Analyse 3: mercredi 5 juin
suites et séries de fonctions

Exercice 1 *(IMT) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose* $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

1. *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions* (f_n).
2. *Montrer que* (f_n) *converge uniformément sur tout intervalle de la forme* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$.

Solution de l'exercice: 1a: CV simple: On a $f_n(0) = 0 \to_{n\to+\infty} 0$
Si $x \neq 0$, $f_n(x) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{n^2x^2} \to_{n\to+\infty} 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (notée f).
1b: On pose $\|g\|_\infty = \sup_{x\in I} |g(x)|$. Si $I = [0, +\infty[$, $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\|f_n - f\|_\infty \not\to_{n\to+\infty} 0$ donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformémént sur $[0, +\infty[$.
2: Si $I = [a, +\infty[$ avec $a > 0$ alors $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right| \leq \dfrac{nx}{n^2x^2} = \dfrac{1}{nx} \leq \dfrac{1}{na}$.
On en déduit que $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{1}{na} \to_{n\to+\infty} 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformémént sur $[a, +\infty[$.

Exercice 2 *(ccinp) On pose, pour $x \geq 0$,* $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x+1}$.

1. *Montrer que la fonction f est intégrable sur* $[0, +\infty[$.
2. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{e^x+1}dx = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3}$.

Solution de l'exercice: 1: La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.
En $+\infty$, on a $x^2 f(x) = \dfrac{x^4}{e^x+1} \sim x^4 e^{-x} \to 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2: On a si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x+1} = \dfrac{x^2}{e^x(1+e^{-x})} = x^2e^{-x}\dfrac{1}{1+e^{-x}} = x^2e^{-x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}$ car $0 < e^{-x} < 1$
D'où $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^2e^{-(n+1)x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^2e^{-nx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n(x)$ avec $v_n(x) = x^2e^{-nx}$.
Posons $w_n(x) = (-1)^{n-1}v_n(x)$ et appliquons le théorème d'interversion séries-intégrales.

- Chaque w_n est continue sur $]0, +\infty[$.
- La série de fonctions $\sum w_n$ converge simplement vers f.
- Chaque w_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $|w_n| = v_n$ est continue sur $[0, +\infty[$
  et $x^2v_n(x) = x^4e^{-nx} \to_{x\to+\infty} 0$.donc $v_n(x) = o_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. IPP sous réserve de limites finies:
  $\int_0^{+\infty} v_n(x)\,dx = \left[-\dfrac{1}{n}x^2e^{-nx}\right]_0^{x\to+\infty} + \dfrac{2}{n}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}dx = \dfrac{2}{n}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}dx$ (croissances comparées)
  $\int_0^{+\infty} v_n(x)\,dx = \left[-\dfrac{1}{n}xe^{-nx}\right]_0^{x\to++\infty} + \dfrac{2}{n^2}\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx = -\dfrac{2}{n^3}\left[e^{-nx}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{2}{n^3}$ (croissances comparées) donc
  $\int_0^{+\infty} |w_n(x)|\,dx = \dfrac{2}{n^3}$

- La série $\sum \int_0^{+\infty} |w_n(x)|\,dx$ est une série convergente.
  On en déduit que f est intégrable (ce qu'on avait déjà vu) et
  $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} w_n(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2}{n^3}$.

Exercice 3 *(IMT) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = 3^n \left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$.*

1. *Etudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.*
2. *Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} (f_n(t))\,dt$. Que peut on en déduire?*

Solution de l'exercice: 1: On a, si $x \in\,]0,1[$, $3^n x^{2^n} = e^{n\ln(3)} e^{2^n \ln(x)} = e^{n\ln(3)+2^n\ln(x)} \to_{n\to+\infty} 0$ car $n\ln(3) + 2^n \ln(x) \sim_{n\to+\infty} 2^n \ln(x) \to_{n\to+\infty} -\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Le résultat est aussi vrai pour $x = 0$ ou 1 donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
1: On a $\int_0^1 f_n(t)\,dt = 3^n \int_0^1 t^{2^n} - t^{2^{n+1}} dt = 3^n \left(\dfrac{1}{2^n+1} - \dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right) = \dfrac{3^n}{2^n}\left(\dfrac{1}{1+1/2^n} - \dfrac{1}{2+1/2^n}\right)$ et
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+1/2^n} - \dfrac{1}{2+1/2^n} = \dfrac{1}{2}$ donc $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \to_{n\to+\infty} +\infty$.
S'il y avait convergence uniforme de la suite (f_n) on aurait (th d'interversion limite intégrale sur un segment) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = 0$, ce qui n'est pas le cas donc il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice 4 *(Ccinp 2017): Soit $I = \int_0^1 \dfrac{t(\ln(t))^2}{2(1-t)^2} dt$.*

1. *Montrer que l'intégrale I est convergente.*
2. *Développer en série entière $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.*
3. *En déduire que $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.*

Solution de l'exercice: 1:Posons, pour $t \in\,]0,1[$, $f(t) = \dfrac{t(\ln(t))^2}{2(1-t)^2}$. La fonction f est définie et continue sur $]0,1[$.
On a $\lim\limits_{t\to0} f(t) = 0$ donc f admet un prolongement par continuité en 0
De plus, $\ln(1+h) \sim_{h\to0} h$ donc $\ln(t) \sim_{t\to1} t-1$ donc $\lim\limits_{t\to1} f(t) = \frac{1}{2}$ donc f admet un prolongement par contiuité en 1 l'intégrale I converge.
2: En dérivant la série géométrique, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ pour $x \in\,]-1,1[$
3: On en déduit que $I = \int_0^1 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2} t^n \ln^2(t)\,dt$. Posons, pour $n \geq 1$, $u_n(t) = \dfrac{n}{2} t^n \ln^2(t)$ et appliquons le théorème d'interversion série intégrale sur $]0,1[$.
- Les fonctions u_n sont continues par morceaux sur $]0,1[$.
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$ (vers f).
- Chaque fonction u_n est intégrable sur $]0,1[$ (prolongeable par continuité en 0 et 1).
- On a $\int_{]0,1[} |u_n| = \int_{]0,1[} u_n = \int_0^1 \dfrac{n}{2} t^n \ln^2(t)\,dt = \left[\frac{n}{2(n+1)} t^{n+1} (\ln(t))^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{n+1} t^n \ln(t)\,dt = -\int_0^1 \frac{n}{n+1} t^n \ln(t)\,dt$ donc $\int_{]0,1[} u_n = -\left[\frac{n}{n+1} t^{n+1} \ln(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{n}{(n+1)^2} t^n dt = \int_0^1 \frac{n}{(n+1)^2} t^n dt = \frac{n}{(n+1)^3} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ donc la SATP $\sum \int_{]0,1[} |u_n|$ et $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,1[} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$. Comme $\frac{n}{(n+1)^3} = \frac{n+1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 5 *(Ccinp):*

1. *Justifier la convergence et calculer* $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(1-x)^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}{n}$*.pour* $x\in\left]\dfrac{1}{2},2\right[$.

2. *Peut on étendre le résultat?*

Solution de l'exercice: 1: La série entière $\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 et $\forall x\in\left]-1,1\right[,\ln(1-x)=-\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n}$.

Cette série converge pour $x=-1$: $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ est spéciale alternée et el diverge pour $x=1$. La série $\sum\dfrac{(1-x)^n}{n}$ converge donc si et seulement si $1-x\in\left[-1,1\right[$ et la série $\sum\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}{n}$ converge donc si et seulement si $1-\frac{1}{x}\in\left[-1,1\right[$. Or $\begin{cases}-1\leq 1-x<1\\-1\leq 1-\frac{1}{x}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\leq 2\\0<\frac{1}{x}\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\leq x\leq 2$. On a, si $\dfrac{1}{2}<x<2$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(1-x)^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}{n}=-\ln(1-(1-x))-\ln\left(1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=-\ln(x)-\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

2: On peut étendre la relation $\ln(1+x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ à $x=-\cancel{1}$:

Posons $g(x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$.

Montrons que $g(1)=\ln(2)$. Pour cela, montrons que g est continue sur $[0,1]$.

Appliquons le th de continuité de la somme de la série de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0,1]$ avec $u_n(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$.

- Les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$.
- CV simple (déja connu sur $[0,1[$): CSSA (qui servira pour la CV uniforme):

pour x fixé,

- $(-1)^n u_n(x)=-\dfrac{x^n}{n}\leq 0$ donc de signe constant.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=0$
- $|u_{n+1}(x)|=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\leq\dfrac{x^n}{n}\leq|u_n(x)|$ car $x\in[0,1]$.

donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

- CV uniforme:

Remarque: $u_n(1)=\dfrac{1}{n}$donc $\|u_n\|_\infty\geq\frac{1}{n}$ donc il n'y a pas convergence normale.

D'après CSSA, $|R_n(x)|\leq|u_{n+1}(x)|=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\leq\dfrac{1}{n+1}$ donc $\|R_n\|_\infty\leq\frac{1}{n}\to_{n\to+\infty}0$.

On en déduit que g est continue sur $[0,1]$..

Or $g(x)=\ln(1+x)$ si $x<1$ donc $\lim\limits_{x\to 1}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)$ donc $\ln(2)=g(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1^n}{n}$, ce qui permet d'étendre le résultat à $x\in\left\{\frac{1}{2},2\right\}$.

Exercice 6 *(ccinp) Soit pour* $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1\ln(1+t^n)\,dt$.

1. *Déterminer la limite de la suite* (I_n).

2. *Soit* $L=\int_0^1\dfrac{\ln(1+u)}{u}du$. *Justifier l'existence de* L *et justifier que* $I_n\sim_{n\to+\infty}\dfrac{L}{n}$.

3. *Justifer que* $L = \dfrac{\pi^2}{12}$ *(on admet que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$*).*

Solution de l'exercice: 1: Appliquons le théorème de convergence dominée sur $[0,1[$ à $f_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$.
- On a, pour $t \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- Les fonctions f_n est sont continues donc CPM sur $[0,1[$.
- $|f_n(t)| \leq \ln(2) = \varphi(t)$. La fonction φ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1[$.
D'après le théorème de convergence dominée, (I_n) converge vers $\int_0^1 0dt = 0$.
2: On a $\ln(1+u) \sim_{u\to0} u$ donc $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0,1]$ donc l'intégrale L converge.
Si $n \geq 1$, par le changement de variable C^1 et bijectif strictement croissant de $]0,1]$ dans $]0,1]$ défini par $u(x) = x^n$, on a $nI_n = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+t^n)}{t^{n-1}} nt^{n-1}dt = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}du$. Posons $g_n(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}u^{\frac{1}{n}}$. On a $u \in]0,1]$ donc $u^{\frac{1}{n}} \leq u|$ et $g_n(u)| \leq \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ qui est intégrable sur $]0,1]$. Le téhorème de convergence dominée donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}du = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}du = L$ donc $I_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{L}{n}$.
3: Pour $u \in]0,1[$, $\ln(1+u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}u^n$ donc $\dfrac{\ln(1+u)}{u} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}u^{n-1}$. Posons $v_n(u) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}u^{n-1}$.
- La fonction v_n est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $]0,1[$.
- La série de fonction $\sum v_n$ converge simplement vers $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ sur $]0,1[$
- $\int_0^1 |v_n(u)|\, du = \dfrac{1}{n^2}$ donc, comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, le th d'interversion $\sum - \int$ donne
$\int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}du = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 v_n(u)\, du = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = L.$
On a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} - L = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p)^2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ donc $L = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Exercice 7 *(IMT 2018)*

1. *Soit* $x > 0$*..Montrer que la série* $\sum \dfrac{1}{ch(nx)}$ *est convergente.*

2. *On pose, pour* $x > 0$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{ch(nx)}$.

   (a) *Montrer que la fonction* f *est continue.*

   (b) *Montrer que la fonction* $x^2 f(x)$ *admet une limite en* 0 *et déterminer cette limite.*

Solution de l'exercice: 1: L'inégalité $ch(x) \leq \dfrac{e^x}{2}$ entraîne que $0 \leq \dfrac{1}{ch(nx)} \leq \dfrac{2}{e^{nx}} = 2(e^{-x})^n$. La série $\sum (e^{-x})^n$ converge car $e^{-x} < 1$ donc la série $\sum \dfrac{1}{ch(nx)}$ converge.
2a: Montrons que f est continue sur $]0,+\infty[$. Soit $a > 0$. Posons $u_n(x) = \dfrac{1}{ch(nx)}$. Pour tout n, la fonction u_n est continue sur $[a,+\infty[$. Si $x \geq a$, $ch(nx) \geq ch(na) > 0$ donc $0 < u_n(x) \leq u_n(a)$. On a donc $\sup_{x\geq a} |u_n(x)| = u_n(a)$ et la série $\sum u_n(a)$ converge donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. On en déduit que f est continue sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$ quelconque donc f est continue sur $]0,+\infty[$.
2b: Posons $g(x) = x^2 f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^2}{ch(nx)}$. Posons $v_n(x) = \dfrac{x^2}{ch(nx)}$ $(x \geq 0)$. Montrons que $\sum v_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$. On a $v_n(x) \leq 2x^2 e^{-nx} = w_n(x)$. On a $w_n'(x) = 2x(2-nx)e^{-nx}$. Les variations

de w_n sur $]0,+\infty[$ donnent alors $0 \leq w_n(x) \leq w_n\left(\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{8}{n^2}e^{-2}$. On a donc $\sup_{x\geq 0}|v_n(x)| \leq \dfrac{8e^{-2}}{n^2}$. On en déduit que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,+\infty[$. On en déduit que $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$ (v_n est continue sur $[0,+\infty[$)

g est continue sur $[0,+\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(0) = 0$ (on en déduit que $f(x) = o_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$).

Exercice 8 *(Ccinp) Pour $n \geq 2$, on pose, pour $x > 0$, $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.*

1. *Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$. (On note $\mathcal{D}$ l'ensemble obtenu).*
2. *Montrer que 'la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathcal{D}$.*
3. *On note $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}$, $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Montrer que la somme S de cette série de fonctions est continue.*
4. *La fonction S est-elle intégrable sur $\mathcal{D}$?*

Solution de l'exercice: 1:Soit $x > 0$. Si $x \in]0,1[$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n \ln(n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ donc la série $\sum u_n(x)$ diverge. On a $u_n(1) = 0$ donc la série $\sum u_n(1)$ converge. Si $x > 1$, $n^2 u_n(x) = \ln(x)\dfrac{n^2}{x^n \ln(n)} \to_{n\to+\infty} 0$ donc $u_n(x) = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n(x)$ converge. La série de fonctions converge simplement sur $\mathcal{D} =]0,+\infty[$. Etudions les variations de u_n sur $[1,+\infty[$ $u_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{\ln(n)\, x^{n+1}}$ $\begin{array}{cccccc} x & 1 & & e^{\frac{1}{n}} & & +\infty \\ u_n(x) & 0 & \nearrow & \dfrac{1}{en\ln(n)} & \searrow & 0 \end{array}$.

On en déduit que u_n est bornée sur $[0,+\infty[$ et $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{en\ln(n)}$. Etudions la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ par comparaison série-intégrale. Posons $g(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$. La fonction g est décroissante et positive et $\int_2^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge car $\int_2^A g(t)\,dt = [\ln(\ln(t))]_2^A \to_{A\to+\infty} +\infty$. On en déduit que la série $\sum g(n)$ diverge donc que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathcal{D}$. Si $k \geq n+1$, $\dfrac{1}{\ln(k+1)} \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ donc $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x) \leq \dfrac{\ln(x)}{\ln(n+1)}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^k} = \dfrac{\ln(x)}{\ln(n+1)}\dfrac{1}{x^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{x^k} = \dfrac{\ln(x)}{\ln(n+1)}\dfrac{1}{x^{n+1}}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$ donc $R_n(x) \leq \dfrac{1}{x^n\ln(n+1)}\dfrac{\ln(x)}{x-1}$. Or $\forall x \geq 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ donc $0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{1}{x^n\ln(n+1)} \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. On a donc $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ d'où $\|R_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ donc $\|R_n\|_\infty \to_{n\to+\infty} 0$. On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$. Chaque u_n est continue donc la somme est continue sur $\mathcal{D}$. On a si $x < 1$, $0 < -u_2(x) = \dfrac{-\ln(x)}{x^2\ln(2)} < -S(x)$ et $\dfrac{1}{x^2} = o_{x\to 0}\left(\dfrac{-\ln(x)}{x^2\ln(2)}\right)$. Or $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ donc S n'est pas intégrable sur $]0,1]$ (on peut montrer à l'aide de majorations que S est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 9 ***(Mines ponts)*** *On pose $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$. Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}dx$.*

Solution de l'exercice: On ne peut pas montrer la convergence normale de la série $\sum x^n \sin(\pi x)$ sur $[0,1]$ donc on ne peut pas raisonner sur le segment $[0,1]$.
On applique le théorème d'interversion $\sum - \int$ sur l'intervalle $[0,1[$ avec $v_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.
- $0 < x < 1$ sonc $\sum x^n$ converge donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \dfrac{\sin(x)}{1-x} = f(x)$ qui est bien continue par morceaux.
- Une IPP donne $\int_0^1 |v_n(x)|\, dx = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\, dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\sin(\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\pi\cos(\pi x)\, dx = -\dfrac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\pi\cos($
Une deuxième IPP donne $\int_0^1 |v_n(x)|\, dx = -\dfrac{1}{n+1}\left(\left[\dfrac{x^{n+2}}{n+2}\pi\cos(\pi x)\right]_0^1 + \int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{n+2}\pi^2 \sin(\pi x)\, dx\right)$
$\int_0^1 |v_n(x)|\, dx = \dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{\pi^2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}\sin(\pi x)\, dx = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
car $\left|\int_0^1 x^{n+2}\sin(\pi x)\, dx\right| \leq \int_0^1 |x^{n+2}\sin(\pi x)|\, dx \leq \int_0^1 1 dx = 1$.
On en déduit que la série $\sum \int_0^1 |v_n(x)|\, dx$ converge donc (th d'interversion):
f est intégrable sur $[0,1[$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 v_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x} dx$.
De plus $I = \int_0^1 \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}dx = \int_0^1 \dfrac{\sin(\pi(1-x))}{1-x}dx = \int_0^1 \dfrac{\sin(\pi t)}{t}dt$ par le changement de variable C^1 et strictement monotone $x \mapsto 1-x$ et en posant $u = \pi t$, $I = \int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{u}du$.

Remarque: On peut aussi intervertir "à la main"
On a essaye d'intervertir sans utiliser les théorèmes. L'intégrale $I = \int_0^1 \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}dx$ est convergente car $\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x} = \dfrac{-\sin(\pi x - \pi)}{1-x} \sim_{x\to 1} \dfrac{-\pi(x-1)}{1-x} = \pi$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$ est prolongeable par continuité en $x = 1$.
Posons $I_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \sum\limits_{k=0}^{n} x^k \sin(\pi x)\, dx = \int_0^1 \dfrac{\sin(\pi x)(1-x^{n+1})}{1-x}dx$. Montrons que la suite (I_n) converge vers I. On a $I - I_n = \int_0^1 \dfrac{\sin(\pi x)x^{n+1}}{1-x}dx$. Or $\sin(\pi x) = \sin(\pi - \pi x)$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$ donc $|\sin(\pi - \pi x)| \leq \pi|1-x|$ et $\left|\dfrac{\sin(\pi x)x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \pi|x^{n+1}|$. On en déduit que $\left|\int_0^1 \dfrac{\sin(\pi x)x^{n+1}}{1-x}dx\right| \leq \int_0^1 \left|\dfrac{\sin(\pi x)x^{n+1}}{1-x}\right| dx \leq \int_0^1 \pi x^{n+1}dx = \dfrac{\pi}{n+2} \to_{n\to+\infty} 0$. On en déduit que la suite (S_n) converge vers S donc que la série $\sum u_n$ converge et est de somme $I = \int_0^1 \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}dx$.

Exercice 10 *(centrale) Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels strictement positifs telles que $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$. On suppose que la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence infini. On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$*

1. *Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$?*
2. *Montrer qu'il existe une suite (γ_n) tendant vers 0 telle que $a_n = b_n(1+\gamma_n)$.pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $v_p = \sup_{n\geq p}|\gamma_n|$.*
4. *Établir l'inégalité : $\forall x > 0$, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leq \dfrac{1}{b_{p+1}x^{p+1}}\sum\limits_{n=0}^{p} b_n|\gamma_n|x^n + v_{p+1}$.*

5. *Montrer que* $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$.

6. *Application. Trouver un équivalent au voisinage de* $+\infty$ *de* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\dfrac{x^n}{n!}$.

Solution de l'exercice:

1: D'après le cours si $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$ alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même rayon de convergence donc la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence infini.

2: Toujours d'après le cours, $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$ donc il existe une suite (γ_n) tendant vers 0 telle que $a_n = b_n(1+\gamma_n)$.pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3: La suite $(|\gamma_n|)_{n\geq p}$ converge vers 0 donc est bornée donc admet une borne supérieure $v_p = \sup_{n\geq p}|\gamma_n|$.

4: On a . $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right| = \left|\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right| = \left|\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{p}(a_n-b_n)x^n}{g(x)} + \dfrac{\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n}{g(x)}\right| \leq \left|\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{p} b_n\gamma_n x^n}{g(x)}\right| + \left|\dfrac{\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} b_n\gamma_n x^n}{g(x)}\right|$.

On a $\left|\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{p} b_n\gamma_n x^n}{g(x)}\right| \leq \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{p} b_n|\gamma_n|x^n}{|g(x)|} \leq \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{p} b_n|\gamma_n|x^n}{b_{p+1}x^{p+1}}$ car $b_i > 0$ et $x > 0$ donc $|g(x)| > b_{p+1}x^{p+1}$. De plus $\left|\dfrac{\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} b_n\gamma_n x^n}{g(x)}\right| \leq \dfrac{\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} b_n|\gamma_n|x^n}{g(x)} \leq v_{p+1}\dfrac{\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} b_n x^n}{g(x)} \leq v_{p+1}$ car $b_i > 0$ et $x > 0$

donc $0 < \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} b_n x^n < \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x)$.

On en déduit que $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right| \leq \dfrac{1}{b_{p+1}x^{p+1}}\sum\limits_{n=0}^{p} b_n|\gamma_n|x^n + v_{p+1}$.

5: Soit $\varepsilon > 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n = 0$ donc $\exists p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall k\geq p$, $|\gamma_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ donc $v_p \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ (inégalité stricte non conservée par passage au sup).

L'entier p étant choisi, On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{b_{p+1}x^{p+1}}\sum\limits_{n=0}^{p} b_n|\gamma_n|x^n = 0$ donc il existe $A > 0$ tel que

$x > A \Rightarrow \left|\dfrac{1}{b_{p+1}x^{p+1}}\sum\limits_{n=0}^{p} b_n|\gamma_n|x^n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

On en déduit que si $x > A$, on a $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right| \leq \dfrac{1}{b_{p+1}x^{p+1}}\sum\limits_{n=0}^{p} b_n|\gamma_n|x^n + v_{p+1} < \varepsilon$. Comme ε a été choisi quelconque, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right| = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $f(x)\sim_{x\to+\infty} g(x)$.

6: Posons $a_n = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!}$. Un calcul classique donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ donc $a_n \sim_{n\to+\infty}\dfrac{e}{n!}$. Le rayon de convergence de $\sum\dfrac{e}{n!}x^n$ vaut $+\infty$ et sa somme est ee^x donc la série entière $\sum\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\dfrac{x^n}{n!}$.donc a un rayon de convergence infini et sa somme vérifie $f(x)\sim_{n\to+\infty} ee^x = e^{x+1}$.

Exercice 11 *(Mines ponts)*

1. *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions* (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = 0$ *si* $|x| > \frac{1}{n}$ *et* $f_n(x) = n - n^2|x|$ *si* $|x| \leq \frac{1}{n}$.

2. *Etudier la limite de la suite de terme général* $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,g(x)\,dx$ *ou* g *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice: 1: La fonction f_n est paire. Elle est affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ avec $f_n(0) = n$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
- La suite $(f_n(0))$ ne converge pas
- Si $x \neq 0$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < |x|$ et pour $n \geq n_0$, on a $f_n(x) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}^*$ vers la fonction nulle notée f..
Pour n fixé et $x \neq 0$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|$ donc $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = f_n(0) = n \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|$ donc la suite $\left(\sup_{t\in\mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^*$
2: L'intégrale I_n est définie et $I_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\, g(x)\, dx$. Montrons que la suite (I_n) converge vers $g(0)$. On remarque que $\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\, dx = 1$ (aire du triangle). Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de g entraîne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - 0| \leq \alpha$, alors $|g(x) - g(0)| \leq \varepsilon$. Si $\frac{1}{n} \leq \alpha$ (soit $n \geq \frac{1}{\alpha}$), on aura, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $|g(x) - g(0)| \leq \varepsilon$ donc $|I_n - g(0)| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\, g(x)\, dx - g(0)\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\, g(x)\, dx - g(0) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\, dx\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,(g(x) - g(0))\, dx\right|$
donc $|I_n - g(0)| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)\,(g(x) - g(0))|\, dx \leq \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)|\, dx = \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\, dx = \varepsilon$. Comme ε est quelconque, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} (I_n) = g(0)$.
Remarque: Au lieu de considérer des valeurs absolues, il est peut-être plus simple d'intégrer la double inégalité $f_n(x) \times (g(0) - \varepsilon) \leq f_n(x) \times g(x) \leq f_n(x) \times (g(0) + \varepsilon)$

Exercice 12 *(Mines ponts): Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On définit la suite de fonctions (f_n) de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0 = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$.*

1. *Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.*
2. *Déterminer la somme de cette série de fonctions à l'aide d'une équation différentielle..*

Solution de l'exercice: Amodifier

1. Soit $a > 0$.. Etudions la convergence normale sur $[0, a]$
   La fonction f est continue sur le segment $[0, a]$ donc bornée. Posons $M = \sup_{[0,a]} |f|$.
   Soit $x \in [0, a]$. On a $f_1(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ donc $|f_1(x)| \leq M\,|x - a|$. Montrons par récurrence que $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{Mx^n}{n!}$.
   C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
   On a $|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_n(t)\, dt\right| \leq \int_0^x |f_n(t)|\, dt \leq \int_0^x \dfrac{Mt^n}{n!} dt = \dfrac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$.
   Soit $x \in [0, a]$. La série $\sum \dfrac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$ converge donc la série $\sum f_n(x)$ converge (absolument). La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement.
   On a donc $\|f_n\|_\infty^{[0,a]} = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| \leq \dfrac{Ma^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{a^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

2. Posons $g = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. On veut utiliser le fait que $f'_{n+1} = f_n$ et le théorème de dérivation terme à terme.
   On pose donc $u = g - f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ (car $f_0 = f$ n'est supposée que continue). Soit $a > 0$.
   - La série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement vers u (d'après Q1)
   - chaque $f_n, (n \geq 1)$ est de classe C^1 et $f'_n = f_{n-1}$
   - la série $\sum\limits_{n\geq 1} f'_n = \sum f_{n_{-1}}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, a]$ vers g.
   La fonction u est donc de classe C^1 sur $[0, a]$ et $u' = g = u + f$.

Les solutions de $y' = y$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$.
La méthode de variation de la constante appliquée à l'équation $y' - y = f$ conduit à poser $y_p(x) = \lambda(x) e^x$ et en reportant dans l'équation, on aboutit à $\lambda'(x) = e^{-x} f(x)$ donc $y_p(x) = e^x \int_0^x f(t) e^{-t} dt$ est solution particulière. On a donc $u(x) = e^x \times \left(\lambda + \int_0^x f(t) e^{-t} dt\right)$. Or $u(a) = 0$ car $f_n(a) = 0$ pour $n \geq 1$ donc $\lambda = 0$ et $u(x) = e^x \times \int_0^x f(t) e^{-t} dt$ donc $g(x) = f(x) + e^x \times \int_0^x f(t) e^{-t} dt$.