que* $\dfrac{\pi}{4}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$.

Exercice 58 *(ccp 2018) Soit la suite réelle* (a_n) *définie par* $a_0=a_1=1$ *et* $\forall n\geq 1$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$.

1. *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $1\leq a_n\leq n^2$.
2. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_nx^n$.
3. *En déduire une équation différentielle d'ordre* 1 *vérifiée par la somme* S.*de cette série entière et calculer* $S(x)$.

Exercice 59 *(ccp 2018) Déterminer le rayon de convergence* R *et la somme* $S(x)$ *de la série entière* $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{x^n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 60 *(IMT 2017): Donner le développement en série entière de* $x\mapsto\ln\left(1+x+x^2\right)$.

Exercice 61 *(Tpe-eivp) Existence et calcul de* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}$.

Exercice 62 *(Ccp 2012) Trouver les solutions de l'équation* $(\mathcal{E}):2xy''+y'-y=0$ *développables en série entière. Exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.*

Exercice 63 *(Ccp 2018): On pose, pour* $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\int_0^1\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n dt$. *Montrer que la suite* (a_n) *est convergente et déterminer sa limite.Montrer que la série de terme général* $(-1)^n a_n$ *est convergente. Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\geq\dfrac{1}{n+1}$. *En déduire le rayon de convergence de* $\sum a_nx^n$. *Montrer que fonction* $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ *vérifie une équation différentielle que l'on explicitera (on cherchera une relation de récurrence entre les* a_n*).*

V Espaces vectoriels normés, fonctions de plusieurs variables

Exercice 64 *(Tpe 2018) On définit, pour* $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$ *et* $N_2(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

1. *Montrer que* N_1 *et* N_2 *sont des norme de* $\mathbb{R}[X]$.
2. *On pose,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \dfrac{X^n}{n}$. *Etudier la convergence de la suite* (P_n) *pour les normes* N_1 *et* N_2.

Exercice 65 *(Mines 2017)*

1. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Montrer que* F *est fermé.*
2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On pose* $\exp_p(A) = \sum_{k=0}^{p} \dfrac{1}{k!} A^k$. *Montrer que la suite* $\left(\exp_p(A)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge (on note* $\exp(A)$ *la limite).*
3. *Montrer que* $\exp(A)$ *est un polynôme en* A.
4. *Existe-t-il un polynôme* P *tel que pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(A) = P(A)$*?*

Exercice 66 *(Centrale) Pour* $n \geq 1$, *on pose* E_n *l'ensemble des polynômes unitaires de degré* n *à coefficients réels. Montrer que* $\inf\limits_{P\in E_n} \left(\int_0^1 |P(t)|\, dt\right) > 0$.

Exercice 67 *(Mines 2018) Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ *vérifiant* $\partial_{1,1}^2 f + \partial_{2,2}^2 f = 0$. *Soit* $(a, b) \in U$. *On pose* $F(r) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\cos(t), b + r\sin(t))\, dt$. *Montrer que* F *est de classe* C^2. *Expliciter* F' *et* F'' *pour* r *petit. Montrer que pour* r *assez petit,* $rF''(r) + F(r) = 0$. *En déduire que* $f(a, b) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\cos(t), b + r\sin(t))\, dt$ *pour* r *assez petit.*

Exercice 68 *(CCP 2016) On pose* $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ *pour* $(x, y) \neq (0, 0)$ *et* $f(0, 0) = 0$. *La fonction* f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}^2$*? est-elle* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$*? Existence et calcul de* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Exercice 69 *Déterminer les fonctions* $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} : (E)$ *en passant en polaires.*

Exercice 70 *(Mines ponts 2017): Soit* φ *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* C^2. *Soit* F *la fonction définie sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ *par* $F(x, y) = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. *Déterminer les fonctions* φ *pour lesquelles la fonction* F *vérifie l'équation* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0 : (\mathcal{E})$.

Exercice 71 *(ccp 2018) Trouver les extremum locaux de la fonction définie par* $f(x, y) = x^2 y + \ln\left(4 + y^2\right)$..

Exercice 72 *(ccp 2018) Soit* $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ *et* $f : D \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y}$. *Montrer que* f *admet un unique point critique dans* D. *Déterminer une fonction* $e(h, k)$ *telle que au voisinage du point critique* (a, b), *on aie* $f(a + h, b + k) - f(a, b) = e(h, k) + o\left(h^2\right) + o\left(k^2\right)$. *Déterminer si* f *admet des extremum sur* D

Exercice 73 *(ccp 2018) Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x, y) = x^2 + x^2 y + y^3$

1. *Montrer que* f *admet un point critique mais n'y atteint pas d'extremum local.*
2. *Soit* $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\right\}$. *Montrer que* f *admet un minimum* m *et un maximum* M *sur* D. *Déterminer les points de* D.*en lesquels ils sont atteints et trouver leur valeur.*

VI Equations différentielles

Exercice 74 *(ccp 2018): Soit f la fonciton définie par $f(x) = \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$.*

1. *Montrer que f est de classe C^1 sur un intervalle I. La fonction f est-elle de classe C^1 sur son ensemble de définition?*
2. *Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre $(\mathcal{E})$ à coefficients polynômiaux.*
3. *Montrer qu'il existe une unique solution impaire de $(\mathcal{E})$ qui soit développables en série entière au voisinage de* 0.
4. *En déduire un développement en série entière de f.*

Exercice 75 *(ccp 2018) On considère l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + 2y = 1 : (\mathcal{E})$.*

1. *Trouver une solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.*
2. *Avec le changement de variable $x = e^t$, résoudre l'équation $(\mathcal{E})$sur $]0, +\infty[$.*

Exercice 76 *(ccp 2018) On considère l'équation différentielle $t\left(t^2-1\right)x'(t) + 2x(t) = t^2 : (\mathcal{E})$*

1. *Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{t(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$.*
2. *Résoudre $(\mathcal{E})$.*

Exercice 77 *(Mines ponts 2018) On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ où a et b désignent des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Calculez pour deux solutions f et g de $(\mathcal{E})$ la quantité $W = fg' - f'g$.*
2. *On suppose a impaire et b paire. Montrez que la fonction f solution de $(\mathcal{E})$ avec les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ est paire. Montrez de même que la fonction g solution de $(\mathcal{E})$ avec les conditions initiales $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ est impaire. En déduire qu'il existe une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$ constituée d'une fonction paire et impaire.*
3. *On suppose qu'il existe une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$ constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Montrez que a est impaire et b paire.*

Exercice 78 ***(Telecom sud-Paris 2013):*** *Résoudre l'équation $(\mathcal{E}) : y'' - 2y' + y = |x|$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 79 *(ccp PSI 2015) On donne l'équation différentielle $x^{(3)}(t) + 5x''(t) + 7x'(t) + 3x(t) = 0 : (\mathcal{E})$. Pour une fonction x trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice carrée A telle que x solution de $(\mathcal{E})$ soit équivalent à $X' = AX$. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.*

VII Géométrie

Exercice 80 *(Navale 2018) Soit S la surface d'équation $x^2 - y^2 - z = 1$ et P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Déterminer l'ensemble des points M de S tels que le plan tangent à S en M soit parallèle à P.*

Exercice 81 *(Ccp) On pose $x(t) = \dfrac{t^3}{t^2-1}$ et $y(t) = \dfrac{1}{t^3-t}$.Trouver les asymptotes et réduire l'intervalle d'étude (on pourra considérer $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$) Tracer la courbe.*

Exercice 82 *(CCEM 2012) Etudier la courbe $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 + 2t \\ y = \dfrac{1}{t^2} + t^2 \end{array}\right.$* ***au voisinage de son point singulier.***