Analyse 5: lundi 10 juin
Intégrales à parmètre continu, équas diffs EVN

Exercice 1 *(Ccinp) Résoudre l'équation différentielle* $xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$ *sur l'intervalle* $]-\infty, 1[$.

Exercice 2 *(Ccinp): Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

1. *Montrer que la fonction* f *est définie et de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$.
2. *Etudier le sens de variation de* f*. Montrer que* f *admet un prolongement de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Etudier les branches infinies de la courbe* C_f.

Exercice 3 *(IMT): On cherche les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x : (\mathcal{E})$$

1. *Justifier que si* f *vérifie* $(\mathcal{E})$ *alors* f *est de classe* C^∞ *et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre* 2.
2. *Déterminer les fonctions vérifiant* $(\mathcal{E})$.

Exercice 4 *(ccinp) Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et l'équation différentielle* (E) : $y'' - 9y = a|x| + b$.

1. *Résoudre* (E) *sur* $]0, +\infty[$.
2. *Résoudre* (E) *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Montrer que* (E) *possède une unique solution sur* $\mathbb{R}$ *admettant une asymptote en* $\pm\infty$.

Exercice 5 *(Navale 2017) Montrer que toute fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *lipschitzienne de rapport* $k < 1$ *admet un point fixe.*

Exercice 6 *(Ccinp) Pour* $x > 0$*, on pose* $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-xt} dt$.

1. *Montrer que* f *est bien définie et continue sur* $]0, +\infty[$.
2. *Déterminer la limite de* f *en* $+\infty$.
3. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* $]0, +\infty[$.
4. *Montrer qu'il existe une constante* c *telle que* $f(x) = \dfrac{c - \ln(x)}{x}$.

Exercice 7 *Soit les équations* $(E_0) : x^2 y'' - 2y = 0$ *et* $(E) : x^2 y'' - 2y = x^3$.

1. *Trouver une solution polynomiale* $\mathfrak{u}$ *de* (E_0).
2. *Trouver une fonction* v *solution de* (E_0)*, indépendante de* $\mathfrak{u}$*, écrite sous la forme* $v(x) = \mathfrak{u}(x)z(x)$ *avec* z *de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$.
3. *Déduire de la question précédente les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$.
4. *Trouver toutes les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 8 *(Mines ponts) On définit, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$ et $N_2(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.*

1. *Montrer que N_1 et N_2 sont des norme de $\mathbb{R}[X]$.*
2. *On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \dfrac{X^n}{n}$. Etudier la convergence de la suite (P_n) pour les normes N_1 et N_2.*

Exercice 9 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \cos(\alpha \times \arcsin(x))$.*

1. *Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par la fontion f sur un intervalle à préciser.*
2. *En déduire un développement en série entière de f.*

Exercice 10 *(Centrale) Pour $n \geq 1$, on pose E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels. Montrer que $\inf\limits_{P\in E_n} \left(\int_0^1 |P(t)|\, dt\right) > 0$.*

Exercice 11 *ENS Saclay PSI 2022*
Soit p et q deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'équation $(E) : y'' + py' + qy = 0$.

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une solution de (E) non identiquement nulle vérifiant $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a - \eta; a + \eta]\backslash\{a\}, f(x) \neq 0$.*
2. *Soit f et g deux solutions de (E) telles que (f, g) est libre.*
   On définit $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.
   (a) *Donner une équation différentielle vérifiée par W.*
   (b) *En déduire une expression de W en fonction de $t_0 \in \mathbb{R}$.*
   (c) *Montrer que pour tout réel t, on a $W(t) \neq 0$.*
   (d) *On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, $f(a) = f(b) = 0$ et $\forall x \in]a; b[$, $f(x) \neq 0$. Montrer que g s'annule une et une seule fois sur $]a, b[$.*