

- 51 **Exercice 6** (Mines Psi 2015) Donner le domaine de convergence de  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$ . Démontrer que la fonction  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

**Solution de l'exercice:** Posons  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la série  $\sum u_n(x)$  est alternée et la suite  $(|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 en décroissant donc la série  $\sum u_n(x)$  est convergente. La fonction  $f$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ . Elle est continue (convergence normale car  $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$  et continuité des  $u_n$ ). D'après le CSSA, On a  $|f(x)| \leq |u_0(x)| = \frac{1}{1+x^2}$ . La fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  est paire et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car  $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$  donc  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On a  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} dx = \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (\frac{x}{n})^2} dx = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du$  ( $x \mapsto \frac{x}{n}$  est une bijection de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  donc  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2n}$  donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{n}$  et la série  $\sum \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x)| dx$  diverge. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'interversion série-intégrale. On va montrer qu'on peut cependant montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{n}$ . Posons  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \pi}{n}$  et  $\delta_n = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - S_N \right|$ . On a  $f(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$  donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N u_n(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) dx$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N u_n(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x) dx$  (par linéarité de l'intégrale) donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N u_n(x) dx = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \pi}{n} = S_N$ . On a donc  $\delta_n = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) dx \right|$ . Or, d'après le CSSA on a  $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) dx \right| \leq |u_{N+1}(x)|$  qui est intégrable donc  $\delta_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{N+1}(x)| dx = \frac{\pi}{2(N+1)} \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$ . On en déduit que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{n}$  (cette limite vaut  $-\ln(2)$  mais je pense que ça ne faisait pas partie de l'exercice).

- 52 **Exercice 7** (Ccp psi 2015) On pose  $u_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{n^2 \ln(1 + n)}$ . Donner le domaine de convergence de  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ . Démontrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Solution de l'exercice:** On commence par le calcul classique (cf logarithmes d'équivalents)

$$\text{On a } u_n(0) = 0 \text{ donc } \sum u_n(0) \text{ converge. Si } x \neq 0 \text{ alors } u_n(x) = \frac{\ln(n^2(1 + \frac{x^2}{n^2}))}{n^2 \ln(1 + n)} = \frac{2 \ln(n) + \ln(1 + \frac{x^2}{n^2})}{n^2 (\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n}))} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(n)}{n^2 \ln(n)} = \frac{2}{n^2}$$

$\ln(1+n^2x^2) = \ln(n^2x^2) + \ln(1+1/n^2x^2)$  équivalent à  $\ln(n^2x^2) = 2\ln(n) + 2\ln(x)$  équivalent à  $2 \ln(n)$

$\frac{2 \ln(n)}{n^2 \ln(n)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2}$  donc la série  $\sum u_n(x)$  converge donc  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $0 < a < b$ . Les fonctions  $u_n$  sont de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et  $u'_n(x) = \frac{1}{\ln(1+n)} \times \frac{2x}{1+n^2x^2}$ . On a  $|u'_n(x)| \leq \frac{2b}{\ln(1+n)(1+n^2a)} = \alpha_n$ . On en déduit que  $\|u'_n\|_\infty \leq \alpha_n$  avec  $\alpha_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2b}{an^2 \ln(1+n)} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  donc la série  $\sum \|u'_n\|_\infty$  converge. La série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et la série de fonctions  $\sum u'_n$  converge normalement donc uniformément sur  $[a, b]$  donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  donc sur  $]0, +\infty[$  et  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$ . Par parité,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]-\infty, 0[$ .

**53 Exercice 8** (Ccp 2011) Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum 2^{n \times (-1)^n} x^n$ .

**Solution de l'exercice:** Il s'agit de la somme des séries entières  $\sum 2^{2p} x^{2p}$  et  $\sum 2^{-(2p+1)} x^{2p+1}$ . On a  $\sum 2^{2p} x^{2p} = \sum (4x^2)^p$  et cette série converge ssi  $|4x^2| < 1$ . La première série entière est de rayon de convergence  $R_1 = \frac{1}{2}$ . On a  $\sum 2^{-(2p+1)} x^{2p+1} = \frac{x}{2} \sum \left( \frac{x^2}{4} \right)^p$  et est de rayon de convergence  $R_2 = 2$ . Les deux rayons étant distincts, la série entière  $\sum 2^{n \times (-1)^n} x^n$  a pour rayon de convergence  $R = \frac{1}{2}$ . De plus  $\sum_{n=0}^{+\infty} = \sum_{p=0}^{+\infty} (4x^2)^p + \frac{x}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \frac{x^2}{4} \right)^p = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{x}{2 \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)}$ .