Analyse 4: vendredi 7 juin
TH d'interversion

Exercice 1 *(Ccinp) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum_{n\geq 0}(3n+1)^2 x^n$.

Exercice 2 *(ccinp)*

1. *Calculer* $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. *Donner le développement en série entière de la fonction arctangente. Montrer que* $\pi = 8\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$
3. *Sans faire appel à une valeur approchée de* π, *déterminer avec la calculatatrice une valeur de* n *à partir de laquelle* $8\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+1}$ *est une approximation de* π *à* 10^{-10} *près.*

Exercice 3 *(ccinp) Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *On pose* $H_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.

1. *Montrer que pour tout* $i\in\mathbb{N}$, *l'intégrale généralisée* $\int_0^1 u^i \ln(u)^2\, du$ *converge et vaut* $\frac{2}{(i+1)^3}$.
2. *Montrer que* $\ln(n+1)\leq H_n\leq \ln(n)+1$. *En déduire que la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{H_n}{n^2}$ *est convergente.*
3. *Montrer que la série* $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(n+k)}$ *et a pour somme* $\frac{H_n}{n^2}$.
4. *Montrer que l'intégrale généralisée* $\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\,dx$ *converge.*
5. *Montrer que* $\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\,dx = -\frac{H_n}{n}$.
6. *En déduire que* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^2} = \int_0^1\frac{\ln(1-x)^2}{x}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

Exercice 4 *(Ccinp): Montrer que la fonction de la variable réelle définie par* $f(x) = \frac{sh(x)-x}{x^3}$ *admet un prolongement de classe* C^∞.

Exercice 5 *(centrale) Soit* $a\in\mathbb{R}$, *avec* $|a|<1$. *On pose, pour* $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(a^n x)$.

1. *Justifier que la fonction sinus est* 1*-lipschitzienne sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que la fonction* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Déterminer les fonctions* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continues vérifiant* $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)-g(ax)=\sin(x)$.
4. *Montrer que pour tout* $k\in\mathbb{N}^*$, *pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $\left|f^{(k)}(x)\right|\leq\frac{1}{1-|a|}$. *En déduire que* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *(centrale): On pose, pour x réel, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt$.*

1. *Etudier l'ensemble de définition de F.*
2. *Etudier la continuité et la parité de F.*
3. *Etudier la dérivabilité de F.*
4. *Déterminer les limites au bornes de l'ensemble de définition de F.*
5. *Montrer que $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{-x}}{1+t^2} dt$ et donner un équivalent simple de F aux bornes de son ensemble de définition.*

Exercice 7 *(Centrale 2) On considère l'équation $(1-x)\, y'' = y$ sur $]-\infty, 1[$.*

1. *Justifier qu'il existe une et une seule solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.*
2. *Avec python: Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2; 0,95]$.*
3. *Avec python: Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2}$. Représenter graphiquement a_n pour $n \in [0, 100]$.*
4. *Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.*
5. *Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{100} a_k x^k$.sur $[-2; 0,95]$. Que constate-on? Démontrer le résultat.*

Exercice 8 *(IMT) Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin^2(n\theta)}{2^n}$.*

Exercice 9 *(X PSI 2022)*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}} dt$.

1. *On suppose que $f(0) \neq 0$. Trouver un équivalent de a_n.*
2. *Même question si f est la fonction sinus?*