~~Vendredi 7 juin~~

35 **Exercice 1** *(Ensam Psi 2015) Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que f et f' sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$..On suppose que f et f'' sont de carré intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est de carré intégrable et $\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 \times \int_{\mathbb{R}} (f'')^2$.*

Solution de l'exercice:
On rappelle le résultat vu en cours: ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge) $\Rightarrow l = 0$. dont la démonstration est à connaitre.
On suppose que f et f' sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$. On a $|ff'(x)| \leq \frac{1}{2}\left(f^2(x) + (f'(x))^2\right)$, donc ff' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x ff'(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(f^2(x) - f^2(0)\right)$ donc f^2 admet une limite réelle en $+\infty$. Comme $\int_{\mathbb{R}_+} f^2$ est convergente, la fonction f^2 admet une limite nulle en $+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On obtient de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
On suppose maintenant que f et f'' sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$. On obtient de même que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left(\int_{-A}^A ff''(x)\,dx\right)^2 \leq \int_{-A}^A f^2(x)\,dx \times \int_{-A}^A \left(f''\right)^2(x)\,dx$ et en passant à la limite, $\int_{\mathbb{R}} ff'' \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 \times \int_{\mathbb{R}} \left(f''\right)^2$: (R) Or $\int_u^v (f'(x))^2\,dx = ff'(v) - ff'(u) - \int_u^v ff''(x)\,dx$: $(\mathcal{R})$. Il suffit donc de montrer $\lim\limits_{u\to+\infty} ff'(u) = \lim\limits_{v\to-\infty} ff'(v) = 0$ pour en déduire que $\int_{\mathbb{R}} (f')^2$ converge et $\int_{\mathbb{R}} (f')^2 = -\int_{\mathbb{R}} ff''$.et en déduire le résultat.
Par intégration par parties, $\int_0^A (f'(x))^2\,dx = ff'(A) - ff'(0) - \int_0^A ff''(x)\,dx$. $A \mapsto \int_0^A (f'(x))^2\,dx$ admet une limite (finie ou $+\infty$) en $+\infty$ car $f'^2 \geq 0$ et $A \mapsto \int_0^A ff''(x)\,dx$ admet une limite finie car ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit $A \mapsto ff'(A)$ admet une limite L (finie ou $+\infty$) en $+\infty$ Si $L \neq 0$ alors $A \mapsto \int_0^A 2ff'(x)\,dx = f^2(A) - f^2(0)$ aurait pour limite $\pm\infty$ en $+\infty$ et donc $\lim_{A\to+\infty} f^2(A) = +\infty$. donc f^2 ne serait pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\lim_{A\to+\infty} ff'(A) = 0$. On montre de même que $\lim_{A\to-\infty} ff'(A) = 0$. Comme $\int_u^v (f'(x))^2\,dx = ff'(v) - ff'(u) - \int_u^v ff'(x)\,dx$, en passant à la limite dans $(\mathcal{R})$, on obtient $\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 = \left(-\int_{\mathbb{R}} ff''\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 \times \int_{\mathbb{R}} (f'')^2$.

36 **Exercice 2** *Ccp: Etudier la convergence et déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(nt)}{nt+t^2}dt$.*

Solution de l'exercice: Pour appliquer le théorème de convergence dominée, l'inégalité $\left|\dfrac{\sin(nt)}{nt+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t+t^2} = \varphi(t)$ ne convient pas car $t \mapsto \dfrac{1}{t+t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Pour $t \in]0,1]$, $|\sin(nt)| \leq nt$. $\left|\dfrac{\sin(nt)}{nt+t^2}\right| \leq \dfrac{nt}{nt+t^2} \leq 1$ et si $t > 1$, $\left|\dfrac{\sin(nt)}{nt+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t+t^2}$. On pose $\varphi(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0,1] \\ \dfrac{1}{t+t^2} \text{ si } t > 1 \end{cases}$. (A finir)

38 **Exercice 3** *(Mines 2015) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x)$*

donc $|I_n - g(0)| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)(g(x) - g(0))| \, dx \leq \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)| \, dx = \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) \, dx = \varepsilon$. Comme ε est quelconque, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(I_n) = g(0)$.

39 **Exercice 4** *(Mines 2016) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = 3^n \left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$. Etudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t) \, dt$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} (f_n(t)) \, dt$. Que peut on en déduire?*

Solution de l'exercice: On a, si $x \in]0,1[$, $3^n x^{2^n} = e^{n\ln(3)} e^{2^n \ln(x)} = e^{n\ln(3) + 2^n \ln(x)} \to_{n\to+\infty} 0$ car $n\ln(3) + 2^n \ln(x) \sim_{n\to+\infty} 2^n \ln(x) \to_{n\to+\infty} -\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Le résultat est aussi vrai pour $x = 0$ ou $x = 1$ donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. On a $\int_0^1 f_n(t) \, dt = 3^n \int_0^1 t^{2^n} - t^{2^{n+1}} dt = 3^n \left(\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}\right) = 3^n \left(\frac{2^{n+1} - 2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}\right) = 3^n \left(\frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{6^n}{2\times 4^n} \to_{n\to+\infty} +\infty$. Il n'y a donc pas convergence uniforme de la suite (f_n).

$\to_{x\to-1} \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$. On

$\leq F(x) - \frac{1}{x+1} \leq 2$ donc

ux bornes de son ensemble

41 **Exercice 6** *(IMT 2018) Soit $x > 0$. Montrer que la série $\sum \frac{1}{ch(nx)}$ est convergente. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{ch(nx)}$. Montrer que la fonction f est continue. Montrer que la fonction $x^2 f(x)$ admet une limite en 0 et déterminer cette limite.*

Solution de l'exercice: L'inégalité $ch\,(a) \leq \dfrac{e^a}{2}$ entraîne que $0 \leq \dfrac{1}{ch\,(nx)} \leq \dfrac{2}{e^{nx}} = 2\left(e^{-x}\right)^n$. La série $\sum \left(e^{-x}\right)^n$ converge car $e^{-x} < 1$ donc la série $\sum \dfrac{1}{ch\,(nx)}$ converge. Montrons que f est continue sur $]0,+\infty[$. Soit $a > 0$. Posons $u_n\,(x) = \dfrac{1}{ch\,(nx)}$. Pour tout n, la fonction u_n est continue sur $[a,+\infty[$. Si $x \geq a$, $ch\,(nx) \geq ch\,(na) > 0$ donc $0 < u_n\,(x) \leq u_n\,(a)$. On a donc $\sup_{x\geq a} |u_n\,(x)| = u_n\,(a)$ et la série $\sum u_n\,(a)$ converge donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. On en déduit que f est continue sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$ quelconque donc f est continue sur $]0,+\infty[$. On a $x^2 f\,(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^2}{ch\,(nx)}$. Posons $v_n\,(x) = \dfrac{x^2}{ch\,(nx)}$ $(x \geq 0)$. Pour appliquer le théorème de la double limite, montrons que $\sum v_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$. On a $v_n\,(x) \leq 2x^2 e^{-nx} = w_n\,(x)$. On a $w_n'\,(x) = 2x\,(2-nx)\,e^{-nx}$. Les variations de w_n sur $]0,+\infty[$ donnent alors $0 \leq w_n\,(x) \leq w_n\left(\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{8}{n^2}e^{-2}$. On a donc $\sup_{x>0} |v_n\,(x)| \leq \dfrac{8e^{-2}}{n^2}$. On en déduit que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement donc uniformément sur $0,+\infty$. Comme $\forall n, \lim\limits_{x\to 0} v_n\,(x) = 0$, le théorème de la double limite donne $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f\,(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\,(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to 0} v_n\,(x) = 0$ (on en déduit que $f\,(x) = o_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$).

44 **Exercice 9** *(Mines 2017): Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On définit la suite de fonctions (f_n) de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0 = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$. Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ et déterminer sa somme à l'aide d'une équation différentielle.*

Solution de l'exercice:

1. Soit $a > 0$. a fonction f est continue sur le segment $[0, a]$ donc bornée. Posons $M = \sup_{[0,a]} |f|$. On a $f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ donc $|f_1(x)| \leq M\,|x \cancel{- a}|$. Montrons par récurrence que $\forall x \in [a, b]\,,\ |f_n(x)| \leq \dfrac{Mx^n}{n!} = \dfrac{Mx^n}{n!}$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.On a $|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_n(t)\,dt\right| \leq \int_0^x |f_n(t)|\,dt \leq \int_0^x \dfrac{Mt^n}{n!}dt = \dfrac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$.

   Soit $x \in [0, a]$. La série $\sum \dfrac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$ converge donc la série $\sum f_n(x)$ converge (absolument). La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement.

   Remarque: $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| \leq \dfrac{Ma^n}{n!}$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

2. Posons $g = \sum f_n$. On veut utiliser le fait que $f'_{n+1} = f_n$ et utiliser le théorème de dérivation terme à terme. On pose donc $u = g - f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ (car $f_0 = f$ n'est supposée que continue). La série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement vers u, chaque $f_n, (n \geq 1)$ est de classe C^1 et $f'_n = f_{n-1}$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} f'_n = \sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, a]$ vers g. On a donc $u' = g$ et donc $u' = u + f$. La méthode de variation de la constante appliquée à l'équation $u' - u = f$ entraîne que $u(x) = e^x\left(\lambda + \int_0^x f(t)\,e^{-t}dt\right)$ (vérification laissée au lecteur) et, comme $u(0) = 0$ car $f_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$, on a donc $u(x) = e^x \times \int_0^x f(t)\,e^{-t}dt$ donc $g(x) = f(x) + e^x \times \int_0^x f(t)\,e^{-t}dt$.